

12. *Prove that there is no algorithm that determines whether an arbitrary Turing machine halts when run with the input string 101.*

Laat B het *blank tape probleem* (behandeld in het college, of zie Theorem 11.5.1 op pagina 330 van het boek) ‘beslis of een gegeven Turing machine M stopt met als input een lege tape’ zijn.

Laat H_{101} het probleem uit de opgave ‘beslis of een gegeven Turing machine M stopt met input 101’ zijn.

(Beide problemen zijn dus verwant, maar vragen net iets anders: of een machine M stopt als je hem executeert met aan het begin een lege tape is namelijk ongerelateerd aan of die machine stopt met als input de string 101.)

Het bewijs waar de opgave om vraagt gaat nu als volgt:

- B is niet beslisbaar.
- Als H_{101} wel beslisbaar zou zijn, dan was B ook beslisbaar.

Want stel we hadden een beslissingsprocedure voor H_{101} en iemand wil dat je een instantie van probleem B voor hem oplost. Dus hij geeft je een Turing machine M , en wil van je weten of die machine M stopt met als input de lege tape.

Maak bij deze M een welgekozen andere Turing machine M' . De machine M' doet het volgende:

- Wis de tape en zet de kop weer aan het begin.
- Executeer de machine M .

We hebben die machine M' zo gemaakt dat hij stopt met als input 101 *dan en slechts dan als* M stopt met als input de lege tape. (Ga dit na!)

Geef nu M' aan de beslissingsprocedure voor H_{101} . Dat vertelt je dan dus ook het antwoord voor B waarbij de input machine M is.

- Dus is H_{101} ook niet beslisbaar.
-

Opmerkingen

- Laat je niet afschrikken door de hoeveelheid tekst in deze uitwerking. Het gaat voor het grootste gedeelte om uitleg eromheen. De tekst van het antwoord staat tussen de twee strepen hierboven.

- Een wat informelere manier om dit bewijs te begrijpen:

Stel iemand geeft je een oplossing voor het probleem uit de opgave, H_{101} . Dan kun je daarmee een oplossing voor het blank tape probleem B maken dat er in pseudocode uit ziet als:

```
B(M) {  
    M' := "wis tape; M";  
    return H101(M'); // dit zegt of M'(101)↓ en dus of M(λ)↓  
}
```

Maar het blank tape probleem B heeft geen oplossing. Dus kan iemand je ook geen oplossing voor het probleem H_{101} uit de opgave gegeven hebben.

- Pas op, het blank tape probleem is *niet* een probleem dat gaat over een *tape*! (Dat zou je misschien kunnen denken.) Het gaat namelijk over een *Turing machine*!

Namelijk, het is de vraag of die machine stopt¹. Het blank tape probleem is dus een geparameteriseerd probleem, waarbij die Turing machine de parameter is.

- Deze opgave los je op door te ‘reduceren’ naar het blank tape probleem (‘als dit probleem beslisbaar was, dan was het blank tape probleem ook beslisbaar.’) In de praktijk bewijs je onbeslisbaarheid van problemen tamelijk vaak met reductie naar het blank tape probleem.
- De stap ‘maak bij deze M een welgekozen...’ is subtiel. We moeten namelijk probleem B met een *Turing machine* oplossen. Dus de transformatie van M naar M' moeten we met een Turing machine doen. Die neemt de *code* $R(M)$ van M als input, en maakt er de *code* $R(M')$

¹... met als input een lege tape, vandaar de naam.

van M' als output van. (Dit correspondeert met vakje 'N' links in het tweede diagram op pagina 330.)

Als dit laatste punt te subtiel voor je is, is dat niet erg.

- Het plaatje dat bij dit antwoord hoort is:

