

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot D\mu$$

$$D(X) = \{ \varphi \mid \varphi: X \rightarrow [0,1], \sum \varphi(x_i) \leq 1 \}$$

supp(φ) is finite

Representation convention $\varphi \in D(X)$

$$\sum_I r_i x_i \quad \text{where } r_i = \varphi(x_i)$$

$I = \text{supp}(\varphi)$

we represent every distribution as a formal sum. Then,

$$\mu\left(\sum_I r_i \left(\sum_J r_{ij} x_{ij}\right)\right) = \sum_{I,J} (r_i r_{ij}) x_{ij}$$

$$\begin{array}{ccc} D^3(X) & \xrightarrow{D\mu} & D^2(X) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ D^2(X) & \xrightarrow{\mu} & D(X) \end{array}$$

Let's take something in $D^3(X)$.

$$\mu \cdot \mu \left(\sum_I r_i \sum_J r_{ij} \sum_K r_{ijk} x_{ijk} \right)$$

$$= \mu \left(\sum_{I,J} r_i r_{ij} \left(\sum_K r_{ijk} x_{ijk} \right) \right)$$

$$= \sum_{I,J,K} (r_i r_{ij} r_{ijk}) x_{ijk}$$

$$\mu \cdot D\mu \left(\sum_I r_i \sum_J r_{ij} \sum_K r_{ijk} x_{ijk} \right)$$

$$= \mu \left(\sum_I r_i \mu \left(\sum_J r_{ij} \sum_K r_{ijk} x_{ijk} \right) \right)$$

$$= \mu \left(\sum_I r_i \sum_{J,K} (r_{ij} r_{ijk}) x_{ijk} \right) = \sum_{I,J,K} (r_i r_{ij} r_{ijk}) x_{ijk}$$