

Inductieschema

Stelling (of **Propositie** of **Lemma**):

$\boxed{\dots}$ voor alle $n \geq \boxed{\dots}$

Bewijs met inductie naar n .

1

$P(n) := \boxed{\dots}$

2

Basisstap. We laten zien dat $P(\boxed{\dots})$ geldt, ofwel

3

$\boxed{\dots \text{ met } n \text{ vervangen door } \boxed{\dots}}$

Dit is zo, want ...

4

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq \boxed{\dots}$

5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel $\boxed{\dots}$

6

(inductiehypothese)

We laten zien dat $P(\textcolor{brown}{n} + 1)$ ook geldt, ofwel

7

$\boxed{\dots \text{ met } n \text{ vervangen door } \textcolor{brown}{n} + 1)}$

Dit is zo, want ...

8

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq \boxed{\dots}$

9

(De **rode** en **blauwe** ... zijn allemaal tekstueel volslagen identiek, afgezien van de twee aangegeven vervangingen. De vier onderstreepte termen moeten allemaal in het bewijs voorkomen. De **groene** items zijn de enige waarbij je iets anders hoeft te doen dan overschrijven.)

Voorbeeld

Propositie:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ voor alle } n \geq 1$$

Bewijs met inductie naar n .

$$P(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Basisstap. We laten zien dat $P(1)$ geldt, ofwel

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$

Dit is zo, want

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq 1$

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{inductiehypothese IH})$$

We laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt, ofwel

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

Dit is zo, want

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1) \end{aligned}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$