# Formeel Denken 2010
# Uitwerkingen hertentamen
**(08/03/11)**

1.

$$(H \rightarrow \neg TG)$$

2.

$$(a \rightarrow ((b \vee b) \rightarrow a))$$

| $a$ | $b$ | $(b \vee b)$ | $((b \vee b) \rightarrow a)$ | $(a \rightarrow ((b \vee b) \rightarrow a))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. We maken weer een waarheidstabel:

| $a$ | $b$ | $(a \rightarrow b)$ | $(b \rightarrow a)$ | $((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Omdat in de waarheidstabel in de kolom van $((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a))$ alleen maar 1-en staan, geldt $\models ((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a))$.

En omdat in de waarheidstabel in de kolommen van $(a \rightarrow b)$ en $(b \rightarrow a)$ ook 0-en staan, gelden $\models (a \rightarrow b)$ en $\models (b \rightarrow a)$ niet.

4. Eerst een hulpdefinitie:

$$x \text{ heeft een moeder} \quad HM(x) \quad := \quad (\exists y \in M\,(V(y) \wedge K(x,y)))$$

Dan wordt de formule:

$$(\forall x \in M\,(\neg V(x) \rightarrow HM(x)))$$

Natuurlijk kan het ook zonder hulpdefinities worden uitgeschreven:

$$(\forall x \in M\,(\neg V(x) \rightarrow (\exists y \in M\,(V(y) \wedge K(x,y)))))$$

5.

$$(\exists x \in E\,(\exists y \in E\,(\exists z \in E\,(((\neg(x = y) \wedge \neg(x = z)) \wedge \neg(y = z))$$
$$\wedge$$
$$(\forall u \in E\,(((u = x) \vee (u = y)) \vee (u = z)))))))$$

6.
$$((\exists x \in D\, R(x,x)) \wedge (\forall x \in D\, (\forall y \in D\, (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)))))$$

Zo'n interpretatie bestaat niet. De linkerhelft zegt dat er een $x_1 \in D$ zit met $R(x_1, x_1)$. Als we deze zelfde $x_1$ invullen voor zowel $x$ als $y$ in de rechterhelft, dan krijgen we de bewering $R(x_1, x_1) \leftrightarrow \neg(R(x_1, x_1))$. En die is duidelijk voor geen enkele $x_1$ waar.

7. Neem $\Sigma = \{a\}$ en $r = (aa)^*$. Dan $\mathcal{L}(r) = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\overline{\mathcal{L}(r)} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Het is duidelijk dat beide verzamelingen oneindig zijn.

   Een andere oplossing maakt gebruik van een ruimer alfabet. Neem $\Sigma = \{a, b\}$ en $r = a^*$. Dan $\mathcal{L}(r) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Verder is het duidelijk dat $\{b^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathcal{L}(r)}$. En dus zijn ook nu beide verzamelingen oneindig.

8. Dit is geen rechtslineaire grammatica omdat de $S$ in $aSb$ niet uiterst rechts staat.

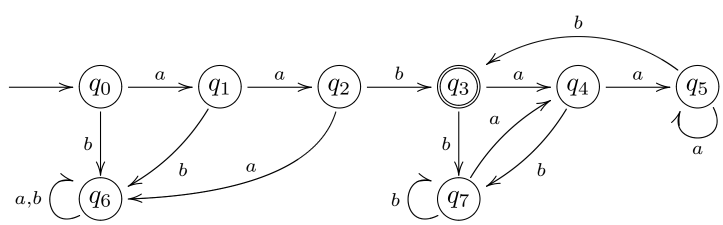
   Neem als eigenschap $P(w)$ := het aantal $a$'s in $w$ is gelijk aan het aantal $b$'s in $w$. Er geldt dan:

   - $P(S)$ geldt want $S$ bevat nul $a$'s en nul $b$'s.
   - Neem aan dat $v$ en $v'$ woorden zijn waarbij $P(v)$ geldt en dat $v \to v'$. Er kunnen dan twee overgangen hebben plaatsgevonden:
     (a) $S \to aSb$, waarbij het aantal $a$'s en het aantal $b$'s allebei met één toeneemt en dus onderling gelijk blijft en dus geldt $P(v')$.
     (b) $S \to \lambda$, waarbij het aantal $a$'s en het aantal $b$'s uiteraard gelijk blijft en dus geldt $P(v')$.

     Dus $P$ is een invariant van deze grammatica.

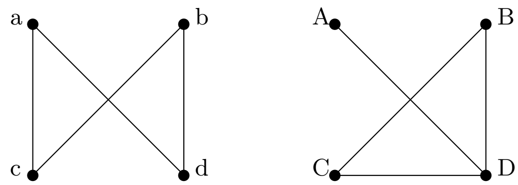
     Verder geldt $aaa \in \mathcal{L}(a^*b^*)$. Het is duidelijk dat $P(aaa)$ niet geldt. Dus geldt $aaa \notin \mathcal{L}(G)$. En dus geldt $\mathcal{L}(a^*b^*) \neq \mathcal{L}(G)$.

9. Het kortste woord dat geaccepteerd wordt is $aab$ waarbij de begin-$aab$ en de eind-$aab$ samenvallen. In alle andere gevallen liggen de eerste en de laatste drie symbolen vast, maar alles wat daar tussenin zit is vrij. Een reguliere expressie die deze taal voortbrengt, is $aab \cup aab(a \cup b)^*aab$. Een automaat die deze taal accepteert is




10. De linkergraaf is de $K_{2,2}$. De rechtergraaf is duidelijk ook een graaf met vier punten en vier lijnen. De grafen zijn duidelijk niet isomorf. In $K_{2,2}$

heeft elk punt graad 2. In de rechtergraaf heeft punt $A$ graad 1 en punt $D$ graad 3. Echter, graden blijven behouden onder isomorfie, dus de twee grafen kunnen niet isomorf zijn.




11. De recursieve definitie van $n!$ is:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1)n! \quad \text{voor } n \geq 0 \end{aligned}$$

Het inductiepredikaat is:

$$P(n) := n! \text{ is even}$$

Het bewijs met inductie is:

**Basisstap** $(n = 2)$: Te laten zien dat $P(2)$ geldt ofwel dat

$$2! \text{ is even}$$

Dit klopt inderdaad, want $2! = 2$ en dat is even.

**Inductiestap** $(n \geq 2)$: De inductiehypothese (IH) is $P(n)$ ofwel er is gegeven dat

$$n! \text{ is even}$$

Te laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt ofwel

$$(n+1)! \text{ is even}$$

Dit volgt inderdaad. Merk op dat

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

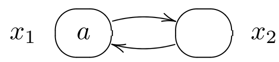
volgens de recursieve definitie van $(n+1)!$. Maar uit de inductiehypothese weten we dat $n!$ even is. Maar dan is $(n+1)n!$ uiteraard ook even omdat het optellen van een willekeurig aantal even getallen ook weer een even getal oplevert. Dus geldt inderdaad dat $(n+1)!$ is even.

12. Omdat links rood en rechts zwart een andere manier is dan links zwart en rechts rood, heeft Wim drie keuzes voor de linkervoet en drie onafhankelijke keuzes voor de rechtervoet. In totaal dus negen opties.

Voor de octopus werkt het hetzelfde: voor elk tentakel heeft hij de keuze uit drie kleuren sokken. Dit levert dus $3^8 = 6561$ mogelijkheden op.

13. Dit is het axiomaschema dat transitiviteit aangeeft. Dit geldt wel in de modale logica, epistemische logica, doxastische logica en temporele logica, maar niet in de deontische logica (als $f$ moet, volgt daar niet uit dat het moet dat $f$ moet) en de programmalogica (als $f$ na executie geldt, volgt daar niet uit dat na executie moet gelden dat $f$ na (nog een) executie moet gelden).

14. Neem voor $\mathcal{M}$:




Dan geldt:

| | $a$ | $\Box a$ | $\Box\Box a$ | $\Box a \to \Box\Box a$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\Vdash$ | $\nVdash$ | $\Vdash$ | $\Vdash$ |
| $x_2$ | $\nVdash$ | $\Vdash$ | $\nVdash$ | $\nVdash$ |

15. Afhankelijk van de exacte invulling van de woorden ‘vanaf’ en ‘verder’ zijn er verschillende antwoorden mogelijk:

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{G}b)$$

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{X}\mathcal{G}b)$$