

Opgaven λ -calculus

Erik Barendsen

voorjaar 2002

1. Laat zien dat in de λ -calculus geldt
 - (i) $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$;
 - (ii) $\mathbf{KI} = \mathbf{K}_*$.
2. (i) Vereenvoudig de volgende termen in λ . Dat wil zeggen: zoek bij elk van onderstaande termen M een ‘eenvoudige’ λ -term N zodat $\lambda \vdash M = N$.

SKIKISS,

SI(SK),

$(\lambda xy. yxy)((\lambda x. xx)(\lambda x. xxx))(\lambda pq. q\mathbf{IK})$.

- (ii) Laat zien:

$\lambda \vdash \mathbf{SKK} = \mathbf{I}$,

$\lambda \vdash \mathbf{SIKI} = \mathbf{K}_*$,

$\lambda \vdash \mathbf{S(SK)I} = \mathbf{I}$.

3. Schrijf gesloten λ -termen F op zodat
 - (i) $Fx = x(xx)x$,
 - (ii) $FMN = N(\lambda x. xMx)N$ voor alle $M, N \in \Lambda$,
 - (iii) $FM = M(MFM)$ voor alle $M \in \Lambda$,
 - (iv) $Fx = xF$.
4. Beschouw de inductieve definitie van de substitutie-operatie (2.4 (iii) in het dictaat). Bewijs nu het volgende *substitutielemma*.

Voor alle λ -termen M, N, L en variabelen x, y zodat $x \not\equiv y$ en $x \notin \text{FV}(L)$

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]].$$

[*Hint.* Gebruik inductie naar M . Bekijk de opmerking na 2.6.]

5. (i) De functies $Mult$ en Fac zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} Mult(n, m) &= n \cdot m, \\ Fac(n) &= n!. \end{aligned}$$

Construeer λ -termen **Mult** en **Fac** die deze functies λ -definiëren.

- (ii) De *Ackermann-functie* $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ is als volgt gedefinieerd.

$$\begin{aligned} \varphi(0, n) &= n + 1, \\ \varphi(m + 1, 0) &= \varphi(m, 1), \\ \varphi(m + 1, n + 1) &= \varphi(m, \varphi(m + 1, n)). \end{aligned}$$

(Deze φ is totaal-recursief, maar niet primitief-recursief.) Schrijf een λ -term F op die φ lambda-definieert.

6. Definieer $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ door

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 1 && \text{als } m < n, \\ &= 2 && \text{als } m = n, \\ &= 3 && \text{als } m > n. \end{aligned}$$

Construeer een λ -term die deze functie λ -definieert.

7. (i) De functie $Length$ die de lengte van eindige lijsten oplevert kan als volgt worden gespecificeerd.

$$\begin{aligned} Length(\text{nil}) &= 0, \\ Length(\text{Cons}(x, l)) &= 1 + Length(l). \end{aligned}$$

Schrijf een term op die deze functie λ -definieert.

- (ii) Maak een term **Sel** $\in \Lambda^0$ zodat voor elke geschikte $n \in \mathbb{N}$ en lijst L geldt

$$\mathbf{Sel}^\Gamma n^\neg L = (L)_n,$$

waarbij $(L)_n$ het L -element op positie n is.

- (iii) Construeer de λ -representatie van de (oneindige) lijst van drievouden.

8. Construeer een rij $M_0, M_1, M_2, \dots$ van λ -termen zodat

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathbf{S}, \\ M_{n+1} &= M_{n+2} M_n \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[*Hint.* Neem $M_n \equiv F^\top n^\top$ met een geschikte F .]

9. Teken $G_\beta(M)$ voor onderstaande λ -termen M .

- (i) **II(III)**,
- (ii) **KI Ω** .

10. Construeer λ -termen met de volgende β -reductiegraphen.

(i)



(ii)



(iii)



11. Construeer een λ -term M zodat:

M heeft geen β -nf, maar MM wel.

- 12. (i) Laat zien dat de term **YI** geen normaalvorm heeft.
- (ii) Bewijs of weerleg: voor alle termen $M, N \in \Lambda$

MN heeft een β -nf $\Rightarrow M$ heeft een β -nf.

13. Toon aan: voor alle λ -termen M

M heeft geen β -nf $\Rightarrow \mathbf{KM}$ heeft geen β -nf.

14. Construeer termen $F, G, H \in \Lambda^\circ$ zodat

$$\begin{aligned} Fxy &= xG(yH), \\ Gx &= F(\mathbf{K}x)(xG), \\ Hxy &= \lambda z.zFxGyH. \end{aligned}$$

15. Teken de reductiegraph van $(\lambda x.\mathbf{I}xx)(\lambda x.\mathbf{I}xx)$.

16. We definiëren

$$\begin{aligned} P &\equiv \lambda xy.x(xy)y, \\ \omega &\equiv \lambda z.zzz. \end{aligned}$$

Teken de reductiegraaf van $P\mathbf{I}\omega$.

17. Construeer λ -termen Q_1, Q_2 zodat
 (i) Q_1 heeft een β -nf, maar $Q_1\mathbf{I}$ niet.
 (ii) Q_2 heeft geen β -nf, maar $Q_2\mathbf{I}$ wel.

18. Construeer een λ -term F zodat voor alle $M \in \Lambda$

$$FM =_{\beta} FF.$$

[*Opmerking.* Het kan ook zonder de dekpuntcombinator $\mathbf{Y}$ te gebruiken.]

19. Construeer een λ -term met de volgende reductiegraaf.



20. Bewijs: voor elke $M \in \Lambda$ bestaat er een $N \in \Lambda$ zodat

- (1) N is in β -nf,
- (2) $N\mathbf{I} \rightarrow_{\beta} M$.

[*Hint.* Gebruik inductie naar de structuur van M .]

21. (i) Toon aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$

$$\ulcorner n \urcorner \mathbf{I} =_{\beta} \mathbf{I}.$$

(ii) Bewijs dat elke recursieve functie λ -definieerbaar is door een term *in normaalvorm*.

[*Hint.* Gebruik (i) en opgave 20.]

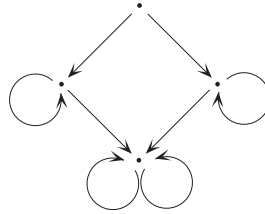
22. Laat zien dat de term $M \equiv AAx$ met $A \equiv \lambda axz.z(aax)$ geen normaalvorm heeft.

23. Toon aan dat de term $\Theta\mathbf{K}$ geen normaalvorm heeft.

24. Construeer een term $F \in \Lambda^\circ$ zodat voor elke $n \in \mathbb{N}$

$$F^\top n^\top = \lambda x_0 \cdots x_n.x_n.$$

25. Construeer (indien mogelijk) een λ -term met de volgende reductiegraph.



26. Toon aan dat er *geen* $F \in \Lambda^\circ$ bestaat zodat voor alle $M, N \in \Lambda$

$$F(MN) = M.$$

27. Bewijs: er bestaat *geen* λ -term F zodat voor alle $M, N \in \Lambda$

$$\begin{aligned} FMN &= \mathbf{true} && \text{als } M \rightarrow_\beta N, \\ &= \mathbf{false} && \text{anders.} \end{aligned}$$

28. Bewijs: voor elke $D \in \Lambda^\circ$

D is een dekpunt van $\mathbf{SI} \Rightarrow D$ is een dekpuntcombinator.

[Voor de fijnproevers. Kunt u ook ($\Leftarrow$) bewijzen?]

29. We definiëren een rij $Y_0, Y_1, \dots$ van λ -termen door

$$\begin{aligned} Y_0 &\equiv \mathbf{Y}, \\ Y_{n+1} &\equiv Y_n(\mathbf{SI}). \end{aligned}$$

- [*Hint.* Gebruik opgave 28.]

- (i) Laat zien:

(ii) Bepaal types σ_1 en σ_2 zodat

(iii) Construeer een term M zodat

[illegible]

32. Deze opgave speelt zich af in $\lambda \rightarrow$.

- $$\begin{array}{ll} \mathbf{SI}, & \mathbf{SII}, \\ \lambda xy.x(yx), & \\ \lambda xy.x(\lambda z.zy) & \end{array}$$

- $$\lambda xy. xy(xy),$$
- $$\lambda xy. xy(xyy).$$

34. Construeer een type σ zodat in $\lambda \rightarrow$

$$\vdash \lambda f.f(\lambda x.f(\lambda y.x)) : \sigma.$$

35. Ga voor elk van onderstaande λ -termen na of hij typeerbaar is in $\lambda \rightarrow$. Zo ja, geef een type; zo nee, leg uit waarom niet.

$$\begin{aligned} \lambda xy.x(\mathbf{I}x)y, \\ \lambda xy.x(x\mathbf{I})y. \end{aligned}$$

36. Construeer een λ -term M zodat in $\lambda \rightarrow$

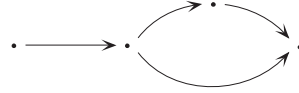
$$\vdash M : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta.$$

37. (i) Bepaal de normaalvorm van **SIISII**.
(ii) Toon aan dat de term **SII(SII)** geen normaalvorm heeft.
(iii) We definiëren

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \lambda x.xx, \\ P &\equiv \lambda z.z(z\omega\omega). \end{aligned}$$

Teken $G_\beta(P\mathbf{I})$.

- (iv) Construeer een λ -term met de volgende reductiegraph.



38. Schrijf een λ -term F op zodat voor alle $M \in \Lambda$

$$FM \twoheadrightarrow_\beta \lambda z.z(zMF).$$

39. Maak een term $G \in \Lambda^\circ$ zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$G^\top n^\top = \lambda x.\mathbf{S}(\mathbf{S}x)(\mathbf{S}xx) \cdots (\mathbf{S}\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ keer}}).$$

[Hint. Maak eerst een term G' zodat $G'^\top n^\top = \mathbf{S}\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ keer}}.$]

40. Construeer een λ -term H zodat $H\mathbf{I} = x$ en $H\mathbf{K} = y$.