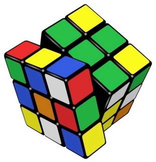
Workshop
Rubik's Cube & Wiskunde



Een kleurrijke workshop over ***6*** *vierkanten voor wiskunde*

Vierkant voor Wiskunde
Kamp B, woensdag 15 augustus 2012

Prof.dr. Marko van Eekelen, marko@cs.ru.nl

1981: Afgestudeerd KUN-Wiskunde
2012: Digital Security, Radboud Universiteit Nijmegen
& Informatica, Open Universiteit Nederland

Geschiedenis

Erno Rubik, Department of Interior Design,

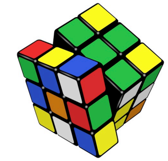
Academy of Applied Arts and Crafts, Boedapest

- Magic Cube, eerste idee 1974, patent 1975, eerste exemplaren 1977
- Rubiks Cube, eerste industrieel export uit Hongarije, mei 1980
- 1981, David Singmaster’s Cube Notes
- 1981, Scientific American, D. Hofstadter
- 1981, Museum of modern art, New York
- 1981, Nederlandse Kubus Club (NKC)
- 1982, Oxford English Dictionary
- 1980-1982: 100 miljoen exemplaren

In Nederland was het dé hit van 1981!

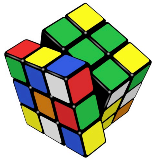
Nu, allerlei varianten 2x2x2,…,15x15x15, 2x2x4, met centra tekening (foto, agenda, patroontje), zonder centra, rond, afgehoekt, ongelijkgevormd, twee aan elkaar vastgemaakt, met beperkingen….

Mijn ervaringen




- een weekend in oktober, een vakantie in december 1980, en daarna een aantal maanden erg fanatiek…
- 2e bij het 1e open Draaikubuskampioenschap van Zuid-Holland, 11 juli 1981
- 1e bij "De Eerste de Beste" en wereldrecord in het Guiness Book of Records (35.48 seconden), 21 aug 1981
  - De huidige recordhouder lost de kubus op in minder dan 10 seconden gemiddeld!
- 1e bij de Open Nederlandse Kubus Kampioenschappen, 28 aug 1981
- TV: De eerste de beste (TROS), TV-verslag van Radiokampioenschap (KRO), MIES (AVRO)
  - Wordt nogal eens herhaald als het gaat om het jaar 1981
    - Triviant (TROS), Het gevoel van … (KRO), De tijd van ons leven (KRO), De televisiejaren (NCRV)

Vreemde gevolgen

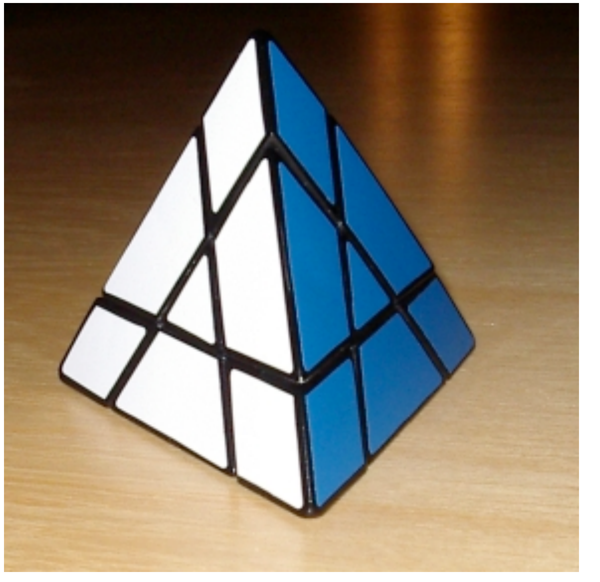


Even was ik een Een Beetje Bekende Nederlander…..

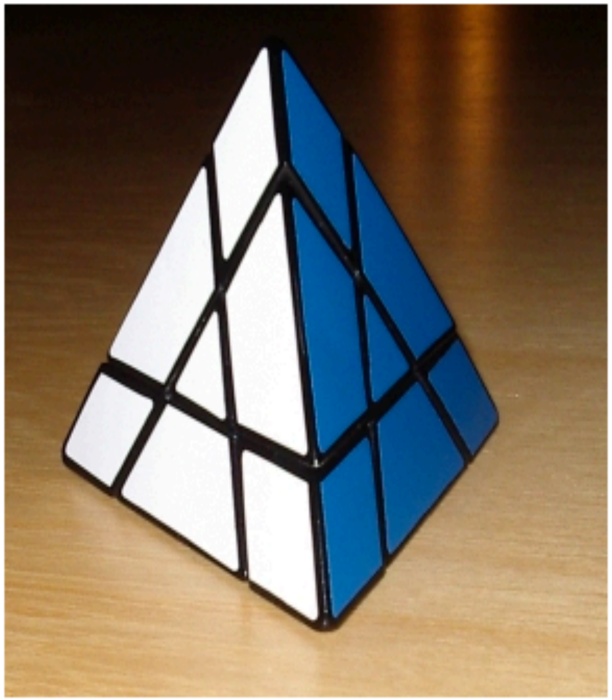
- Allerlei krantenartikelen
- Gratis friet in een snackbar
- Gevraagd (*en gedaan….*)
  - om op een beurs voor een verzekeringsmaatschappij ‘op te treden’
  - om op een feest van een groot IT-bedrijf ‘op te treden’
  - om op een middelbare school een demonstratie te geven
  - om een vinyl langspeelplaat te maken met Ad Visser (*de saaiste plaat van de wereld!*)
  - om een video te maken met Dolf Brouwers
  - afgestudeerd op een variant van de Rubik’s cube

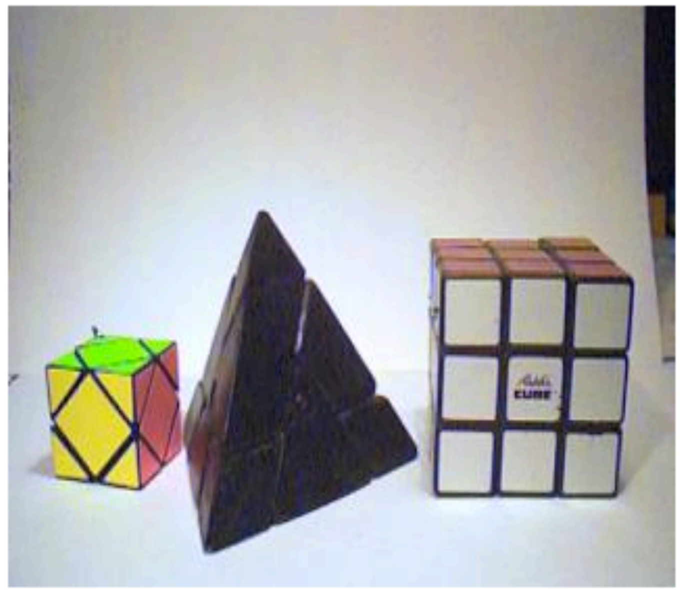
Tetraeder

- Afstudeerscriptie Wiskunde 1981
- Samen met Bernard van Houtum
- Op papier uitgezocht niet met computer (toen nog te weinig computerkracht)
  - aantal standen (3.732.480)
  - oplossingsmethode
  - ordes (max 90), aantal standen per orde
  - karakterisatie van de groepsstructuur
  - gebruik makend van duale karakter
- Geen fysieke vorm en geen computersimulatie

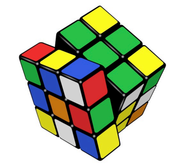


Halpern-Meier Pyramid





The Magic Tetrahedron was independently invented by four inventors, Benjamin R Halpern , Kersten Meier and Marko van Eekelen together with Bernard van Houtum . The Magic Tetrahedron is also know as the Halpern-Meier Pyramid. Marko van Eekelen & Bernard van Houtum wrote a paper for there graduation in September 1981, its describes drawings and solutions and mathematical description of the puzzle.



Groepentheorie, de wiskunde van de Rubik's cube

Een groep is een wiskundige structuur over bewerkingen die met symmetrie te maken hebben

Voorbeelden van groepselementen:

- spiegelingen, draaiingen (rotaties), verwisselingen (permutaties), modulo getallen

Veel gebruikt in:

- cryptografie, kristallografie, elementaire deeltjes theorie

De grootste bekende groep is de groep van de Rubik's Cube. Deze groep heeft meer dan 43 triljoen elementen..

Groepen (definitie)

Zij G een verzameling met een afbeelding (de groepsoperatie)

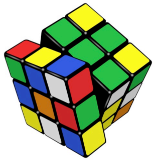
$* : G \times G \times G$

$(g1,g2) \rightarrow g1 * g2$

Dan is G een groep met als groepsoperatie * d.e.s.d.a.

1. G is gesloten onder * $\forall g, h \in G\ [\ g * h \in G\ ]$
2. * is associatief $\forall g,h,k \in G\ [\ (g * h) * k = g * (h * k)\ ]$
3. Er is een eenheidselement (Identiteit) $\exists\, Id \in G\ \forall g \in G\ [\ Id * g = g * Id = g\ ]$
4. Elk element heeft een inverse $\forall g \in g\ \exists\, g^{-1} \in G\ [\ g * g^{-1} = g^{-1} * g = Id\ ]$

Een groep kan eindig veel elementen of oneindig veel elementen hebben



Rubik's groep

X de verzameling van alle genummerde kleine gekleurde vierkantjes van de kubus

S_X de verzameling van alle volledige rijtjes van elementen van X (alle permutaties over X)

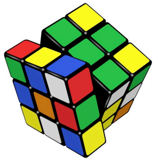
R (Right),L (Left),U (Up),D (Down),F (Front),B (Back) zijn verwisseleffecten van draaiingen (met de klok mee als je er tegen aan kijkt)

Dan is Rubik's groep, de groep van alle elementen gegenereerd door combinaties van $\{R,L,U,D,F,B\} \subset S_X$

De groepsoperatie is dan het samenstellen van verwisselingen

- reeks draaiingen = effect op beginstand = bepaalde stand van de kubus
- eenheidselement = beginstand
- vinden van een inverse = oplossen van de kubus

Even wat notatie



Eerste observatie:

- alles draait om de centra van de vlakken
- de centra veranderen niet ten opzichte van elkaar

Notatie van de draaiingen:

- Met de klok mee (als je tegen het desbetreffende centrum aankijkt)
  - U (up), D (down), L (left), R (right), F (front), B (back)
- Tegen de klok in:
  - U’,D’,L’,R’,F’,B’
- Halve slagen:
  - U^2,D^2,L^2,R^2,F^2,B^2
- Slices (schijven):
  - RL’, R’L, FB’, …

Een uitstapje naar slices

- Slices (schijven):
  - RL’, R’L, FB’, …
  - Slices draaien is aan twee tegenoverliggende kanten voor je gevoel hetzelfde doen)
- RL’ is hetzelfde als de middelste schijf naar voren draaien (aan beide kanten van je af)
  - speedcubers doen dit met 1 vinger met een gesmeerde kubus
- Met slices alleen kun je al mooie figuren maken
  - RL’ FB’ UD’ RL’ bijvoorbeeld levert:

Groepen (inverse)

Inverse = het omgekeerde effect van hetgene waarvan je de inverse bent

- Elk groepselement heeft een inverse

$$\forall\, g \in g\ \exists\, g^{-1} \in G\ [\, g * g^{-1} = g^{-1} * g = Id\,]$$

Het oplossen van de kubus komt dus eigenlijk neer op het vinden van een methode om een inverse te construeren voor een willekeurig element

Stel dat je weet welke draaiingen er geweest zijn,

Dan is de inverse van die reeks draaiingen

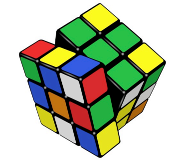
- Dezelfde reeks draaiingen, in omgekeerde volgorde, elk de andere kant op draaiend

Een notatievoorbeeld:

- $U^{-1} = U'$ want $UU' = U'U = Id$
- $(LU)^{-1} = U'L'$ want $LUU'L' = LIdL' = LL' = Id$
- $(U^2)^{-1} = U^2$ want $U^2U^2 = Id$

Groepen (orde)

- De orde van de groep als geheel is het aantal elementen van de groep.
- Elk element g uit een groep heeft een orde n waarvoor geldt: $g^n = 1$
  - De orde van een element is altijd een deler van de orde van de groep
  - Als je een reeks draaiingen maar steeds blijft herhalen kom je dus altijd weer bij de beginstand uit!
- Orde van Rubik's groep
  - 8 hoekblokjes, in drie standen elk; 12 randblokjes in 2 standen elk
  - Randblokjes draaien met twee tegelijk, hoekblokjes ook (maar dan tegengesteld), als je twee hoekblokjes verwisselt van plaats verwisselen er ook twee randblokjes mee (bewijs via invariant tijdens operaties)
  - De groep heeft $(8!*3^8*12!*2^{12})/(2*2*3)$ = 43.252.003.274.489.856.000 elementen
- Voorbeelden van ordes van elementen:
  - De orde van U is 4 want U^4 = UUUU = Id
  - De orde van U^2 is 2 want $(U^2)^2 = U^2U^2$ = UUUU = Id
- Er is geen element van orde 13; Max orde is 1260 (bv. $RU^2D'BD'$)



Groepen (commuteren)

Commuteren = wisselen t.o.v. elkaar

- Twee elementen g en h commuteren desda $g * h = h * g$
- De commutator van g en h is
  $g * h * g^{-1} * h^{-1}$ (*geeft min of meer aan waarin ze niet commuteren*)

Als voor alle elementen van een groep geldt dat g * h = h * g dan heet de groep *abels*.
Je kunt dan de volgorde van de elementen van de groep omdraaien zonder dat er iets verandert

- Optellen van getallen commuteert bijvoorbeeld maar delen niet.

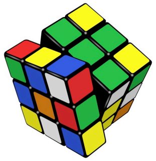
- Elk groepselement commuteert met zijn inverse

De groep van Rubik is niet abels.

- RU ≠ UR

Een voorbeeld van een commutator in de Rubik groep is RUR'U'

Groepen (conjugeren)



Conjugeren (verbinden met, koppelen met)

- De geconjugeerde van g door h is $h * g * h^{-1}$
- Alle geconjugeerden van g vormen samen een equivalentieklasse (*in zekere zin hebben ze allemaal hetzelfde effect*)

Conjugeren in de Rubik's groep is handig als je een basis operatie hebt die weinig aan de kubus verandert. Dan kun je die operatie ergens anders uitvoeren door te conjugeren.

Bekijk in de Rubik groep $(L^2U^2)^3 = L^2U^2L^2U^2L^2U^2$

- $(L^2U^2)^3$ verwisselt gelijktijdig twee randblokjes in het linkervlak (middelste laag) en in het bovenvlak (voor-achter)

Als je nu bijvoorbeeld gelijktijdig twee randblokjes in het linkervlak (middelste laag) gelijktijdig wilt verwisselen met in het bovenvlak niet (voor-achter) maar (links-rechts) dan kun je conjugeren:

- Zet de blokjes van links en rechts uit het bovenvlak zó dat ze voor en achter zitten: U
- Voor de conjugatieoperatie uit: $(L^2U^2)^3$
- Zet de blokjes in het bovenvlak weer terug: U'

De door U geconjugeerde van $(L^2U^2)^3$ is daarmee dus $U(L^2U^2)^3\,U'$. Dit heeft het gewenste effect

Samenvatting van groepen

- Elk element g uit een groep heeft een orde n waarvoor geldt: $g^n = 1$

  n is dan altijd een deler van het aantal elementen van de groep

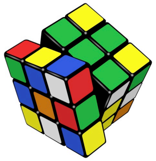
- Twee elementen g en h commuteren desda $g * h = h * g$
- De commutator van g en h is

  $g * h * g^{-1} * h^{-1}$ (*geeft min of meer aan waarin ze niet commuteren*)

- De geconjugeerde van g door h is

  $h^{-1} * g * h$

  Alle geconjugeerden van g vormen samen een equivalentieklasse (*ze hebben allemaal een vergelijkbaar effect*)



Zelf vinden van een oplossing?

Combineren van bestaande acties is belangrijk als je de kubus op wilt lossen. Je kunt bijvoorbeeld een operatie combineren met de gespiegelde van die operatie

De combinatie van de twee commutatoren RUR'U' en U^2RU^2R' verandert alleen iets in het bovenvlak

Deze operatie $RUR'U'U^2RU^2R'$ = $RUR'URU^2R'$ combineren met diens gespiegelde $L'U'LUL'U^2L$ levert een operatie op die in het bovenvlak 2 hoeken draait terwijl de rest van de kubus helemaal gelijk blijft

Als de hoeken de andere kant op wilt draaien, doe je het of nog een keer (na een derde keer is alles weer als origineel, de orde is drie) of je bepaalt de inverse van de hele operatie door alles achter elkaar in omgekeerde volgorde de andere kant op te doen

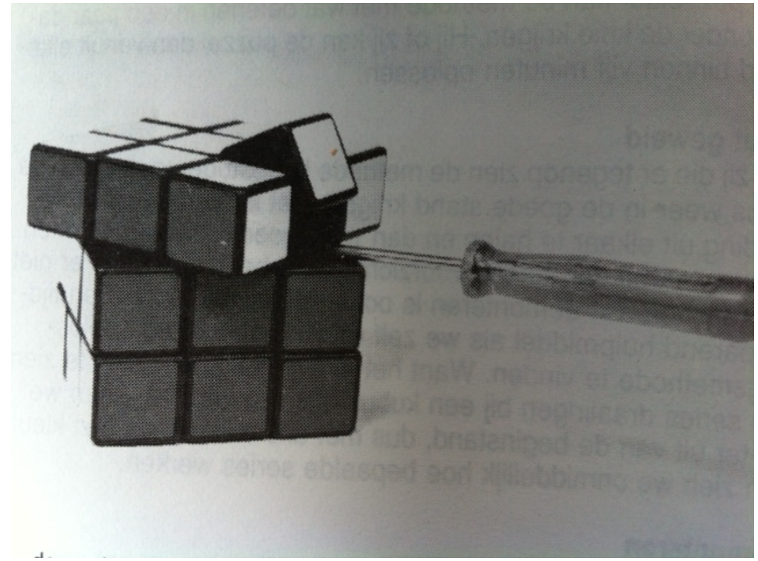
Ook is het soms handig de kubus anders vast te pakken (roteren) en een operatie aan de andere kant van de kubus te doen zonder dat je alle acties hoeft aan te passen.

Om de kubus zelf op te lossen moet je Combineren, Roteren, Spiegelen, Conjugeren, Commuteren, Inverteren, Orde gebruiken en misschien Demonteren….

Demonteren

Wat als je helemaal vast zit?

De kubus kan uit elkaar!



Draai aan 1 vlak zó dat het precies halverwege staat

Klik met een platte schroevedraaier of beter nog met de achterkant van een lepeltje een randblokje eruit.

Peuter vervolgens een voor een de blokjes er tussen uit. Je houdt een karkas met alleen de centra over

Zet alles er op de juiste plaats (!) weer terug in en klik als laatste het randblokje er met de hand weer in

Pas op: doe dit niet te vaak. Hij slijt er wel een beetje van

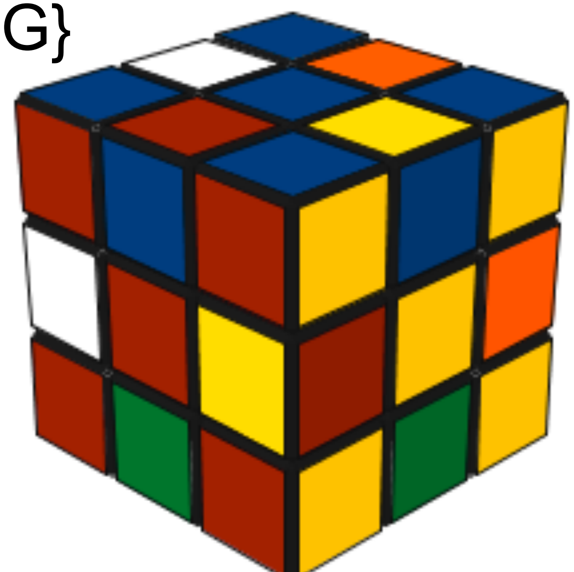
Centrum van een groep

Het centrum van een groep G is de subgroep

Centrum(G) die bestaat uit die elementen van G die

met alle elementen van G commuteren m.a.w:

$$\text{Centrum}(G) = \{ z \in G \mid z * g = g * z, \forall g \in G \}$$



Een viertal eigenschappen:

1. $z \in \text{Centrum}(G) \Leftrightarrow \forall g \in G\ [g * z * g^{-1} = z]$
2. $\forall G\ [Id \in \text{Centrum}(G)]$
3. $\text{Centrum}(G) = G \Leftrightarrow G$ is commutatief
4. Centrum (Rubik) = {Id, Superflip}

Superflip = de operatie die elk randblokje op zijn eigen plaats draait

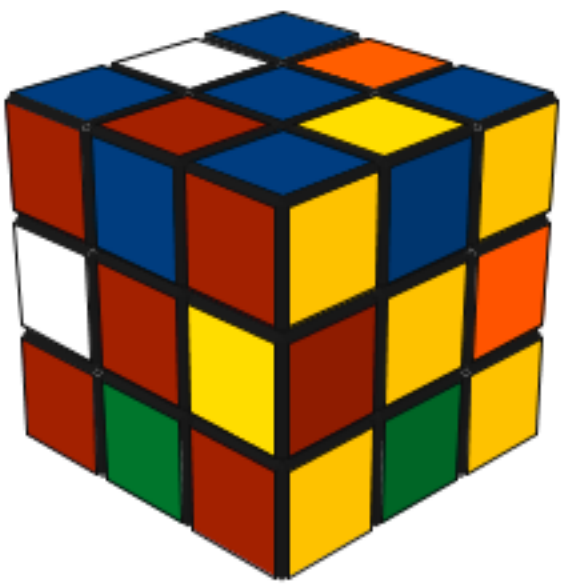
$RLU^2FU'DF^2R^2B^2LU^2F'B'UR^2DF^2UR^2U$

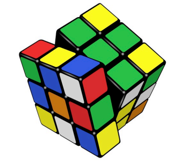
Diameter van de groep (GOD's Number)

- Diameter is de langste afstand die je (in kwartslagen/halve slagen gerekend) eventueel af zou moeten leggen als je altijd de kortste weg zou weten"

Ofwel zoals een alwetende god het zou doen….

- 1981
  - David Singmaster, ondergrens 18 (kwartslagen)
  - Morwen Thistlethwaite, bovengrens 45
- 2010
  - Diameter = 20!
  - Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge
  - Een van de 300 miljoen standen die minstents 20 slagen kost is de superflip:
  - Zou er een verband zijn tussen centrum van een groep en standen op diameterafstand??






Een oplossingsmethode

Voor wie niet alles zelf wil verzinnen

Bedenk: Elk blokje heeft vaste plaats tussen de centra

Kies eerste kleur bijvoorbeeld wit

- Eerste, witte laag
- Tweede laag
- Derde laag: Hoeken verwisselen
- Derde laag: Hoeken draaien
- Derde laag: Randen verwisselen
- Derde laag: Randen draaien

De eerste laag

Vooraf:

elk randblokje en elk hoekblokje heeft zijn eigen plekje tussen de centra. Op dat plekje komen de kleuren precies overeen met de aangrenzende centra. De methode zoekt één voor één van een blokje het juiste plekje op en zet dat blokje op dat plekje.
Soms moet je daarvoor even 1 of meer blokjes die je al goed had verplaatsen en dan weer terugzetten tegelijk met het extra blokje waar je mee bezig bent.

Wit boven houden

Eerst randblokjes 1 voor 1

op de goede plaats, in de juiste orientatie, op het juiste plekje

Nu wit onder houden

Dan hoeken van bovenlaag naar benedenlaag brengen

op de goede plaats, in de juiste orientatie, op het juiste plekje

Roteer de kubus totdat het plekje waar het blokje naar toe moet (het ‘gat’) rechtsonder aan de voorkant zit. Draai het bovenvlak zodat het hoekblokje op een van onderstaande manieren zit:

- wit aan de zijkant, linksvoor: RU’R’
- wit aan de zijkant, rechtsachter: F’UF
- wit boven, rechtsvoor: RU’R’ U F’UF

Kijk hoe er steeds een randblokje evenuit het ondervlak omhoog komt om daarna samen met het hoekblokje weer naar hun plekje toe te gaan.

De middelste laag

Wit onder houden

Maar 4 middenblokjes, zet ze 1 voor 1 goed op de juiste plaats in de juiste orientatie

Roteer de kubus zodat het gat rechtsmidden zit en draai het bovenvlak zodat het middenblokje op een van de onderstaande manieren zit :

- De voorkleur boven, middenachter: F’UF U RU’R’
- De voorkleur opzij, links: RUR’ U’ F’UF

Eventuele Optimalisatie (eerste en middelste laag samen):

Doe voor je de hoeken van de eerste laag goed zet,

- eerst de eerste 3 blokjes van de middenlaag,
- dan is er een gootje ontstaan waardoor je 1 voor 1 de hoeken van de eerste laag kunt plaatsen, zoals eerder beschreven

  je moet wel steeds door aan het ondervlak te draaien de juiste plaats onder het gootje brengen
- vervolgens doe je alleen het vierde middenblokje zoals boven beschreven

De laatste laag… Hoeken

Hoeken verwisselen

L’URU’LUR’ ⟶ $(A^-, C, D^-, B^-,)$

RUR’URU²R’ ⟶ $(A^+, C^+)(B^+, D)$

A	a	B
d		b
D	c	C

↓

$(A^-, C, D^-, B^-,)\ (A^+, C^+)(B^+, D) = A\ D\ (B, C)$

Dus

L’URU’LUR’ RUR’ URU²R’ ⟶ (B,C)

A	a	C
d		b
D	c	B

Ofwel (R’R annihilatie en met effect op randen erbij)

L’URU’LU²R’URU²R’ ⟶ (B,C) (b,c)

De laatste laag… Hoeken

Hoeken draaien

A	a	B
d		b
D	c	C

$RUR'URU^2R' \longrightarrow (A^+,C^+)(B^+,D)$

Gespiegelde daarvan is

$L'U'LUL'U^2L \longrightarrow (A^-,C)(B^-,D^-)$

$(A^+,C^+)(B^+,D)\ (A^-,C)(B^-,D^-) = A^+D^-$

Dus

$RUR'URU^2R' \quad L'U'LUL'U^2L \longrightarrow A^+D^-$

De twee hoeken draaien. Aan de randen verandert hierbij niets.

A+	a	B
d		b
D-	c	C

De laatste laag… Randen

Randen verwisselen 2 aan 2

??? $\longrightarrow$ (a,c)(b,d)

A	a	B
d		b
D	c	C

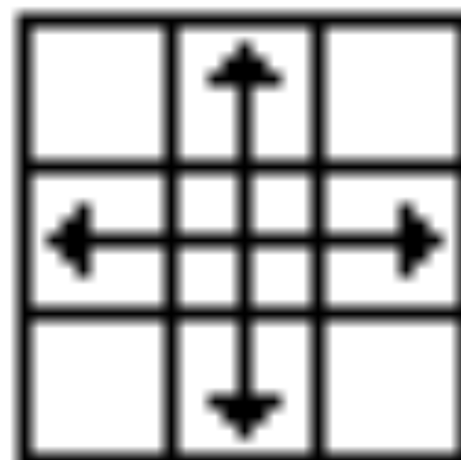
Singmaster greep

$L^2U^2\,L^2U^2\,L^2U^2$ $\longrightarrow$ (a,c)(lb,lf)

lb = left-back, lf = left-front

Conjugeren:

$(BF'U)\ L^2U^2L^2U^2L^2U^2\ (BF'U)^{-1}$ $\longrightarrow$ (a,c)(b,d)



Dus

$BF'U\ \ L^2U^2L^2U^2L^2U^2\ \ U'FB'$ $\longrightarrow$ (a,c)(b,d)

Ofwel

$BF'U\ \ L^2U^2L^2U^2L^2\ \ U\ \ FB'$ $\longrightarrow$ (a,c)(b,d)

De laatste laag… Randen

Randen verwisselen 3-cykel

??? $\longrightarrow$ (a,b,c)

Small slicer

$U^2 LR' F^2 L'R \longrightarrow$ (a,df,c)

df = down-front

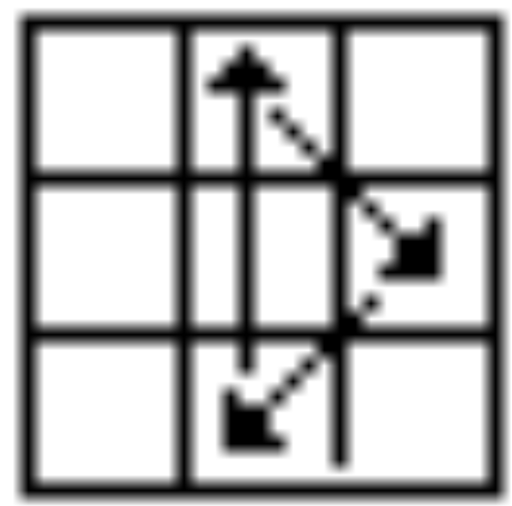
A	a	B
d		b
D	c	C

Conjugeren:

$(R^2D')\ U^2 LR'F^2 L'R\ (R^2D')^{-1} = (a,b,c)$

Dus

$R^2D'\ U^2 LR' F^2 L'R\ DR^2 \longrightarrow$ (a,b,c)



(a,b,c) roteren geeft (b,c,d)

(a,b,c)(b,c,d) = (a,c)(b,d)

Etcetera….

De laatste laag… Randen

A	a	B
d		b
D	c	C

Randen draaien

??? → a^+b^+

Slicing around

RL’ B RL’ D RL’ F^2 R’L D R’L B R’L U^2 → a^+c^+

Lijkt moeilijk maar als je na de eerste 3 slices elke keer de kubus zo draait dat achter boven wordt (+) en bij de tweede 3 slices de kubus elke keer zo draait dat boven weer achter wordt (-) dan wordt de serie eenvoudig:

RL’ + URL’ + URL’ + U^2R’ L - UR’ L - UR’ L - U^2 → a^+c^+

Conjugeren:

(R’F’) RL’ B RL’ D RL’ F^2 R’L D R’L B R’L U^2 $(R’F’)^{-1}$ → a^+b^+

Een ander voorbeeld met meer slicing:

bestudeer R’L B R’L D R’L F RL’ U

U^2 en weer R’L B R’L D R’L F RL’ U → $a^+b^+c^+d^+$

Meer lezen?

Wiskunde:

- Boek. De magische kubus van Rubik. Jan van de Craats
- Boek. Handbook of Cubik Math. Alexander H. Frey, Jr. and David Singmaster
- Boek. Adventures in Group Theory. David Joyner
- mathworld.wolfram.com/RubiksCube.html

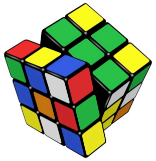
Wiskunde + spelen:

- hedgehog.math.arizona.edu/~reid/Rubik/
- cff.helm.lu Cubism For Fun (Nederlandse Kubus Club)

Spelen:

- www.speedcubing.com (op deze site staat ook een oplosmethode)
- www.rubiks.com

Opgaven 1 en 2



Opgave 1. Slices (slide 10)

Draai RL’, doe dat in totaal vier keer achter elkaar. Als het goed is, heb je nu weer de originele stand bereikt met dezelfde kleur voor.

Opgave 2. Werken met Slices (slide 11)

1. Maak de figuur zoals in de slide beschreven. Houd de kubus in dezelfde stand tijdens het draaien. Onthoud welke centrumkleur je voor en welke je boven hebt zitten.

2. Probeer met alleen slices ook andere mooie figuren te vinden.

3. Combineer slices met halve slagen alsvolgt: $F^2RL'U^2R'L$. Bestudeer het resultaat. Doe $L'RU^2LR'F^2$ om het weer terug te zetten. Hoe zou je dit nuttig kunnen zijn om de kubus later op te kunnen oplossen?

Opgaven 3 en 4

Opgave 3. Inverse (slide 12)

1. Voer drie willekeurige draaiingen uit en voer daarna de inverse uit (dezelfde reeks draaiingen de andere kant op in omgekeerde volgorde).

2. Schrijf de reeks op in de notatie en schrijf ook de inverse op.

3. Voer daarna de complete operatie en de inverse nog eens uit terwijl je de draaiingen afleest van de notatie.

Opgave 4. Orde van een element (slide 13)

1. Bepaal de orde van L^2U^2 door dit net zo lang te herhalen tot je weer bij de beginstand bent. Bekijk of je toevallig onderweg een stand tegenkomt waarbij maar relatief weinig veranderd is.

2. De operatie kan handig uitgevoerd worden door hem in de Singmaster greep te doen: pak de middelste randblokjes van L met duim en wijsvinger van je linkerhand en die van U met duim en wijsvinger van je rechterhand vast. Je kunt dan de hele operatie draaien zonder de kubus los te laten. Probeer dat uit.

Opgave 5

Opgave 5. Commuteren (slide 14)

Bekijk het effect van de commutator RUR’U’. Let op wat er is veranderd en in welke vlakken. Met behulp van commutatoren kun je zelf combinaties verzinnen die maar een klein effect op de kubus hebben.

Zulke minimale combinaties kun je goed gebruiken als je laag voor laag aan een oplossing werkt en er al een deel van de kubus goed zit en je wilt meer goed krijgen zonder iets te veranderen aan wat al goed zit.

Opgave 6

Opgave 6 Conjugeren (slide 15)

1. Voer het gegeven voorbeeld in de slide (over het conjugeren van $(L^2U^2)^3$ uit.

2. Probeer het ook met twee aan twee de tegenoverliggende randblokjes in het bovenvlak.
   Bedenk eerst de conjugatieoperatie (dat kan in drie slagen, hint: draai de voor-achter blokjes naar het linkervlak en draai de links-rechts blokjes zodat ze voor-achter zitten).
   Schrijf die conjugatieoperatie op, voer die conjugatieoperatie uit, voer de basis operatie uit en doe de inverse van de conjugatieoperatie.
   Je loopt hierbij weer het risico door een verkeerde slag de kubus door elkaar te krijgen. Houd de kubus dus altijd in de zelfde stand (onthoud welke centrumkleur je voor en welke je boven houdt. Probeer de conjugatieoperatie en diens inverse eerst een paar keer uit (schrijf ze eventueel ook allebei op).

3. (voor gevorderden) Een lastige conjugatie is die waarbij de blokjes gedraaid gezet worden. Het effect is dan dat ze niet alleen verwisseld maar ook gedraaid woden. Conjugeer bijvoorbeeld $(L^2U^2)^3$ door $B^2DU'LUF'U$. Bestudeer het resultaat van $B^2DU'LUF'U\,(L^2U^2)^3\,(B^2DU'LUF'U)^{-1}$ = van $B^2DU'LUF'U\,(L^2U^2)^3\,U'FU'L'UD'B^2$ op het bovenvlak.

Opgave 7, 8 en 9

Opgave 7 Combineren (slide 17)

1. Probeer de in de slide aangegeven combinatie uit.
2. (voor gevorderden) Probeer zelf een nieuwe combinatie te verzinnen.

Opgave 8. Centrum (slide 19)

(theoretische opgave) Toon aan dat de superflip inderdaad aan de definitie van centrum van de groep voldoet.

Opgave 9. Los de kubus op (slide 21)

1. Gebruik de methoden van de slides vanaf slide 21 om de kubus op te lossen.
2. Herhaal dit net zo lang totdat je het kunt zonder de slides.
3. (voor gevorderden) Probeer varianten te verzinnen van de methode door snellere combinaties te verzinnen voor veel voorkomende gevallen of door de methode aan te passen.

Opgave 10

Opgave 10 Speed Cubing (slide 29).

(voor snelle vergevorderden)

1. Bestudeer alle tips op speedcubing.com,
2. Doe mee aan speedcubing wedstrijden
3. Probeer de nieuwe speedcubing kampioen te worden…..