

1 Calculus.

1.1 Voorkennis.

We nemen in dit hoofdstuk aan dat je bekend bent met het limietbegrip. De definities staan achter in de Appendix.

Ook word je geacht vertrouwd te zijn met hun elementaire eigenschappen en toepassingen. Daarvan noemen we de rekenregels:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) * g(x) = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) * \lim_{x \rightarrow \beta} g(x)$$

waar "*" kan staan voor +, . en / (plus, maal en gedeeld door); in het laatste geval moet $\lim_{x \rightarrow \beta} g(x) \neq 0$ zijn. Ook is

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \beta} C.f(x) = C. \lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$$

als C een constante is.

$$\bullet \text{Als voor alle } \beta \in A \text{ geldt } f(\beta) < C \text{ dan is } \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) \leq C.$$

$$\bullet \text{Analoge definities en resultaten gelden voor de gevallen } \lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow \infty}.$$

Enkele limieten:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+7}{-3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{7}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{-3+0} = \frac{-1}{3}$$

via toepassing van de rekenregeltjes voor limieten.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x = 0.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \text{ (Dan is ook } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{713} = 1; \text{ waarom?)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \text{ (Dan is } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0; \text{ waarom?)}$$

Wanneer je het rekenen met limieten kwijt bent moet je dat weer even ophalen.

Nog een kleinigheid:

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ ("Binomium van Newton").}$$

Hier is $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; i.h.b. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

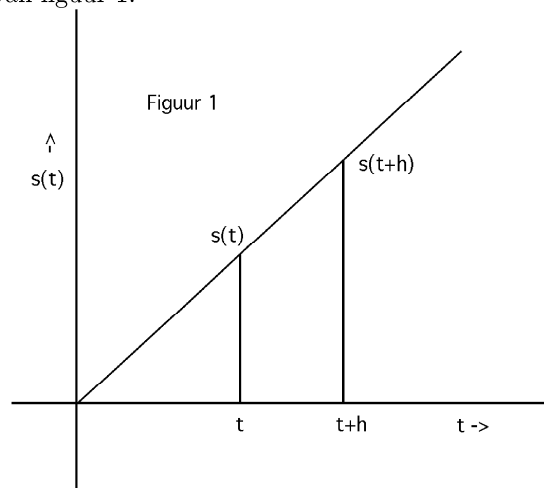
1.2 Differentiatie.

1.2.1 Inleiding

Zo'n 300 jaar geleden was de (hemel-)mechanica in opkomst. *Kepler* had aangetoond dat de planeten in ellipsen om de zon liepen, en stelde o.a. zijn *perkenwet* op. *Galilei* deed bewegingsexperimenten. Men kreeg aldus behoefte om begrippen als snelheid en versnelling mathematisch te definiëren. *Newton*, *Leibniz* en anderen bedachten hiertoe de "infinitesimalekening" (analyse, calculus); een stuk wiskunde dat sindsdien niet meer valt weg te denken uit de wetenschap en

techniek (en dat is zeer zwak uitgedrukt!). Newton slaagde erin om met behulp van dit apparaat de wetten van Kepler te verklaren.

Een voorbeeld: het begrip snelheid. Wanneer een fietser gelijkmatig doorkart, ziet de afgelegde afstand $s(t)$ als functie van de tijd t er (geïdealiseerd) uit als de rechte lijn van figuur 1:

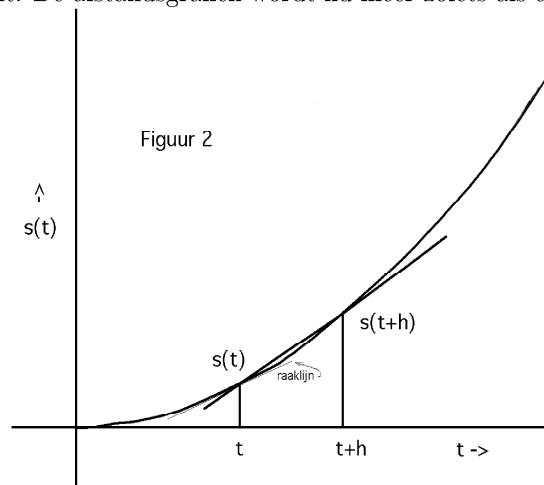


Beschouwen we twee tijdstippen t en $t + h$, dan is het duidelijk wat de snelheid van de fietser in het interval ertussen was:

$$\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{tussentijd}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Als de lijn de vergelijking $s(t) = \alpha t$ heeft, dan komt uit de snelheid: α , de richtingscoëfficiënt. Deze snelheid is constant, d.w.z. hangt niet van t af.

Anders wordt het, wanneer de fietser overstapt op een motor en eens flink aan het gas schroeft. De afstandsgrafiek wordt nu meer zoiets als die van figuur 2:



Het zal duidelijk zijn dat $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ nu van t en h afhangt, en een soort gemiddelde snelheid voorstelt in het interval $[t, t + h]$. Dit gemiddelde is wel weer de

richtingscoëfficiënt van de getekende (dikke) lijn.

Hoe moeten we nu de snelheid definiëren op het tijdstip t zelf? Voor de hand ligt het, het interval h zeer klein te kiezen. De lijn uit de figuur 2 nadert dan tot de raaklijn, en de gemiddelde snelheid nadert tot de richtingscoëfficiënt van die raaklijn. Men definieert daarom de snelheid op tijdstip t als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

wanneer deze limiet tenminste bestaat. Dit heet de *afgeleide* van de functie s in het punt t .

1.2.2 Rekenregels

Laat $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zijn. (Voor de preciezen: we nemen A open en f continu; zie de Appendix).

Definitie 1 Een functie f heet differentieerbaar in $x \in A$ wanneer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bestaat.

Als f overal op A differentieerbaar is, dan bestaat de functie $x \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$; deze functie noemen we f' (of $f'(x)$); ook wel: $\frac{df}{dx}$ of Df). Vandaar de notatie $f'(\beta) = \frac{df}{dx}|_{x=\beta} = (Df)(\beta)$.

We zagen dat de afgeleide in x gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in x aan de grafiek van f , dat is de tg (tangens) van de hoek die de raaklijn maakt met de positieve x -richting.

Er gelden weer diverse rekenregels (leer deze uit het hoofd):

- $(Cf)' = Cf'$ (C een constante);
- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ in punten x waar $g(x) \neq 0$ is.

We noteren $g \circ f$ voor de samengestelde functie $x \rightarrow g(f(x))$. Dan geldt: $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$. We nemen hierbij aan dat g differentieerbaar is in $f(x)$. Korter:

- $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$ ("Kettingregel").

Bewijs: We doen er een paar voor; doe de rest zelf als oefening of zie de Appendix.

- Er geldt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Cf(x+h) - Cf(x)}{h} = C \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dus $(Cf)' = Cf'$.

- Er geldt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h}$
 $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Opm: ¹)
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$: zie de Appendix.
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (kettingregel): zie de Appendix.

Opmerking: heuristisch is de kettingregel wel in te zien: rond het punt x benader je $f(x)$ met een rechte; $f(x+h)$ is daar immers ongeveer $f(x) + hf'(x)$ voor kleine $|h|$.

Dan is $g(f(x+h))$ ongeveer $g(f(x) + hf'(x))$; zeg $g(X+H)$ met $X = f(x)$ en $H = hf'(x)$. Net als bij f benader je g in het punt X lineair; hier dus door $g(X+H) - g(X) + Hg'(X)$. Dit laatste is echter $g'(f(x)) + hf'(x)g'(f(x))$. Dus zal $hf'(x)g'(f(x))$ wel de goede lineaire benadering zijn voor $g \circ f(x+h)$.

1.2.3 Een aantal standaard-afgeleiden

Om bovenstaande regeltjes te kunnen toepassen is het nodig wat afgeleiden paraat te hebben. Hier volgen er enige.

- $C' = 0$, waar C een constante is. Want $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C-C}{h} = 0$.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$

Bewijs: volgens het binomium van Newton is $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots$ dus $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} +$ termen met h erin; enz.

Opmerking: deze regel geldt algemener voor machten x^α waar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$: de afgeleide is $\alpha x^{\alpha-1}$.

Bijvoorbeeld is de afgeleide van $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gelijk aan $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Net zo is $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.

Oefening: bereken de afgeleiden van deze twee speciale gevallen \sqrt{x} , $\frac{1}{x}$ rechtstreeks.

- $e^{\log(x)}' = \frac{1}{x}$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $\sin(x)' = \cos(x)$; $\cos(x)' = -\sin(x)$; $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$.

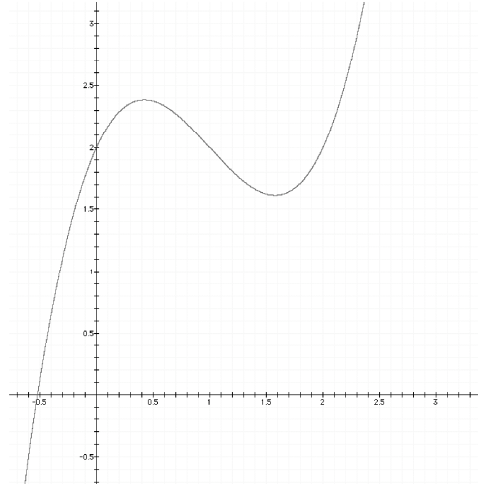
Bewijs: voor $\sin(x)'$ en $\cos(x)'$ zie de Appendix. De afgeleide van $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ volgt dan uit de regel voor $(\frac{f}{g})'$.

¹ $(\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x))$ omdat g continu is; dat volgt uit zijn differentieerbaarheid (voor de preciezen: ga dit na m.b.v. de Appendix.)

1.2.4 Een toepassing

Een van de meest bekende en eenvoudigste toepassingen van differentiatie is het bepalen van lokale maxima en minima van een functie. Bekijken we eens figuur 3, die de grafiek voorstelt van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

Figuur 3.



We nemen een maximum en een minimum waar en zouden graag willen weten waar die liggen. Welnu: in zulke punten ligt de raaklijn horizontaal, dus is de afgeleide 0. Kandidaat-extrema kunnen we dus vinden door de afgeleide 0 te stellen! ²

In ons geval is de afgeleide $3x^2 - 6x + 2$ met nulpunten $1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$ oftewel ongeveer 1,58 en 0,42.

1.3 Appendix

Voor de diehards enkele wiskundige definities met tussendoor enkele oefeningen.

1.3.1 Limieten

Definitie 2 *Laten $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeven zijn. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \alpha$ d.e.s.d.a. $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |f(n) - \alpha| < \epsilon$.*

Definitie 3 *Laten $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en $\alpha \in A$, $\beta \in \mathbb{R}$ gegeven zijn. ³ Dan is $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \alpha$ d.e.s.d.a. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A, |x - \beta| < \delta |f(x) - \alpha| < \epsilon$.*

Definitie 4 *De functie f heet continu in $\beta \in A$ als $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = f(\beta)$. De functie f heet continu op A als f continu is in elke $\beta \in A$.*

²(De precieze voorwaarden waaronder deze methode voldoende is, kunnen we hier niet behandelen maar dit staat in de gewone calculusboeken).

³We nemen gewoonlijk aan dat A open is, dat wil zeggen dat er bij elke $\beta \in A$ een intervalletje $(\beta - \zeta, \beta + \zeta)$ is dat geheel in A is bevat. Hier mag ζ van β afhangen.

1.3.2 Regels voor afgeleiden

De quotiëntregel: $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ volgt door te schrijven:

$$\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x)}{g(x)g(x+h)}$$

en $h \rightarrow 0$ te laten gaan.

De kettingregel: $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$. De definitie van afgeleide, iets anders opgeschreven, zegt:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \epsilon(h) \text{ met } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0. \quad (*)$$

(Opm: dit is het begin van de zgn. *Taylorreeks* voor f).

Passen we dit toe op $g \circ f$, dan zien we: $(g \circ f)(x+h) = g(f(x+h)) = g(f(x) + hf'(x) + \epsilon(h))$. Noem $f(x)$ even: X , en noem $hf'(x) + \epsilon(h)$ even: H . Dan vind je, analoog aan (*):

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= g(X+H) = g(X) + Hg'(X) + \epsilon_1(H) \\ &= g(f(x)) + hf'(x)g'(f(x)) + \epsilon(h)g'(f(x)) + \epsilon_1(H). \end{aligned}$$

Hier is $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(H)}{H} = 0$. Dus

$$\frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} = f'(x)g'(f(x)) + \frac{\epsilon(h)}{h}g'(f(x)) + \frac{\epsilon_1(H)}{h}.$$

Laten we nu $h \rightarrow 0$ gaan, dan volgt: $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.⁴

1.3.3 Standaardafgeleiden

De sinus: We weten dat $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$; aldus hebben we:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot \left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right) + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}.$$

Een van de standaardlimieten luidt: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. Ook geldt de goniöformule $\cos(h) = 1 - 2\sin(\frac{h}{2})^2$ waaruit volgt dat $\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \sin(\frac{h}{2})$ met als limiet: $-1 \cdot \sin(0) = 0$.

Dus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$.

De cosinus: We weten dat $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ dus via de kettingregel is de afgeleide: $\sin'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = \sin(x) \cdot (-1) = -\sin(x)$.

⁴Immers $\frac{\epsilon(h)}{h}$ gaat naar 0. Hetzelfde geldt voor $\frac{\epsilon_1(H)}{H}$. Merk namelijk op: uit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(H)}{H} = 0$ volgt $|\epsilon_1(H)| < \delta|H|$ met $\delta > 0$ willekeurig te kiezen. Verder is $|H| \leq |f'(x) + \frac{\epsilon(h)}{h}| \cdot |h| \leq C \cdot |h|$, C een constante. E.e.a. combinerend zien we $|\epsilon_1(H)| < \delta C|h|$ dus (δ was willekeurig) geldt inderdaad: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(H)}{h} = 0$.

2 Integratie.

Hier volgen kort enkele punten zoals verteld op college. Je moet de behandelde technieken beheersen (zie ook de webpage).

1. Betekenis integreren als bepalen oppervlak.
2. Primitieven (op cst. na bepaald), onbepaalde en bepaalde integralen.

Notaties: $F(x)$ is een primitieve van $f(x)$ als $F' = f$; F is op een constante na bepaald (ook $(F'(x) + C)' = f(x)$). Men schrijft $F(x) = \int f(x).dx$ ("onbepaalde integraal").

De oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ tussen de punten $x = a$ en $x = b$ is $F(b) - F(a)$. Men schrijft hiervoor: $\int_a^b f(x).dx$ ("bepaalde integraal" tussen de grenzen a en b) en ook $F(x)|_{x=a}^{x=b}$ of gewoon $F(x)|_a^b$.

3. Standaardprimitieven (het omgekeerde lijstje van standaardafgeleiden).
4. Vertaling van de kettingregel als substitutie: $\int f \circ g(x).g'(x).dx = F \circ g$, waar $F' = f$. Daarom de notatie: $\int f \circ g(x).g'(x).dx = \int f(g).dg$. Je mag g dus als "parameter" zien.
5. Toepassingen van 4:

a. Herken een integraal als zijnde van de vorm $\int f \circ g(x).g'(x).dx$ en pas nu 4. toe. *Voorbeeld:* $\int x^2 \cdot \sin(x^3).dx$.

b. Bereken $\int f(x).dx$ via een "handige substitutie" $x = g(t)$; je krijgt $\int f \circ g(t).dg(t) = \int f \circ g(t).g'(t).dt$. Als de primitieve hiervan $H(t)$ is, dan is die van f : $H \circ g^{-1}(x)$ immers $t = g^{-1}(x)$.

Bij een *bepaalde* integraal kun je ook de grenzen veranderen (worden grenzen van t) in plaats van $t = g^{-1}(x)$ te substitueren. *Voorbeeld:* integraal van $\sqrt{1-x^2}$.

6. Uit $(fg)' = f'g + fg'$ volgt $\int (fg)'.dx = \int g.df + \int f.dg$ oftewel: $\int f.dg = f.g - \int g.df$ ("partiële integratie").

Voorbeeld: primitieve van de $e \log$: $\int e \log(x).dx = e \log(x).x - \int x.d(e \log(x)) = x.e \log(x) - \int x.\frac{1}{x}.dx = x.e \log(x) - x (+Cst)$

7. Illustratie: hoe ver kan ik gooien/schieten.

2.1 Extra denkoefening.

Tot nog toe hebben we van de bewering

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} (\alpha \neq 0) \quad (*)$$

slechts een bewijs gezien voor $\alpha = n$, n geheel en > 0 .

Kunnen we deze differentiatieregel ook bewijzen voor andere α 's? We zullen dit als oefening doen voor α een breuk; dus van de vorm $\frac{p}{q}$ met p en q geheel, $\neq 0$.

Bekijken we eerst $\alpha = -1$. De definitie invullen geeft: $(x^{-1})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$ dus dan klopt bewering (*).

Bekijken we nu x^α met $\alpha < 0$. Noem $\alpha = -\beta$. Stel $f(x) = x^{-1}$ en $g(x) = x^\beta$, zodat $x^\alpha = f \circ g(x)$. Volgens de kettingregel is $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g' = \frac{-1}{(x^\beta)^2} \cdot (x^\beta)'$. Stel, we hebben (*) al bewezen voor *positieve* exponenten. Dan is $(x^\beta)' = \beta \cdot x^{\beta-1}$. Vullen we dit in, dan blijkt $(f \circ g)' = \frac{-1}{x^{2\beta}} \beta \cdot x^{\beta-1} = -\beta x^{-\beta-1} = \alpha x^{\alpha-1}$.

We zien dat (*) ook te bewijzen is voor negatieve exponenten, mits we weten dat (*) waar is voor positieve exponenten. Dit laatste gaan we nu aantonen; we nemen dus nu aan dat p en q beide > 0 zijn.

Neem eerst aan dat $p = 1$, dus $\alpha = \frac{1}{q}$. Zij $f(x) = x^q$ en $g(x) = x^\alpha = x^{\frac{1}{q}}$. Dan is $f \circ g(x) = x$. Differentiëren met de kettingregel levert $f' \circ g \cdot g' = 1$; dus $qg^{q-1} \cdot g' = 1$; oftewel $g' = \frac{1}{q \cdot g^{q-1}} = \frac{1}{q \cdot \frac{g-1}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$. Ook voor dit geval klopt (*) dus.

Tenslotte tonen we aan: als (*) geldt voor α , dan ook voor $p\alpha$ met p geheel, > 0 . Dit gaat precies eender: laat $f(x) = x^p$; $g(x) = x^\alpha$; dan $(x^{p\alpha})' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g' = p \cdot g(x)^{p-1} \cdot g'$. Per aanname geldt (*) voor g , dus $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

De afgeleide wordt $p \cdot (x^\alpha)^{p-1} \cdot \alpha x^{\alpha-1} = p\alpha x^{p\alpha-1}$ hetgeen de goede uitkomst is volgens (*). Kiezen we hierin $\alpha = \frac{1}{q}$ dan hebben we het bewijs voltooid voor exponent $\frac{p}{q}$, en dat ontbrak nog aan ons geluk.

Tenslotte: voor willekeurige $\alpha \neq 0$ uit \mathbb{R} is (*) zoals gezegd ook waar; het valt te bewijzen door α te benaderen als limiet van een rij breuken - maar dit gaat hier te ver.