1 Complexe getallen.

1.1 Definitie.

We zullen de complexe getallen niet formeel invoeren, maar laten zien hoe je ermee rekent. Een complex getal z heeft de vorm $a + bi$.[1] Hier stelt de letter i een "imaginair getal" voor waarvan het kwadraat -1 is. a en b zijn reëel. Het complexe getal z ligt eenduidig vast door a en b. a heet ook $Re\ z$ (het reële deel van z; b heet ook $Im\ z$ (het imaginaire deel van z).

Voorbeeld van notatie:
$3.14 + 5i$; $3 + 0i$ $(= 3)$; $0 + 5i$ $(= 5i)$; $0 + 0i$ $(= 0)$.

De verzameling der complexe getallen heet $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$ is bevat in $\mathbb{C}$ namelijk als alle getallen $a + 0.i$ (zie ook hier beneden). $\mathbb{C}$ laat zich opvatten als het *complexe vlak* van alle vectoren (a, b) die dan echter als $a + bi$ genoteerd blijven. Plaatjes in dit vlak werken uiterst handig!

1.2 Rekenen met complexe getallen.

Notatie: tenzij anders aangeduid is hieronder steeds $z = a + bi$, $w = c + di$.

Optellen: $z + w = (a + c) + (b + d)i$. In het complexe vlak is dit de gewone vectoroptelling (via een parallelogram).

Vermenigvuldigen: gewoon uitwerken, maar steeds $i^2 = -1$ stellen (dus ook $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$, enz.) Dus: $zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$ $= (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Delen: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} =_{truc} \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Op analoge wijze bereken je $\frac{w}{z}$. Een en ander kan alleen als $a^2 + b^2 \neq 0$, oftewel $z \neq 0$; net zoals in $\mathbb{R}$ mag je dus door alles delen behalve door 0. Merk ook nog op dat voor reële z en w (dus met $b = 0$, $d = 0$) deze bewerkingen de gewone uit $\mathbb{R}$ zijn. Inderdaad zit dus $\mathbb{R}$ ingebed in $\mathbb{C}$.

1.3 Het complexe vlak.

We beschouwen de complexe getallen nu als vectoren.

De norm $|z|$ van z is zijn lengte als vector; dus $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Uiteraard zijn $|a|$ en $|b| \leq |z|$, anders gezegd: $|Re\ z| \leq |z|$; $Im\ z \leq |z|$. Ook geldt: $|zw|$ $= |z|.|w|$. Bewijs: $|zw|^2 - |z|^2|w|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ $= \cdots = 0$.

Het argument $arg\ z$ van z is de hoek die de vector maakt met de a-as. Deze hoek is bepaald op een veelvoud van 2π na; we normeren hem door te stellen $-\pi < arg\ z \leq \pi$.

[1] Inplaats van $a + bi$ mag je ook schrijven $a + ib$, $ib + a$, $bi + a$.

Voorbeeld: $arg\ i = \frac{\pi}{2}$; $arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$; $arg(-1) = \pi$.

De geconjugeerde $\overline{z}$ van z is de gespiegelde van z t.o.v. de a-as; dus $\overline{z} = a - bi$. Voor reële z $(b = 0)$ is dus $z = \overline{z} = a$. Er geldt $\overline{\overline{z}} = z$; $|\overline{z}| = |z|$; $z + \overline{z} = 2Re\ z$; $z - \overline{z} = 2iIm\ z$; $z.\overline{z} = |z|^2$; ga deze eenvoudige eigenschappen allemaal even na.

Ook kun je gewoon uitrekenen (en via een plaatje inzien) dat: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$; $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Samengevat: *conjugeren gedraagt zich netjes t.o.v. de bewerkingen in* $\mathbb{C}$.

Toepassing van conjugeren:
Stel $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ is een reële veelterm, d.w.z. de a_i's zitten in $\mathbb{R}$. Bewering: als dan z een nulpunt van f is, dan ook $\overline{z}$. Wegens bovenstaande regeltjes geldt immers $\overline{f(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z}^2 + \cdots + \overline{a_n z}^n = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n$ (want $\overline{a_i} = a_i$). Dus als $f(z) = 0$ dan is $f(\overline{z}) = 0$.

Voorbeeld: $f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ heeft i als nulpunt; daarmee weet je meteen een ander nulpunt $\overline{i} = -i$.

1.4 De driehoeksongelijkheid.

In het vlak is een zijde van een driehoek niet langer dan de som van twee overige. In het complexe vlak komt dit neer op: $|z + w| \leq |z| + |w|$ (ga na in een figuur van de optelling per parallelogram). Deze regel is erg belangrijk bij schattingen in de analyse.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = z\overline{z} + w\overline{w} + 2Re\ z\overline{w} \leq z\overline{z} + w\overline{w} + 2|z\overline{w}| \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + 2|z||\overline{w}| = z\overline{z} + w\overline{w} + 2|z||w| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

1.5 Poolcoördinaten.

Laat $r = |z|$ en $\phi = arg\ z$. r en ϕ heten de *poolcoördinaten* van z. In een figuur zien we: $z = rcos\ \phi + irsin\ \phi = r(cos\ \phi + isin\ \phi)$. Merk op dat $|cos\ \phi + isin\ \phi| = \sqrt{cos^2\ \phi + sin^2\ \phi} = 1$

Hulpstelling:

$$cos(\phi + \psi) = cos\ \phi.cos\ \psi - sin\ \phi.sin\ \psi$$
$$sin(\phi + \psi) = sin\ \phi.cos\ \psi + cos\ \phi.sin\ \psi$$

Bewijs: dit zijn bekende formules uit de goniometrie.

Ze zijn voortaan via de complexe getallen uiterst gemakkelijk te onthouden, althans te reconstrueren, want: als $z = r(cos\ \phi + isin\ \phi)$ en $w = s(cos\ \psi + isin\ \psi)$ dan blijkt door uit te vermenigvuldigen en de hulpstelling toe te passen dat

$$zw = rs(cos(\phi + \psi) + isin(\phi + \psi)).$$

Vermenigvuldigen in $\mathbb{C}$ betekent dus: *lengten vermenigvuldigen* en *hoeken optellen*.

Vraag: en wat betekent delen dan, op dezelfde manier?

Merk wel op dat je $\phi + \psi$ eventueel met 2π moet reduceren om het *argument* van zw te krijgen; *dat* ligt immers tussen $-\pi$ en π. Bv, $z = w = -1 - i$ (norm $\sqrt{2}$, argument $-\frac{3}{4}\pi$ geeft $zw = 2i$ (norm 2, argument $\frac{\pi}{2} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi + 2\pi$).

Spraakgebruik: "neem $\alpha\ mod\ 2\pi$" wil zeggen: tel een veelvoud van 2π bij α op (of trek het er vanaf) zodanig dat het resultaat voldoet aan $-\pi < (\alpha\ mod\ 2\pi) \leq \pi$.

1.6 De complexe e-macht.

We definiëren voor een willekeurige hoek ϕ: $e^{i\phi} = cos\ \phi + isin\ \phi$. Dit zal blijken een zinvolle notatie te zijn. Bijvoorbeeld geldt: $e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi}.e^{i\psi}$; dit is namelijk de bovenstaande vermenigvuldiging van z en w als ze norm $r = s = 1$ hebben.

We kunnen nu ook de functie $e^a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uitbreiden tot een functie $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Definieer namelijk $e^z = e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a(cos\ b + isin\ b)$. Er volgt direct dat $e^{z+w} = e^z.e^w$, en daaruit dat $1 = e^0 = e^z.e^{-z}$; dus $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$. Dit gaat dus net als vroeger in $\mathbb{R}$. Ook zie je dat als $z \in \mathbb{R}$ is ($b = 0$): $e^z = e^a =$ de waarde van onze oude *reële* e-macht!

Voorbeeld: $e^{i\pi} = -1$; de beroemde *Formule van Euler* die een relatie geeft tussen vier van de belangrijkste getal-uitvindingen: e, π, i en -1!

Wanneer is $e^z = 1$? e^z heeft norm e^a en argument $b\ mod\ 2\pi$. Dus moet $e^a = 1$, $a = 0$ en $b = 2k\pi i$ zijn, met k geheel. Dit is allemaal het gevolg van het feit dat de sin en de cos periode 2π hebben.

Wanneer is $e^z = e^w$? Dan $e^{z-w} = 1$ dus moet $z - w = 2k\pi i$ zijn; oftewel met een kleine uitbreiding van ons spraakgebruik: $z = w\ mod\ 2\pi i$.

1.7 De stelling van De Moivre.

Je kunt heel gemakkelijk allerlei goniometrische formules afleiden en onthouden via de complexe getallen. Een beroemd voorbeeld is de *Stelling van de Moivre.*

Wat was ook alweer $sin\ 2x$? (antw: $2sin\ x.cos\ x$). Wat is de formule voor $cos\ 5x$? Nu: we weten dat $e^{i\phi}.e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$. Herhaald toepassen levert $(e^{i\phi})^n$ $= e^{in\phi}$ dus in $a + bi$-vorm:

$$(cos\ \phi + isin\ \phi)^n = cos\ n\phi + isin\ n\phi.$$

Bv.: $cos\ 2\phi + isin\ 2\phi = (cos\ \phi + isin\ \phi)^2 = cos^2\ \phi - sin^2\ \phi + i(2sin\ \phi.cos\ \phi)$ en we lezen af: $cos\ 2\phi = cos^2\ \phi - sin^2\ \phi$; $sin\ 2\phi = 2sin\ \phi.cos\ \phi$.

Doe het zelf eens voor $n = 3$ en vind zo de formules voor de drievoudige hoek!

1.8 De eenheidscirkel en eenheidswortels.

Elk getal z is te schrijven als $re^{i\phi}$. Hier is ϕ bepaald $mod\ 2\pi$; reduceren we hem tot de range $(-\pi, \pi]$ dan is hij het argument van z, en r en $\phi\ mod\ 2\pi$ zijn de poolcoördinaten van z. Als $r = 1$ dan ligt z op

De eenheidscirkel: $\{z \mid |z| = 1\} = \{e^{i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}$.

Zij $n > 0$ geheel. **De n^{e} eenheidswortels** zijn de getallen z die voldoen aan $z^n = 1$. Ze hebben lengte 1 (want $|z|^n = 1$ in $\mathbb{R}$). Schrijf daarom $z = e^{i\phi}$. Dan is $z^n = e^{ni\phi} = 1$ en we zagen dat dan $ni\phi = k.2\pi i$ voor gehele k. Er volgt: ϕ is van de vorm $k.\frac{2\pi}{n}$. Echter, $n.\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ dus we hoeven alleen $k = 0, 1, \cdots, n-1$ te beschouwen. Er volgt:

De oplossingen van $z^n = 1$ zijn precies $1,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{2.\frac{2\pi i}{n}}, \cdots,\ e^{(n-1).\frac{2\pi i}{n}}$.

Makkelijker genoteerd: $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ met $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ een zgn. *primitieve* n^{e} eenheidswortel.

De n^{e} eenheidswortels liggen op een regelmatige n-hoek. Ze zijn uiterst belangrijk in de informatica en de telecom, onder meer omdat ze optreden in de FFT (snelle Fouriertransformatie, toepassingen alom bv. in JPEG en in de complexiteitstheorie).

1.9 Worteltrekken.

Laat $z \neq 0$. Wat zijn de oplossingen w van $w^n = z$? Schrijf z in poolcoördinaten als $re^{i\phi}$. Dan $|w|^n = r$ dus $|w| = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$. Stel $u = \frac{w}{|w|}e^{-i\frac{\phi}{n}}$. Er volgt $u^n = \frac{w^n}{r}e^{-i\phi} = \frac{z}{r}e^{-i\phi} = e^{i\phi}.e^{-i\phi} = 1$ dus u is een n^{e} eenheidswortel. Hiermee zien we:

De oplossingen w van $w^n = z$ zijn precies: $\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\phi}{n}}\omega^k$, waar $k = 0, 1, \cdots, n-1$

en $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}}$. We noemen dit *de n^{e}machtswortels uit z.*

Het argument van $\sqrt[n]{z}e^{i\phi}\omega^k$ is $\frac{\phi}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\ mod\ 2\pi$.

Het recept is dus: maak een regelmatige n-hoek met als één van de hoekpunten het complexe getal dat als argument heeft $\frac{1}{n}arg\ z$ en als lengte $\sqrt[n]{|z|}$. De hoekpunten van deze n-hoek zijn precies de n^{e}machts wortels uit z.

1.9.1 Het geval $n = 2$.

Laat $n = 2$. De wortels uit $z \neq 0$ zijn $\sqrt{|z|}e^{i\frac{\phi}{2}}\omega^k$, waar $\omega = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$ en $k = 0, 1$. Net zoals in $\mathbb{R}_{>0}$ zijn er dus 2 wortels, w en $-w$. Negatieve reële getallen hebben geen wortel, maar in $\mathbb{C}$ bestaan de wortels altijd!

Voorbeeld: de wortels uit i zijn $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.i$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.i$ (plaatje!).

1.9.2 De *abc*-formule.

Over $\mathbb{R}$ los je de vergelijking $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ als volgt op: $ax^2+bx+c = 0$ is óm te schrijven tot $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Je ziet dat 2ax+b gelijk is aan $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Dat levert de bekende *abc*-formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nemen we nu de vergelijking $Az^2 + Bz + C = 0$ waarin A, B en C in $\mathbb{C}$ mogen zitten, $A \neq 0$. Opnieuw is $(2Az + B)^2 = B^2 - 4AC$ en dus

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm W}{2A}$$

met W één van de twee complexe wortels uit $B^2 - 4AC$. In essentie is dit dezelfde "*abc*-formule" van vroeger.

Voorbeeld:
$z^2 - 2z + (i + 1) = 0$. Dan $B^2 - 4AC = 4 - 4(i + 1) = -4i$. De 2 wortels uit $-4i$ zijn $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ en we krijgen $z_{1,2} = \frac{2\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)}{2}$; dat zijn: $(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ en $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

2 Nog wat voorbeeldjes.

1. Omzetten in poolcoördinaten.
Stel $z = 1 + i\sqrt{3}$. We hebben $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, en $cos\ \phi = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$; $sin\ \phi = \frac{1}{r}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus $\phi = 60^o = \frac{\pi}{3}$ (op een veelvoud van 2π na; maar we kiezen altijd $\pi < \phi \leq \pi$ voor het argument). Dus $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. (maar ook bv. te schrijven als: $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}+37.2\pi i}$ omdat immers $e^{2\pi i} = 1$).

2. Berekenen van e^z.
z als boven. Neem hem nu weer in gewone coördinaten: $z = 1 + i\sqrt{3}$. Dan $e^z = e^{1+i\sqrt{3}} = e(cos\ \sqrt{3} + isin\ \sqrt{3})$ (ik kan het ook niet helpen). Dit kun je benaderen met je grafische calculator. [2]

[2] Namelijk: $e \approx 2.718281828$; $\sqrt{3} \approx 1.732050808$; $cos\ \sqrt{3} \approx -0.1605565390$; $sin\ \sqrt{(3)} \approx 0.9870266449$; en e^z wordt daarmee $\approx -0.4364379223 + 2.683016593i$. Er zit niets magisch bij!

3. Berekenen van $sin\ z$.
z als boven. Volgens de definitie is $sin\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Nu is $iz = i(1 + i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + i$. Dan is $e^{iz} = e^{-\sqrt{3}}(cos\ 1 + isin\ 1)$ en $e^{-iz} = e^{+\sqrt{3}}(cos(-1) + isin(-1))$. Enzovoorts; de getallen zijn niet mooi maar je kunt ze weer benaderen op je rekenmachientje.

4. De derdemachtswortel uit z.
De n-demachtswortels uit een getal liggen altijd op een regelmatige n-hoek. Een van de hoekpunten is het getal w met als norm $\sqrt[n]{|z|}$ en argument $\frac{1}{n} arg\ z$. De andere ontstaan volgens de theorie door w te draaien over veelvouden van $\frac{2\pi}{n}$. Teken vooral een plaatje!

Neem bijvoorbeeld $z = -\frac{7}{2}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2}i$ en trek de derdemachtswortel. Dan heeft z als lengte $\sqrt{(\frac{7}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{7}{2}\sqrt{2})^2} = 7$ en w dus als lengte $r = \sqrt[3]{7}$.

Je ziet in de figuur (of rekent uit) dat $arg\ z = \frac{3}{4}\pi$ dus één van de wortels heeft als argument $\frac{1}{4}\pi$ en is gelijk aan $\sqrt[3]{7} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[3]{7}(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.i)$ (teken een plaatje!).

De twee andere wortels schelen een hoek $\frac{\pm 2\pi}{3}$ met w. Ze zijn $e^{\frac{2\pi}{3}} w$ en $e^{\frac{4\pi}{3}} w$ ($= e^{\frac{-2\pi}{3}} w$). Hier is bv. $e^{\frac{2\pi}{3}} = cos\ \frac{2\pi}{3} + isin\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.