

STOOMCURSUS "COMPLEXE GETALLEN" - DCVL-2004

3. COMPLEXE GETALLEN EN COMPLEXE FUNCTIES

(3.1) Zoals we al eerder hebben opgemerkt bezit het stelsel der reële getallen nog niet alle eigenschappen die we nodig zullen hebben: zo is in veel gevallen de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ in de reële getallen onoplosbaar (namelijk als de discriminant negatief is), wat als gevolg heeft dat dan de kwadratische vorm $ax^2 + bx + c$ niet te ontbinden is in lineaire factoren. Deze moeilijkheid is op te heffen door invoering van het stelsel der complexe getallen.

Het stelsel der complexe getallen \mathbb{C} wordt gevormd door alle uitdrukkingen van de vorm $a + bi$ (ook geschreven als $a + ib$) waarin a en b reële getallen zijn; in \mathbb{C} zijn een optelling en een vermenigvuldiging gedefinieerd door:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i, \end{aligned}$$

dat wil zeggen: men rekent op de 'gewone' wijze met letters en vervangt vervolgens i^2 door -1 .

Door $b = 0$ te nemen, en voor $a + 0i$ kortweg a te schrijven, zien we dat \mathbb{C} het stelsel der reële getallen, voortaan aan te geven met \mathbb{R} , bevat; de op \mathbb{R} geïnduceerde optelling en vermenigvuldiging vallen samen met de hier reeds bekende. Voor $0 + bi$ schrijven we kortweg bi (getallen van deze vorm heten zuiver *imaginair*). Merk op dat met deze notaties het teken '+' in ' $a + bi$ ' als optelling geïnterpreteerd kan worden: $a + bi$ is volgens (3.2) de som van de complexe getallen $a = a + 0i$ en $bi = 0 + bi$. Vergelijk met (3.24).

(3.4) Uit (3.3) volgt dat in \mathbb{C} fatisoentlijke rekenregels gelden: voor complexe getallen α, β, γ geldt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha, & \alpha\beta &= \beta\alpha, \\ \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma, & \alpha(\beta\gamma) &= (\alpha\beta)\gamma, \\ (\alpha + \beta)\gamma &= \alpha\gamma + \beta\gamma; \end{aligned}$$

vergelijk met (2.2). *Echter bestaat in \mathbb{C} geen ongelijkheidsrelatie*, $<$; die aan de rekenregels (2.3) voldoet: zou er zo'n relatie bestaan, dan zou gelden $i > 0$ of $i < 0$. Uit $i > 0$ zou volgen $i^2 > 0$, dus $-1 > 0$; hieruit zou weer volgen $(-1)^2 > 0$, $1 > 0$, dus $0 = 1 + (-1) > 0$, hetgeen een tegenspraak is. Evenzo leidt de aanname $i < 0$ tot een tegenspraak.

(3.5) In \mathbb{C} zijn de aftrekking en de deling, mits niet door 0, onbeperkt mogelijk: stel $\alpha = a + bi$ en $\beta = c + di$. Dan is $\alpha - \beta = \gamma$ met $\gamma = (a - c) + (b - d)i$, immers volgens

(3.3) is $\beta + \gamma = \alpha$; verder is dan $\alpha/\beta = \delta$ met

$$\delta = \frac{ac + bdi}{c^2 + d^2} + \frac{bc - adi}{c^2 + d^2}i \quad (\text{mits } c^2 + d^2 \neq 0, \text{ dus } \beta \neq 0),$$

immers volgens (3.3) is $\alpha = \beta\delta$.

Het quotiënt α/β is gemakkelijk te berekenen door te schrijven

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Merk op dat $(c + di)(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 + d^2$.

(3.6)

Zijn a en b reëel, dan is $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$. Hieruit volgt dat iedere kwadratische vorm $ax^2 + bx + c$ (a, b, c reëel) te schrijven is als $a(x - \alpha)(x - \beta)$, waarin α en β complex zijn:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right],$$

met $D = b^2 - 4ac$: is nu $D < 0$, dan schrijven we:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i}{2a} \sqrt{-D} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i}{2a} \sqrt{-D} \right).$$

Tevens zien we: is $D < 0$, dan heeft de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ twee complexe wortels:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b \pm i \sqrt{-D}).$$

Opmmerking. Het is verleidelijk om te schrijven: $\sqrt{-1} = i$. Immers: $i^2 = -1$. Maar ook $(-i)^2 = -1$, en onderscheid maken tussen i en $-i$ op grond van hun teken (zoals dat in \mathbb{R} gebeurt) is in \mathbb{C} volgens (3.2) niet mogelijk. Zie echter (3.55).

(3.7) Onder \mathbb{R}^2 verstaan we de verzameling van alle geordende paren reële getallen (x, y) ; we definiëren een optelling in \mathbb{R}^2 door

$$(3.8) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

en een vermenigvuldiging met reële getallen ('vermenigvuldiging met een scalar') door

$$(3.9) \quad a(x, y) = (ax, ay).$$

We geven $(0, 0)$ kortweg aan met 0 ; merk op dat $p + 0 = p$ voor alle $p \in \mathbb{R}^2$. Aanschouwelijk: \mathbb{R}^2 is de verzameling punten van het platte vlak, voorzien van coördinaten ten opzichte van een assenstelsel dat we in het vervolg steeds rechthoekig

zullen nemen. Optellen van punten gaat zo: stel $p \in \mathbb{R}^2$, $q \in \mathbb{R}^2$; teken pijlen ('vectoren') vanuit 0 met eindpunten p en q ; dan heeft de resultante van deze pijlen als eindpunt $p+q$. Vermenigvuldiging met een scalar a : vergroot de pijl vanuit 0 met eindpunt p a maal (is $a < 0$, dan is het resultaat een pijl waarvan de richting tegengesteld is aan die van de oorspronkelijke); het eindpunt van de nieuwe pijl is ap . De aftrekking volgt uit $p-q = p + (-q)$.

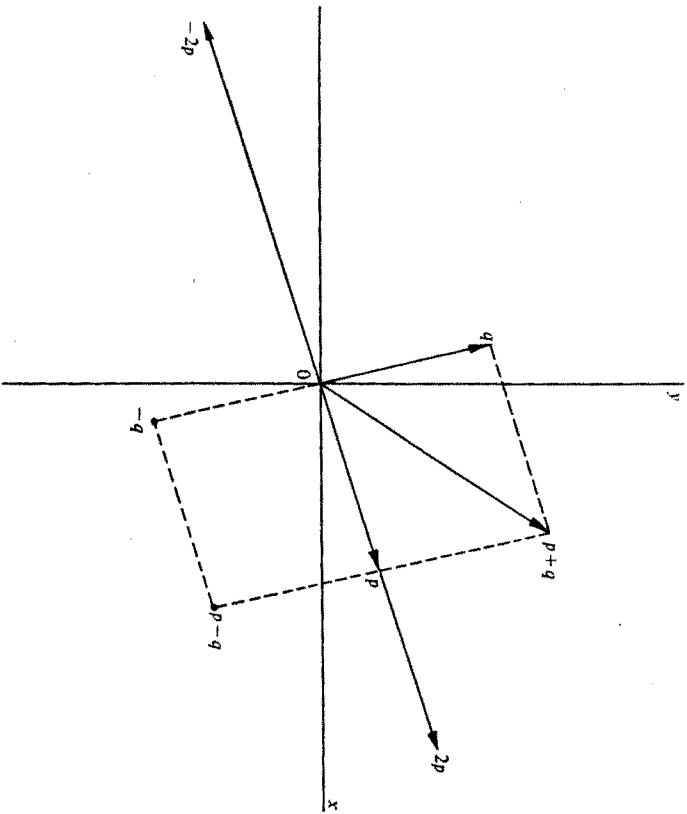


Fig. 8

(3.10) In het vervolg zullen we ons veel met \mathbb{R}^2 bezig houden. Op dit moment gebruiken we \mathbb{R}^2 om een aanschouwelijk beeld van \mathbb{C} te krijgen: zoals we aan elk reëel getal een punt op de 'reële rechte' toevoegen, voegen we nu aan elk complex getal $\alpha = a+bi$ toe het punt (a, b) in \mathbb{R}^2 (het 'beeldpunt van α '); deze toevoeging is $1-1$ (dat wil zeggen: elke $p \in \mathbb{R}^2$ is beeldpunt van precies één $\alpha \in \mathbb{C}$). Met optellen in \mathbb{C} (volgens (3.3)) correspondeert optellen in \mathbb{R}^2 : $0 \in \mathbb{C}$ correspondeert met $0 \in \mathbb{R}^2$, reële getallen in \mathbb{C} corresponderen met punten op de x-as (die we nu de 'reële as' noemen).

zuiver imaginaire met punten op de y-as ('imaginaire as'). 1 correspondeert met $(1, 0)$, i met $(0, 1)$.

We zullen meestal spreken van 'het punt α ' in plaats van 'het beeldpunt van α '.

(3.11) We voeren in \mathbb{R}^2 ook nog *poolcoördinaten* r, φ in: elk punt p is bepaald door de lengte r van de pijl van 0 naar p en de hoek φ die deze pijl met de positieve x-as maakt (φ is bepaald op gehele veelvoud van 2π na); is $p = (x, y)$, dan geldt:

$$(3.12) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{en} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \sin \varphi = y/r, \quad \cos \varphi = x/r.$$

(3.13) Het beeldpunt van $a+bi$ is (a, b) ; dus kunnen we schrijven:

$\alpha = a+bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ met $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$. We kiezen φ voortaan zo dat $-\pi < \varphi \leq \pi$. Deze φ heet het *argument* van α ($\arg \alpha$); φ is bepaald door $\sin \varphi = b(a^2 + b^2)^{-1/2}$, $\cos \varphi = a(a^2 + b^2)^{-1/2}$. Merk op dat het argument van 0 niet gedefinieerd is. We noemen $(a^2 + b^2)^{1/2} = |\alpha|$ de *modulus* van α ; de modulus valt op \mathbb{R} samen met de daar reeds bekende. Verder voeren we nog de volgende notaties in: $\text{Re } \alpha = a$ ('reële deel van α ') en $\text{Im } \alpha = b$ ('imaginaire deel van α ', is echter reëel!). Blijkbaar berekent $\alpha = 0$: $\text{Re } \alpha = 0$ en $\text{Im } \alpha = 0$.

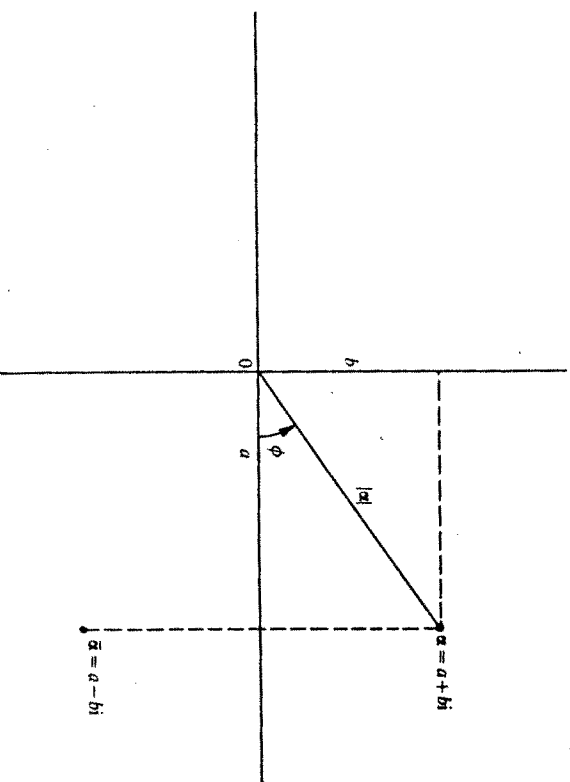


Fig. 9

(3.14) De complex geconjugeerde van $\alpha = a + bi$ is $a - bi$, aangegeven met $\bar{\alpha}$. Merk op: de wortels van $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c reëel) zijn óf reëel óf elkaars complex geconjugeerde (zie (3.6)). De beeldpunten van α en $\bar{\alpha}$ liggen in \mathbb{R}^2 symmetrisch ten opzichte van de reële as.

(3.15) $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ (en dus is het produkt $\alpha\bar{\alpha}$ reëel). Immers: $\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Men rekent eenvoudig na:

(3.16) $|\operatorname{Re} \alpha| \leq |\alpha|, |\operatorname{Im} \alpha| \leq |\alpha|.$

(3.17) $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}), \operatorname{Im} \alpha = -\frac{1}{2}i(\alpha - \bar{\alpha}).$

(3.18) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}, \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$

Interpreteer meekundig!

Vit (3.15) volgt $|\alpha\beta|^2 = \overline{\alpha\beta} \cdot \alpha\beta = |\alpha|^2 |\beta|^2$, dus:

(3.19) $|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|$; analoog: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$

(3.20) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, de 'driehoeksongelijkheid' (vergelijk met (2.4)); meekundige interpretatie: een zijde van een driehoek is niet groter dan de som van de beide andere. We rekenen nog even na:

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + 2 \operatorname{Re} \alpha\bar{\beta} + |\beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\bar{\beta}| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2,$$

dus $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$

Vit (3.20) leidt men nog af dat $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$; interpreteer ook deze formule meekundig.

(3.21) Om de vermenigvuldiging voor complexe getallen in \mathbb{R}^2 te interpreteren schrijven we

$$\alpha = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad \beta = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2);$$

dan blijkt dat $\alpha\beta = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, en dus $|\alpha\beta| = r_1 r_2 = |\alpha| |\beta|$ (in overeenstemming met (3.19)) en $\arg \alpha\beta = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi} = \arg \alpha + \arg \beta \pmod{2\pi}$; hierbij betekent 'mod 2π ' ('modulo 2π '): op een geheel veelvoud van 2π na. We dienen dus de 'pijl' β (= de pijl van 0 naar het beeldpunt van β) te draaien over een hoek φ_1 (in positieve zin, d.w.z. volgens een draaizijn tegengesteld aan die van de wijzers van de klok) en zijn lengte te vermenigvuldigen met $|\alpha|$. Anders gezegd: we moeten het punt $p (= \alpha\beta)$ zó bepalen dat de driehoek $0\alpha p$ gelijkvormig wordt met de driehoek $0\beta p$ (zie fig. 11)

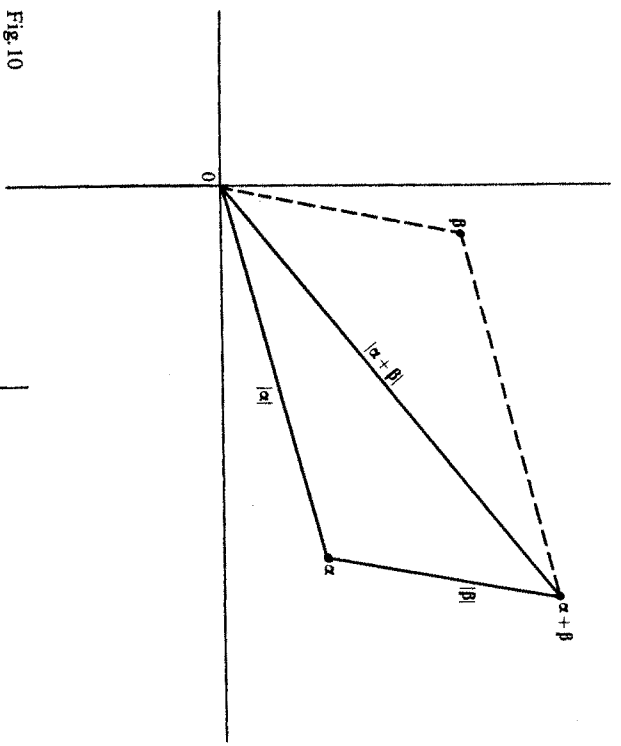


Fig. 10

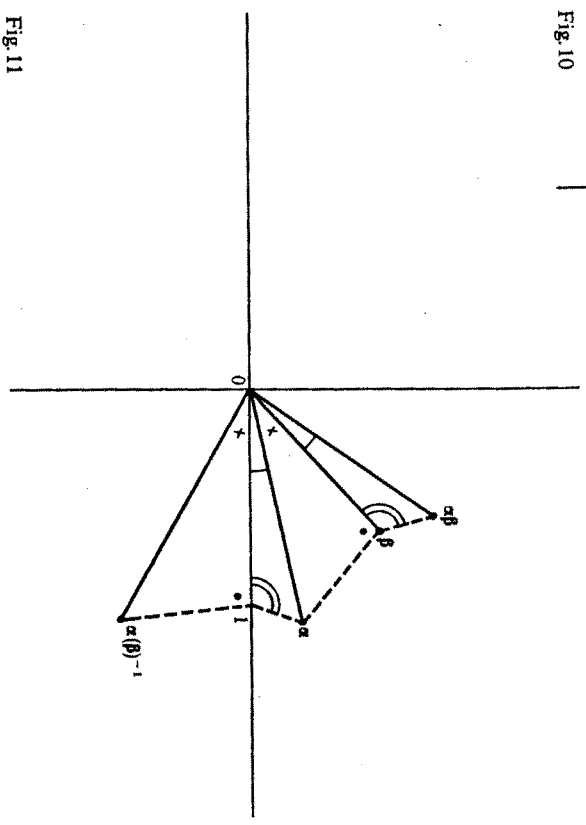


Fig. 11

- (3.22) *Voorbeelden.* Vermenigvuldigen met i betekent: draaien over $\frac{1}{2}\pi$. We lopen in \mathbb{R}^2 vanuit het punt α een afstand c in een richting loodrecht op de pijl α . In welk punt komen we terecht? Stel in \mathbb{Z} . De pijl $z - \alpha$ krijgen we uit de pijl α door draaiing over $\pm \frac{1}{2}\pi$ en (scalair) vermenigvuldiging met $c/|\alpha|$, dus door complexe vermenigvuldiging met $(c/|\alpha|)[\cos(\pm \frac{1}{2}\pi) + i \sin(\pm \frac{1}{2}\pi)] = \pm ic/|\alpha|$, waaruit volgt:

$$z = \alpha \left(1 \pm \frac{c}{|\alpha|} i \right).$$

- (3.23) De deling verloopt analoog: uit $\alpha = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ volgt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dus: de moduli moeten op elkaar gedeeld worden, en de argumenten trekken we af, dat wil zeggen:

$$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta \pmod{2\pi}.$$

Meerkundige beschouwingen: als in (3.21).

- (3.24) \mathbb{R}^2 met daarin een optelling en een vermenigvuldiging als boven beschreven noemen we het *complexe vlak*; we geven dit meestal ook met \mathbb{C} aan, en we identificeren het getal $\alpha = a + bi$, het punt $\alpha = (a, b)$ en de 'pijl α ' met elkaar.

Het is nu duidelijk hoe we het stelsel \mathbb{C} kunnen construeren, uitgaande van \mathbb{R} : definieer \mathbb{C} als te bestaan uit alle geordende paren reële getallen (a, b) , met optelling

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

en vermenigvuldiging

$$(a, b) (c, d) = (ac - bd, ad + bc);$$

schrijf $(1, 0) = 1$, $(a, 0) = a$, $(0, 1) = i$, $(0, b) = bi$, dan geldt:

$$(a, b) = a + bi \text{ en } i^2 = -1, \text{ enz.}$$

- (3.25) *Is* $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ *een polynoom met reële coëfficiënten, en is α een wortel van* $P(z) = 0$, *dan is $\bar{\alpha}$ dat ook.*

Immers uit $a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n = 0$ volgt:

$$a_0 + a_1 \bar{\alpha} + \dots + a_n \bar{\alpha}^n = \overline{a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n} = \overline{0} = 0$$

- (3.26) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ (de Moivre).

Bewijs: door volledige inductie; interpreteer in het complexe vlak.

In het vervolg zullen we beschouwen functies f , gedefinieerd op \mathbb{C} of een deel daarvan, en met waarden in \mathbb{C} ; kortweg: complexe functies (van een complexe veranderlijke), of ook: functies $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Voor deze functies worden de begrippen 'limiet', 'continuïteit' en 'differentieerbaarheid' gedefinieerd als voor reële functies; we geven nog even de precieze definities (die ook gelden voor het reële geval):

- (3.27) *Definitie:* $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$ *betekent: bij elke $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zó dat voor alle z met $0 < |z - \alpha| < \delta$ geldt: $|f(z) - \beta| < \varepsilon$.*

- (3.28) *Definitie:* f *heeft continuïteit in α als $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$.*

- (3.29) *Definitie:* f *heeft differentieerbaar in α als*

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$$

bestaat; de eventueel gedefinieerde functie f' heet de *afgeleide* van f .

- (3.30) *Een differentieerbare f is continu; dit volgt uit*

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} + f(\alpha) \right).$$

Evenals in het reële geval is het omgekeerde niet waar.

Beschouw bijvoorbeeld $f(z) = \bar{z}$ in 0 : $z^{-1} f(z) = z^{-1} \bar{z} = (x - iy)(x + iy)^{-1}$; op de reële as is dus $z^{-1} f(z) = 1$, op de imaginare as is echter $z^{-1} f(z) = -1$, zodat $f'(0)$ niet bestaat. Men rekent gemakkelijk na dat f wel continu is in 0 .

- (3.31) *Als in het reële geval gelden de gewone rekenregels voor limieten en voor het differentieren (som-, produkt- en quotiëntregels); men kan deze als voor het reële geval bewijzen. We hebben dus:*

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f' \quad (\alpha \text{ constant})$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

In het bijzonder geldt dat elke rationale functie (quotient van twee polynomen) differentieerbaar (en dus continu) is overal waar hij gedefinieerd is; de afgeleide bepaalt men met behulp van de zojuist genoemde regels, als in het reële geval.

(3.32)

Er geldt een analogon van (2.19): is $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar in α , met $f'(\alpha) \neq 0$, dan is f in α lokaal een (complex) vermenigvuldiging met factor $f'(\alpha)$; voor kleine h (dat wil zeggen: h met kleine modulus; we blijven dus binnen een klein cirkelschijfje met middelpunt α) is $f(\alpha+h) - f(\alpha)$ bij benadering gelijk aan $f'(\alpha)h$, en dus worden kleine lijnstukjes met eindpunt α bij benadering afgebeeld op kleine lijnstukjes met eindpunt $f(\alpha)$ die $|f'(\alpha)|$ keer zo groot zijn en een hoek $\arg f'(\alpha)$ met de oorspronkelijke maken.

In het bijzonder geldt dat de hoek tussen twee door α gaande krommen (= hoek tussen hun raaklijnen in α) gelijk is aan de hoek tussen hun (door $f(\alpha)$ gaande) beelden; men zegt wel dat f een *conforme afbeelding* van \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 bepaalt. Orthogonale stelsels krommen gaan over in orthogonale stelsels. Als afbeelding van \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 beschouwd is een differentieerbare $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dus lokaal bij benadering een gelijkvormigheidstransformatie met gelijkvormigheidsfactor $|f'(\alpha)|$.

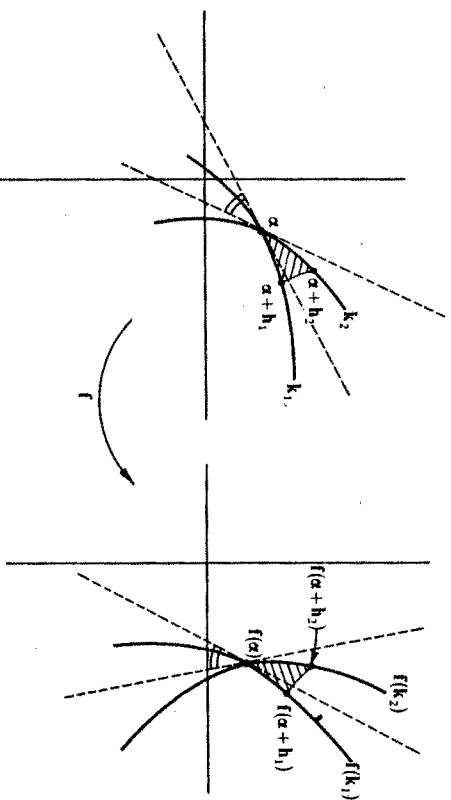


Fig. 12

(3.33)

Op grond van (3.32) kan men vermoeden: is f differentieerbaar en is $f'(\alpha) \neq 0$, dan bezit f lokaal een (differentieerbare) inverse: er is een omgeving van α die 1-1

door f wordt afgebeeld (hierbij is een omgeving van α een cirkelschijfje met α als middelpunt). Dit vermoeden kan inderdaad bewezen worden.

(3.34)

Het analogon van (2.21) is: Is f differentieerbaar in α terwijl $f'(\alpha) \neq 0$, en is g (lokaal) de inverse van f , dan is g differentieerbaar in $\beta = f(\alpha)$, en

$$g'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

(3.35)

Het analogon van (2.22) is: Is $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar in α , en is $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar in $f(\alpha)$, dan is $g \circ f$ differentieerbaar in α , terwijl

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha).$$

Aanschouwelijk is dat duidelijk: $g \circ f$ is in α lokaal een complexe vermenigvuldiging met factor $f'(\alpha) \cdot g'(f(\alpha))$; vergelijk met (2.22). We kunnen (3.34) en (3.35) bewijzen met behulp van definitie (3.29).

(3.36)

Voor de collectie van alle primitieve functies van $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is men gewoon de notatie

$$\int f(z) dz$$

te gebruiken. Dus

$$\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{z} + \gamma, \quad \int \frac{z^2+1}{z^5} dz = -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} + \gamma,$$

enz.; hierin is γ een willekeurige (complexe) constante. Hierbij gebruiken we: als f en g op een rechtehoek B differentieerbaar zijn, en $f' = g'$, dan is er een constante γ zó dat $f(z) = g(z) + \gamma$ voor alle $z \in B$. We komen hierop later terug.

(3.37)

Soms zullen we functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (complexe functies van een reële veranderlijke) gebruiken. Zo'n functie is te schrijven als $f(x) = g(x) + ih(x)$, waarin g en h reële functies zijn. De definities (3.27), (3.28) en (3.29) zijn ook hier van toepassing indien we, waar nodig, complexe door reële veranderlijken vervangen. Is $\alpha = a + bi$, dan gelden de ongelijkheden

$$\begin{aligned} |f(x) - \alpha| &\leq |g(x) - a| + |h(x) - b| \\ |g(x) - a| &= |\operatorname{Re}[f(x) - \alpha]| \leq |f(x) - \alpha| \\ |h(x) - b| &\leq |f(x) - \alpha| \end{aligned}$$

(zie (3.20) en (3.16)), en dus volgen de eigenschappen van $g + ih$ direct uit die van g en h :

(3.38)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \alpha \text{ is equivalent met } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = a \text{ en } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = b.$$

(3.39) f is continu (differentieerbaar) in e^t is equivalent met: g en h zijn continu (differentieerbaar) in e^t .

(3.40) Is $f = g + ih$ differentieerbaar, dan is $f' = g' + ih'$; zo geldt voor $f(x) = \cos x + ix^2$:
 $f'(x) = -\sin x + 2ix$.

Evenzo:

$$\int (\cos x + ix^2) dx = \sin x + \frac{1}{3}ix^3 + \gamma$$

(γ willekeurig complex).

(3.41) We beschouwen de functie $f(x) = \cos x + i \sin x$ (x reëel). Volgens (3.40) geldt:
 $f'(x) = -\sin x + i \cos x = if(x)$. De reële functie $g(x) = e^{\alpha x}$ heeft de eigenschap dat $g'(x) = \alpha g(x)$; we definiëren daarom: $e^{it} = \cos t + i \sin t$, en algemener:

(3.42) Definitie: $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

e^z gedraagt zich inderdaad als een 'macht': zo volgt uit (3.42) direct dat $e^t \cdot e^s = e^{t+s}$; merk op dat (3.26) nu kan worden geschreven als $(e^{i\varphi})^r = e^{i\varphi r}$. Verder geldt: is $f(x) = e^{\alpha x}$, dan is $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ (x reëel, $\alpha \in \mathbb{C}$). Men kan zelfs bewijzen dat de afgeleide van e^z (z complex) weer e^z is.

(3.43) $|e^{x+iy}| = e^x$, (dus $|e^{iy}| = 1$) en $\arg e^{x+iy} = y \pmod{2\pi}$.

(3.44) Als φ loopt van $-\pi$ tot π , dan doorloopt $e^{i\varphi}$ de eenheidscirkel $|z| = 1$.

In het bijzonder: $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi} = -1$, $e^{-i\pi/2} = -i$. Een parametervoorstelling van de cirkel in het complexe vlak met middelpunt α en straal r (vergelijking: $|z - \alpha| = r$) is $z = \alpha + re^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$). Het complexe getal α vermenigvuldigen met $e^{i\varphi}$ betekent: het argument van α met φ vermeerderen (de pijl α draaien over φ).

(3.45) e^z is periodiek met periode $2\pi i$, want voor gehele k is $e^{2k\pi i} = 1$.

(3.46) Ieder complex getal α is te schrijven als $re^{i\varphi}$ met $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg \alpha$. Vergelijk met (3.13). Met deze voorstelling rekent men vaak prettig; zo is, met $\beta = se^{i\psi}$: $\alpha\beta = rse^{i(\varphi+\psi)}$.

(3.47) Uit (3.42) volgt dat voor reële x geldt:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = -\frac{1}{2}i(e^{ix} - e^{-ix}).$$

We definiëren nu voor complexe z :

(3.48) Definitie: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = -\frac{1}{2}i(e^{iz} - e^{-iz})$.

Uit deze definitie volgt direct dat veel goniometrische formules geldig blijven in het complexe geval; zo is

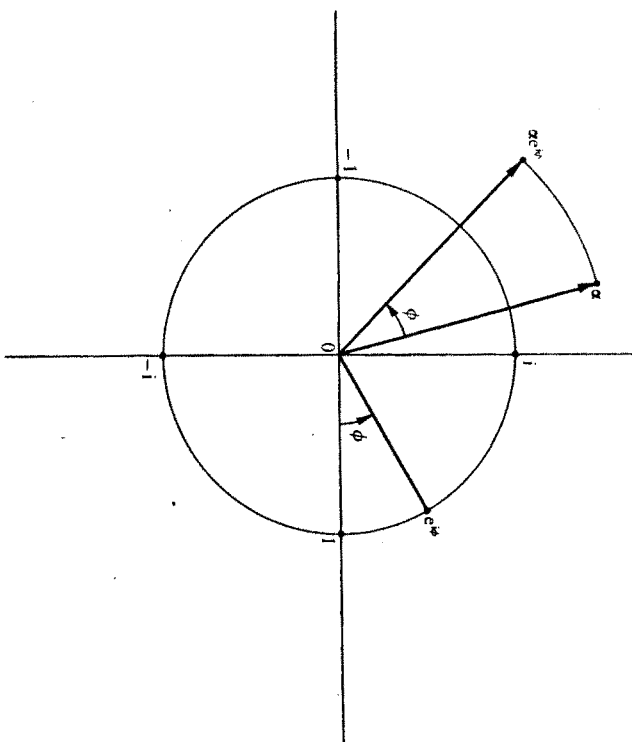


Fig. 13

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \text{ enz.}$$

Merk op dat nu niet geldt $|\sin z| \leq 1$ voor alle z ! Zo is $|\sin 10i| = \frac{1}{2}|e^{10} - e^{-10}| > 1$. Er zijn trouwens nog wel meer 'reële' formules die niet gelden voor het complexe geval; zo is

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad (x \text{ reëel}),$$

maar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) (z \text{ complex})$$

bestaat niet; bijvoorbeeld komt er voor $z = it$, $t \rightarrow 0$:

1. i.p.v. e -machten gebruiken we verder ook de uitdrukking \exp (exponentieel), dus $\exp(a) = e^a$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{t^2}\right) = \infty.$$

Analoog definiëren we de 'complexe uitbreiding' van de reëls voor het reële geval gedefinieerde hyperbolische functies:

$$(3.49) \quad \text{Definitie: } \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Er geldt $\sin iz = i \sinh z$, $\cos iz = \cosh z$; hiervan volgen weer formules als $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$. Uit (3.48) volgt nog, met $z = x + iy$: $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

Zoals men in het reële geval een functie f vaak beschrijft met behulp van een extra letter y (f beeldt dan punten van de x -as af op de y -as), schrijven we nu vaak $w = f(z)$, waarbij we twee complexe vlakken in gedachten nemen: f beeldt punten van het ' z -vlak' af in het ' w -vlak'.

(3.50) Uit (3.42) volgt: de functie $w = e^z$ beeldt de strook $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$ een-een af op het w -vlak waaruit 0 is weggelaten. De inverse functie noemen we $\log: z = \log w$. Dus $e^{\log w} = w$, en $\log e^z = z$ mits $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$. Merk op dat $\log w$ discontinu (= niet continu) is op de negatieve reële as (inclusief 0). Er geldt: $\log w$ is differentieelbaar (vergelijk (3.33)) in alle w buiten de negatieve reële as (inclusief 0); de afgeleide is $1/w$ (dit volgt uit (3.34), als in het reële geval). Op de reële as valt $\log w$ samen met de ons reeds bekende 'reële' logaritme. Is $w = re^{i\varphi}$ (met $\varphi = \arg w$, dan is $w = e^{\log r + i\varphi}$, en dus:

$$(3.51) \quad \log w = \log |w| + i \arg w.$$

(3.52) Elke strook $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k+1)\pi$ (k geheel) wordt door $w = e^z$ precies 1-1 afgebeeld in het w -vlak; de inverse is hier $z = \log w + 2k\pi i$. De (oneindig vele) oplossingen van $e^z = w$ zijn dus: $z = \log |w| + i \arg w + 2k\pi i$ (k geheel).

(3.53) Ook hier zijn sommige 'reële' rekenregels niet langer geldig voor het complexe geval: niet altijd geldt $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$; zo is $\log(-1) = \pi i$, $\log(-1)^2 = \log 1 = 0$ (wel is altijd $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i}$). Evenmin geldt altijd $\log z^n = n \log z$.

(3.54) Van de afbeelding $w = e^z$ krijgen we een 'grafische voorstelling' door van sommige stelsels krommen na te gaan wat de beelden zijn: op horizontale lijnen $y = c$ in het z -vlak geldt $\arg w = c \pmod{2\pi}$; deze lijnen worden afgebeeld op halflijnen door 0 in het w -vlak. Op verticale lijnen $x = c$ geldt $|w| = e^c$; deze lijnen worden afgebeeld op cirkels met middelpunt 0. We kunnen een en ander ook inzien door te schrijven $w = u + iv$; dan is $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, en voor $x = c$, bijvoorbeeld, is $u^2 + v^2 = e^{2c}$ (cirkel in het w -vlak met middelpunt 0 en straal e^c).

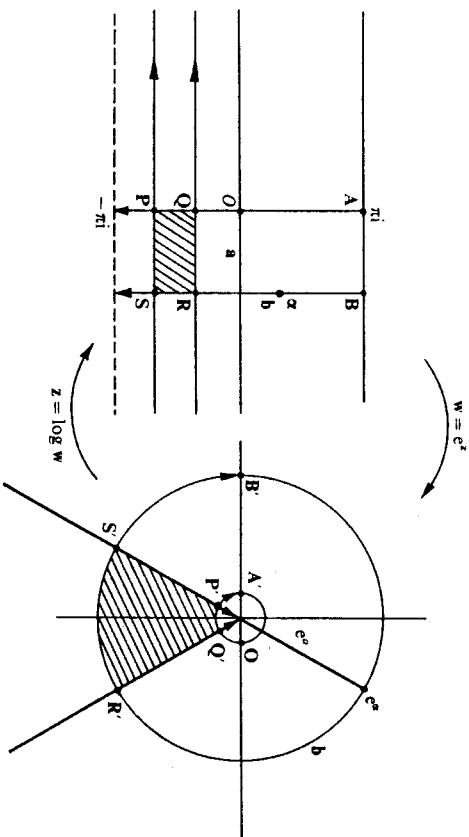


Fig. 14

Merk op dat zowel de beschouwde stelsels als hun beelden orthogonaal zijn; vergelijk met (3.32).

(3.55) Onder de afbeelding $f(z) = z^2$ hebben α en $-\alpha$ hetzelfde beeldpunt; op een deel van het z -vlak waarin niet tegelijkertijd α en $-\alpha$ liggen (voor alle $\alpha \in \mathbb{Q}$) is f 1-1. Zo'n deel is bijvoorbeeld $-\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi$ (eerste en vierde 'kwadrant'; let op de rand!). De inverse van $w = z^2$ op dit deel noemen we $z = \sqrt{w}$, zo is $\sqrt{-1} = i$ (en niet $-i$), $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\sqrt{2}$. Merk op dat \sqrt{w} discontinu is op de negatieve reële as. Op het overblijvende deel van het z -vlak heeft f ook een inverse.

(3.56) Het verband tussen de beide inverse functies in (3.55) blijkt als volgt: los z op uit $z^2 = w$; stel daartoe $w = re^{i\varphi}$ ($\varphi = \arg w$), $z = \rho e^{i\psi}$, dan $\rho^2 e^{2i\psi} = re^{i\varphi}$, dus $\rho = \sqrt{r}$ en $e^{2i\psi} = e^{i\varphi}$, $\cos(2\psi - \varphi) + i \sin(2\psi - \varphi) = 1$, dus $2\psi - \varphi = 2k\pi$, $\psi = \frac{1}{2}\varphi + k\pi$ (k geheel). Er volgt $z = \sqrt{r} e^{i\psi} = \sqrt{r} e^{i(\frac{1}{2}\varphi + k\pi)}$ ($k=0$) of

$$z = \sqrt{r} e^{i\psi} = -\sqrt{r} e^{i\psi} \quad (k=1);$$

voor andere waarden van k vinden we een van de reeds gevonden waarden voor z , aangezien $e^{2k\pi i} = 1$. We zien nu dat $\sqrt{w} = \sqrt{r} e^{i\psi}$; de andere in (3.55) voorkomende inverse wordt gegeven door $-\sqrt{r} e^{i\psi}$.

(3.57) Analoog: door de afbeelding $w = z^n$ wordt elke hoek met hoekpunt 0 en ter grootte $2\pi/n$ (in het z -vlak) 1-1 afgebeeld in het w -vlak (let op de benen!); immers $\arg z^n =$

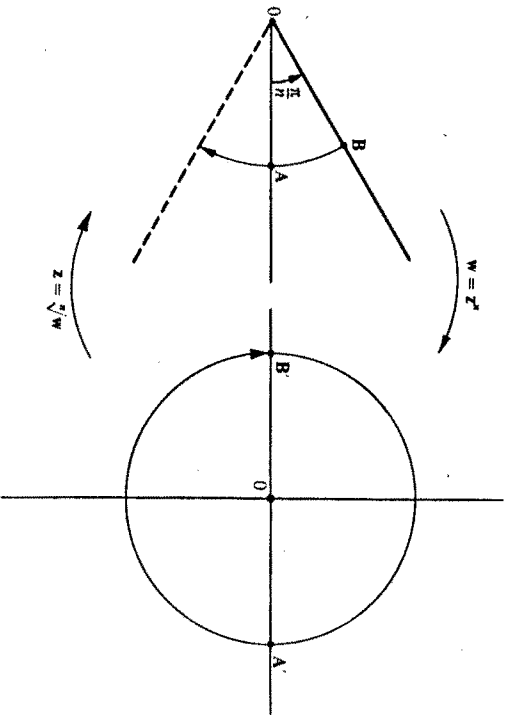


Fig. 15

$n \arg z \pmod{2\pi}$. De inverse van $w = z^n$ op $-\pi/n < \arg z \leq \pi/n$ noemen we $z = \sqrt[n]{w}$. Er geldt, met $|w| = r$, $\arg w = \varphi$:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\varphi}{n}\right).$$

Merk op dat $\sqrt[n]{w} = e^{e^{-1} \log w}$. Alle oplossingen van $z^n = w$ zijn nu

$$(3.58) \quad z = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\varphi}{n} + \frac{2k\pi i}{n}\right) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Hieruit volgt nog:

(3.59) De wortels van de vergelijking $z^n = \alpha$ vormen de hoekpunten van een regelmatige n -hoek, beschreven in de cirkel $|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}$.

(3.60) Voorbeeld: los z op uit $(1+i)z^2 + (1-i)z - \frac{1}{2}i = 0$.

We delen door $1+i$: $z^2 - iz - \frac{1}{4}i = 0$. Kwadraat afsplitsen: $(z - \frac{1}{2}i)^2 = \frac{1}{4}i$.

Schrijf $i = e^{i\pi/2} = (e^{i\pi/2})^2$; er volgt

$$z - \frac{1}{2}i = \pm \frac{1}{2}e^{i\pi/4} = \pm \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{2},$$

dus

$$z = \pm \frac{1}{4}\sqrt{2} + (\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2})i.$$

(3.61) Later bewijzen we de zogenaamde *hoofdstelling van de algebra*: elke algebraïsche vergelijking (= een vergelijking van de vorm $p(z) = 0$, waarin $p(z)$ een polynoom is) van de n -de graad ($n \geq 1$) met complexe coëfficiënten heeft minstens één complexe wortel; $p(z)$ is te ontbinden in n lineaire factoren (met complexe coëfficiënten), waaronder gelijke kunnen voorkomen (vgl. hoofdstuk 14).

(3.62) De differentiaalvergelijking $y'' = \lambda y$ met $\lambda > 0$ is oplosbaar met behulp van e -machten: stel $\lambda = \mu^2$ (μ reëel), dan voldoet $y(t) = e^{\mu t}$ en $y(t) = e^{-\mu t}$. Is $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$ (μ reëel), dan lukt het zo ook: zowel $y(t) = e^{i\mu t}$ als $y(t) = e^{-i\mu t}$ voldoen; dus voldoet ook een willekeurige lineaire combinatie

$$\alpha e^{i\mu t} + \beta e^{-i\mu t} = (\alpha + \beta) \cos \mu t + i(\alpha - \beta) \sin \mu t \quad (\alpha, \beta \text{ complex}).$$

Hieruit is een voorgeschreven reële combinatie $a \sin \mu t + b \cos \mu t$ (a, b reëel) te verkrijgen door te nemen $\alpha = \frac{1}{2}(b - ia)$, $\beta = \frac{1}{2}(b + ia)$. Vergelijk met (2.50) (harmoonische trilling).

OPGAVEN

1. Bereken de (complexe) wortels van de vergelijking $x^2 + 3x + 4 = 0$.
2. Schrijf in de vorm $a + bi$, en bereken modulus en argument van:
 - a. $(1-i\sqrt{3})^2$;
 - b. $\frac{1+i}{i-1}$
 - c. $\frac{3+4i}{2-1}$.

Hoe kan men modulus en argument bepalen zonder de getallen eerst in de vorm $a + bi$ te brengen?

Teken de beeldpunten van $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i$ en $i - 1$, en controleer de in a) en b) gevonden antwoorden in de figuur.

3. Bewijs: $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$. Wat is de meetkundige betekenis hiervan?

4. Teken een punt z op de eenheidscirkel $|z| = 1$ in het complexe vlak; construeer nu de punten $z^2, z^3, z^{-1}, -z, z, iz, -iz$. Ga in de figuur na dat $z + z^{-1}$ reëel is; bewijs dit ook door te schrijven $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

5. Teken een driehoek ABC in het complexe vlak; A is het beeldpunt van α , B van β . Bepaal het complexe getal waarvan C het beeldpunt is, als de driehoek
 - a. rechthoekig is in B , terwijl $AB = BC$;
 - b. gelijkzijdig is.

6. Als $|z-1|=2$, dan is $\frac{z+1}{z-3}$ zuiver imaginair ($z \neq 3$). Bewijs dit:
 a. meetkundig; b. door berekening.
7. Waar liggen in het complexe vlak alle z waarvoor geldt

$$\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2i} = 1?$$
8. a. Ga na dat, bij gegeven α , het punt α^{-1} als volgt kan worden gereconstrueerd: trek de verbindingslijn l van α met 0 ; construeer de poollijn ('raakkoord') m van α ten opzichte van de eenheidscirkel $|z|=1$; spiegel het snijpunt β van l en m in de reële as (vergelijk modulus en argument van β en α^{-1}).
 b. Construeer voor een aantal punten z op de cirkel met middelpunt $\frac{1}{\alpha}$ en straal $\frac{1}{|\alpha|}$ de punten $z+z^{-1}$; merk op dat deze cirkel onder de afbeelding $f(z)=z+z^{-1}$ overgaat in een loodrechte doorsnede van een vliegtuigvlugel.
9. Druk met behulp van (3.26) $\sin 3\varphi$ uit in $\sin \varphi$.
10. Gegeven een punt $\alpha \neq 0$; geef de ligging aan van $\alpha e^{i\pi}$, $(\alpha+1)e^{-i\pi}$, $\alpha|\alpha|^{-1}e^{i\pi}$. Hoe moet men α kiezen opdat $(\alpha+1)e^{-i\pi}$ zuiver imaginair wordt?
11. Sommeer: $e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx}$, bewijs nu zonder volledige inductie, door het nemen van reële delen, de in opgave 1.3 vermelde formule.
 Zoek en bewijs ook een eenvoudige uitdrukking voor
 $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.
12. $f(x) = (x^2+1)^{-1}$. Bewijs door volledige inductie:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i} (-1)^n n! \left\{ \frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right\}$$
13. $f(z) = \frac{z^2-z+1}{2z}$. Ga na welke baan $f(z)$ doorloopt als z de eenheidscirkel doorloopt in positieve zin.
14. $w = \frac{z-1}{z+1}$; z loopt in positieve richting langs de reële as. Bepaal de baan die w doorloopt.
15. $w = (z-1)^{-1}$; z doorloopt de eenheidscirkel in positieve zin. Bepaal de baan die w doorloopt.

16. $w = z^{-1}$; wat zijn de beelden van de rechten $y=x$ en $y=1$?
17. Ga na of de volgende limieten bestaan; zo ja, bereken ze dan:
 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ix}}{x}$ (x reëel);
 b. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos it}{it}$ (t reëel);
 c. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(1+ix)x}$ (x reëel).
18. Bewijs: als $\operatorname{Re} \alpha < 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = 0$ (x reëel).
19. a. Schrijf in de vorm $a+bi$: $\log(1+i)$ en $\log(-i)$.
 b. Bewijs met behulp van de definitie van \log : voor reële x is
 $\log(1+ix) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + i \arctan x$.
- Bewijs deze formule ook door van beide leden de afgeleide te bepalen.
20. Los z op uit:
 a. $e^z = i$; b. $e^z = 1+i$; c. $\cos z = -3$.
21. Los z op uit:
 a. $z^3 = i$; c. $z^2 - 2z + 2 = 0$;
 b. $z^4 = -1$; d. $(3+4i)z^2 + 5z + (2-4i) = 0$.
 Teken de wortels in het complexe vlak.
22. Laat α een complex getal zijn; z_1 en z_2 zijn de wortels van $z^2 + 2\alpha z + 2\alpha^2 = 0$. Bewijs:
 $|z_1| = |z_2|$ en $\arg z_1 - \arg z_2 = \pm \frac{1}{2}\pi \pmod{2\pi}$ (dus 'pijl z_1 ' \perp 'pijl z_2 ').
23. Beschouw de afbeelding $w = e^{iz}$.
 a. Bepaal voor (vaste) complexe α welke z voldoen aan $e^{iz} = \alpha$ (stel $z = x+iy$).
 b. Geef een deel D van het z -vlak aan zó dat $w = e^{iz}$ op D een inverse heeft; bepaal deze inverse.
 c. Ga na wat de beelden zijn van de krommen $x = \text{constant}$ en $y = \text{constant}$ onder de afbeelding $w = e^{iz}$, ga het conforme karakter van de afbeelding na.
24. Beschouw nog eens de afbeelding $w = z+z^{-1}$ (zie ook opgave 8).
 a. Wat is het beeld van de eenheidscirkel onder deze afbeelding?

- b. Wat is het beeld van de cirkel $|z| = r$ als $r \neq 1$?
 c. Wat zijn de beelden van de rechten in het z -vlak door 0?
 Ga het conforme karakter van de afbeelding na.

25. Beschouw de afbeelding $w = \sin z$.
 a. Schrijf $w = u + iv$ en druk u en v in x en y uit.
 b. Bewijs dat onder deze afbeelding het deel D van het z -vlak bepaald door $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $y > 0$, overgaat in het deel van het w -vlak bepaald door $u > 0$, $v > 0$.
 c. Bepaal de beelden van de rechten $x = \text{constant}$ en $y = \text{constant}$ voor zover ze in D liggen; bewijs hiermee dat de afbeelding op D 1-1 is. Ga het conforme karakter van de afbeelding na.

26. Een trilling met demping wordt bepaald door de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2ky' + a^2y = 0,$$

waarin k en a reële constanten zijn (vergelijk met (2.50) en opgave 2.18b). Bewijs:

- a. Als $k^2 > a^2$, dan wordt een oplossing gegeven door

$$y(t) = e^{-kt}(Ae^{pt} + Be^{-pt}),$$

met $p = (k^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ en A, B willekeurige constanten.

- b. Als $k^2 = a^2$, dan wordt een oplossing gegeven door

$$y(t) = e^{-kt}(At + B),$$

met A, B willekeurige constanten.

- c. Als $k^2 < a^2$, dan kunnen we twee oplossingen van de vorm $e^{i\lambda t}$ (λ complex) vinden; laat zien dat we hieruit door het nemen van een geschikte lineaire combinatie een oplossing van de vorm $Ae^{-kt} \sin(pt + B)$ kunnen vinden, met $p = (a^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ en A, B willekeurige constanten.

ANNOTATIE

De in (3.24) geschetste opbouw van de complexe getallen wordt o.a. behandeld in [5].

Een uitvoeriger behandeling van de complexe getallen en complexe functies vindt men in [6], [7] en [8] (deel I); men vindt daar ook de hier weggelaten bewijzen.

4. PRIMITIVEVEN

(4.1)

In het voorafgaande bespraken we reeds enkele malen het probleem bij een gegeven functie f een primitieve te vinden, dat wil zeggen een functie F waarvoor geldt $F' = f$. We gaan daar nu wat dieper op in. We beschouwen uitsluitend functies $R \rightarrow R$, en laten hier enkele voor de hand liggende generalisaties voor functies $R \rightarrow \mathbb{C}$ en $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ achterwege. Hoewel men in de praktijk al snel zijn toevlucht zal nemen tot tabelenboeken, zullen we hier enkele veel voorkomende gevallen behandelen.

(4.2)

Laat φ een op een interval $I = [p, q]$ gedefinieerde reële functie zijn die strikt monotoon en differentieerbaar is met een afgeleide die nergens nul is; de inverse van φ noemen we ψ (vergelijk (2.11)).

Laten F en f op het interval $J = [\varphi(p), \varphi(q)]$ gedefinieerde reële functies zijn, terwijl F een primitieve van f is. Definieren we h door

$$h(x) = F(\varphi(x)) \quad (x \in I),$$

dan is

$$h'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Kunnen we omgekeerd een functie g op I bepalen zó dat

$$g'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (x \in I),$$

dan hebben we ook een primitieve van f (op J), namelijk de functie k gedefinieerd door $k(y) = g(\psi(y))$; is $b \in J$, $b = \varphi(a)$, dus $a = \psi(b)$, dan is

$$k'(b) = g'(\psi(b)) \cdot \psi'(b) = g'(a) \cdot \psi'(b) = f(\varphi(a)) \cdot \psi'(b) = f(b),$$

aangezien $\varphi'(a) \cdot \psi'(b) = 1$ (zie (2.21)).

We vatten het gevondene als volgt samen:

$$(4.3) \quad \text{Substitutieregel: } \int f(y) dy = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx, \text{ met } y = \varphi(x) \text{ en } x = \psi(y).$$

Voeren we nog de notatie

$$(4.4) \quad d\varphi(x) = \varphi'(x) dx$$

in, dan krijgt de substitutieregel de volgende bijzonder eenvoudige vorm:

$$(4.5) \quad \int f(y) dy = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) \quad (y = \varphi(x), x = \psi(y)).$$

(4.6) Voorbeeld

$$1. \text{ Berekening van } \int \frac{e^x}{1+e^x} dx. \text{ Schrijf } e^x dx = d(e^x), y = e^x (= \varphi(x)), \text{ dan}$$