Formeel Denken 2009
Uitwerkingen Hertentamen

1.
$$((R \wedge \neg N) \wedge \neg D)$$

> *Als ik droog ben word ik niet nat en het is niet zo dat als ik niet nat word dat ik dan droog ben.*

2. De formule $a \vee b \wedge c$ moet gelezen worden als $(a \vee (b \wedge c))$. (Voor het gemak bevat deze uitwerking ook al de kolommen die nodig zijn voor de volgende opgave.)

a	b	c	$(b \wedge c)$	$(a \vee (b \wedge c))$	$(a \vee b)$	$((a \vee b) \wedge c)$
0	0	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	**0**
0	1	0	0	**0**	1	**0**
0	1	1	1	**1**	1	**1**
1	0	0	0	**1**	1	**0**
1	0	1	0	**1**	1	**1**
1	1	0	0	**1**	1	**0**
1	1	1	1	**1**	1	**1**

3. In de uitwerking van de vorige opgave zijn de kolommen van beide formules te zien. Het is duidelijk dat deze kolommen niet precies hetzelfde zijn, dus zijn de twee formules niet logisch equivalent.

4. De tekst *Mannen houden van knappe vrouwen* wordt hierbij geïnterpreteerd als *Elke man houdt van elke knappe vrouw, maar hij zou ook nog van niet-knappe vrouwen kunnen houden.*

$$\begin{array}{l}
(\\
\quad (\forall m \in M\ (\forall v \in V\ (K(v) \to H(m, v)))) \\
\wedge \\
\quad (\forall v \in V\ (\forall m \in M\ (I(m) \to H(v, m)))) \\
)
\end{array}$$

De betekenis van de gegeven formule is:

> *Er is precies één vrouw die knap en intelligent is.*

5. Het symbool $\models$ betekent dat de formule $(\exists x \in M\ I(x))$ volgt uit de formule $(\exists x \in M\ (I(x) \wedge K(x)))$. Dus dat de formule

$$((\exists x \in M\ (I(x) \wedge K(x))) \to (\exists x \in M\ I(x)))$$

altijd waar is. Dus voor elk model en interpretatie geldt, als de formule $(\exists x \in M\ (I(x) \wedge K(x)))$ waar is dan is ook de formule $(\exists x \in M\ I(x))$ waar.

Deze uitspraak geldt. Ongeacht de betekenis van M, $I(x)$ en $K(x)$ weten we dat als er een $x \in M$ is waarvoor zowel $I(x)$ als $K(x)$ waar is, dan is uiteraard de zwakkere bewering dat er een $x \in M$ is waarvoor (alleen) $I(x)$ waar is ook waar. Neem namelijk dezelfde x.

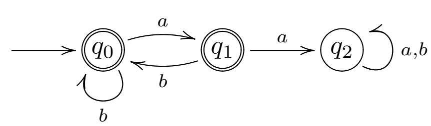
De symbolen M en $I(x)$ hebben dus niets te maken met het model en interpretatie uit de vorige opgave.

6. Neem model $M = (\emptyset)$ met interpretatie I: $D \mapsto \emptyset$ en $R(x, y) \mapsto x \leq y$. Omdat beide helften van de conjunctie beweringen zijn over alle elementen uit D is het duidelijk dat bij dit lege domein D beide delen automatisch waar zijn en dus de conjunctie ook.

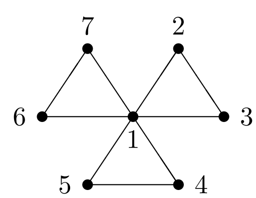
7. Een woord met precies drie a's heeft uiteraard drie a's en kan verder een willekeurige hoeveelheid b's voor, tussen en na de a's hebben. Vandaar deze expressie:
$$b^*ab^*ab^*ab^*$$

8. Nee, dit is geen invariant en dus zeker geen goede invariant om de gewenste eigenschap mee aan te tonen. Merk op dat $P(aS)$ geldt. Verder hebben we dat $aS \to aaA$. Maar het is duidelijk dat $P(aaA)$ niet geldt. Dus is P geen invariante eigenschap.

9.



10.



Deze graaf is planair want er zijn geen kruisende lijnen.

Deze graaf heeft kleurgetal drie. Omdat punt 1, 2 en 3 elkaars buren zijn, moeten deze elk een eigen kleur hebben en zijn er dus minstens drie kleuren nodig. Door de punten 4 en 6 dezelfde kleur te geven als punt 2 en de punten 5 en 7 dezelfde kleur als punt 3 ontstaat een goede kleuring.

Deze graaf heeft geen Hamiltonpad. Een Hamiltonpad is een pad dat precies één keer door alle punten gaat. Stel er is wel zo'n Hamiltonpad. In het bijzonder moet dit Hamiltonpad dus door de lusjes 123, 145 en 167 gaan. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat eerst het lusje 123 wordt aangedaan, daarna 145 en tenslotte 167. Het Hamiltonpad zal dus op een gegeven moment het punt 2 aandoen. Maar daarna moet het nog naar punt 4. Daar kan het alleen maar komen door via punt 1 te gaan. Maar na punt 4 moet het nog naar punt 6. En ook daar kan het alleen maar komen door nog eens door punt 1 te gaan. Dus punt 1 wordt minimaal twee keer gepasseerd en dus is ons Hamiltonpad eigenlijk helemaal geen Hamiltonpad. En dus bevat deze graaf geen Hamiltonpad.

11.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 2a_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\
a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\
a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\
a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\
a_5 &= 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31
\end{aligned}$$

Dus $a_5 = 31$.

Stelling: *Voor alle $n \geq 2$ geldt dat $a_n + 1$ deelbaar door 4 is.*

Bewijs met inductie naar n.

- *Basisstap*, $n = 2$: $a_2 + 1 = 4$, en 4 is inderdaad deelbaar door 4.
- *Inductiestap.* Laat gegeven zijn dat $a_n + 1$ deelbaar is door 4, met $n \geq 2$. Te bewijzen dat dan $a_{n+1} + 1$ ook deelbaar is door 4.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + 1 &= 2a_n + 1 + 1 \\
&= 2a_n + 2 \\
&= 2(a_n + 1)
\end{aligned}$$

Maar als $a_n + 1$ deelbaar is door 4 dan is $2(a_n + 1)$ natuurlijk ook deelbaar door 4. En dus $a_{n+1} + 1$ ook.

12.

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

De coëfficiënten staan in de zesde rij van de driehoek van Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
\boxed{1} && \boxed{5} && \boxed{10} && \boxed{10} && \boxed{5} && \boxed{1}
\end{array}$$

13.

$$\neg\Box R$$

De gegeven formule betekent:

> *Je weet dat als het regent er dan water uit de lucht valt en het is niet zo dat als je weet dat het regent dat er dan water uit de lucht valt.*

14. Hier is een tabel met welke formule waar is in welke wereld van dit Kripke-model:

	a	$\Diamond a$	$\Box\Diamond a$	$\Box a$	$\Diamond\Box a$	$\neg(\Diamond\Box a)$	$(\Box\Diamond a) \leftrightarrow \neg(\Diamond\Box a)$
x_1	1	0	1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	1	0	0	1	0	1

In het bijzonder is de uitspraak dus waar in alle werelden.

15.

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{X}\neg a) \wedge \mathcal{G}(\neg a \to \mathcal{X} a) \wedge a$$