Formeel Denken 2005
Uitwerkingen Tentamen van 18 januari 2005
I00030 & I00133

Propositielogica

1a.

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$\neg(a \vee b) \rightarrow \neg a \wedge \neg b$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

1b. Nee, dit is niet zo. Neem bijvoorbeeld het expliciete voorbeeld van $f := a$ en $g := \neg a$, dan wordt de waarheidstabel:

a	f	g	$f \vee g$
0	0	1	1
1	1	0	1

In de kolommen van f en g staan niet uitsluitend enen, dus $\not\models f$ en $\not\models g$, en dus geldt niet dat '$\models f$ of $\models g$'. Maar in de kolom van $f \vee g$ staan wel uitsluitend enen, dus er geldt wel dat $\models f \vee g$.

1c. Er zijn verschillende mogelijkheden, bijvoorbeeld

$$(W \wedge MT) \rightarrow HT$$

$$MT \rightarrow (W \rightarrow HT)$$

Een vertaling van de formule $(H \vee W \rightarrow B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg HT)$ is:

> Als ik het hoorcollege of het werkcollege heb gevolgd dan begrijp ik de stof en als ik de stof niet begrijp haal ik het tentamen niet.

Predicatenlogica

2a. Een mogelijke formalisatie is:

$$\forall x \in M\, \exists y \in M\, [\neg V(y) \wedge O(y, x) \wedge \forall z \in M(\neg V(z) \wedge O(z, x) \rightarrow z = y)]$$

(Je moet de $\neg V(z)$ erbij zetten, want anders kun je voor z de moeder nemen!)

2b. Neem bijvoorbeeld het model $(\mathbb{N}, <)$, en de interpretatie:

$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \to & x > y \end{array}$$

(Dat maakt de formule waar, want voor iedere x kun je dan $y := x + 1$ nemen.)

2c. Voor elk model M en interpretatie I geldt de formule en dus is de formule waar.

- Bekijk alle modellen met een leeg domein. Die modellen verschillen dus alleen maar wat betreft de interpretatie. Omdat er geen $x \in D$ is, geldt automatisch dat $\forall x \in D[f]$ waar is voor alle formules f.
- Bekijk alle modellen en interpretaties waarvoor $R(x,x)$ nooit waar is. Dat betekent dat de $R(x,x)$ links van de $\to$ altijd 0 als waarde heeft. Maar gezien de waarheidstabel van $\to$ maakt het dan niet meer uit of wat er rechts van de $\to$ staat waar is of niet: $0 \to f = 1$ voor alle formules f (populair gezegd).
- Bekijk alle modellen en interpretaties waarbij $R(x,x)$ waar is voor sommige x. De formule zegt nu dat als $R(x,x)$ waar is, dan is er een $y \in D$ waarvoor ook $R(x,y)$ waar is. Omdat je deze y altijd gelijk aan x kunt kiezen klopt de formule ook in dit geval.

Het belangrijkste is dat je het derde geval hebt beschreven.

Talen

3a. Een mogelijke reguliere expressie voor deze taal is

$$a^*(ba^*b)^*a^*$$

dus er geldt dat

$$L_1 = \mathcal{L}\big(\, a^*(ba^*b)^*a^* \,\big)$$

3b. Nee, er geldt niet dat $abb \in L_2$, ofwel: $abb \notin L_2$.

Een invariant die laat zien dat abb niet in de taal zit is

$P(w) :=$ 'als $w \leq$ twee b's bevat, dan is het aantal a's in $w \geq$ het aantal b's in w'

Deze eigenschap geldt voor S, en de eigenschap blijft behouden onder de producties (pas op! het moet *ook* behouden blijven onder de producties bij woorden die je helemaal niet met de grammatica kan maken!), maar het geldt niet voor abb. Dus is er geen productie die abb oplevert en zit abb niet in de taal.

Ja, er geldt wel: $aabbbb \in L_2$.

Een productie van dit woord is:

$$S \to \underline{aSb} \to a\underline{A}b \to a\underline{aA}b \to aa\underline{bbb}b$$

(De onderstrepingen zijn ter verduidelijking, en zijn niet nodig voor een correct antwoord.)

3c. Nee. In het dictaat staat op bladzijde 24 dat de taal $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niet regulier is. Op bladzijde 25 staat dat die taal wel contextvrij is.

Als er bij elke contextvrije taal ook een rechtslineaire grammatica zou bestaan, dan bestaat er dus bij deze L_2 een rechtslineaire grammatica. Echter, op grond van Stelling 3.25 is de taal L_2 dan wel regulier terwijl we al hebben gezien dat dat niet zo is. Dus kan de bewering dat bij elke contextvrije taal er ook een rechtslineaire grammatica bestaat niet waar zijn.

3d. Een rechtslineaire grammatica die de taal

$$L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{iedere } a \text{ in } w \text{ wordt direct gevolgd door een } b\}$$

voortbrengt is:

$$S \quad \to \quad abS \mid bS \mid \lambda$$

Combinatoriek

4a. Een wandeling waarbij je elke straat precies één keer doorloopt is een Euler pad. Volgens stelling 4.7 bestaat zo'n pad precies dan als er hoogstens twee punten met oneven graad zijn. Hier hebben echter de punten 1, 7, 10 en 11 graad 3. Dus zo'n wandeling bestaat niet.

Zo'n kroegentocht bestaat wel. Dit is eigenlijk de vraag of er een Hamiltonpad bestaat. Neem bijvoorbeeld: 1, 2, 8 ,9, 3, 11, 4, 5, 6, 10, 7 en 12. (Omdat je van 12 ook nog naar 1 kunt gaan is er zelfs een Hamiltoncircuit, maar dat werd niet gevraagd.)

4b. Bewijs met inductie:

Basisstap $n = 1$: $a_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$ en dat klopt dus.

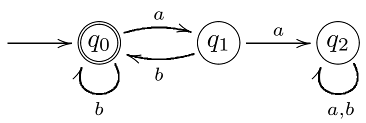
Inductiestap $n > 1$: Neem aan dat geldt $a_{n-1} = 2^{n-1-1} = 2^{n-2}$. We moeten nu laten zien dat $a_n = 2^{n-1}$.

$$\begin{array}{rcll} a_n & = & 2 \cdot a_{n-1} & \text{per definitie} \\ & = & 2 \cdot 2^{n-2} & \text{met de inductiehypothese} \\ & = & 2^{1+n-2} & \text{rekenregels} \\ & = & 2^{n-1} & \text{vereenvoudigen} \end{array}$$

Dus voor alle $n \geq 1$ hebben we de stelling bewezen.

Automaten

5a. Er zijn natuurlijk verschillende mogelijkheden, maar dit lijkt wel de kleinste automaat te zijn die het doet.



5b. Gegeven non-deterministische automaten M_1 en M_2 met precies één eindtoestand[1] die $\mathcal{L}(r_1)$ en $\mathcal{L}(r_2)$ herkennen, hoe maak je dan een non-deterministische automaat met precies één eindtoestand die $\mathcal{L}(r_1 \cup r_2)$ herkent?

- Maak een nieuwe starttoestand q_0.
- Verbind deze q_0 via λ-overgangen met de oude starttoestanden uit M_1 en M_2. Uiteraard zijn deze twee toestanden nu dus geen starttoestand meer.
- Voeg een nieuwe eindtoestand toe.
- Verbind de twee oude eindtoestanden met de nieuwe eindtoestand via een λ-overgang. Uiteraard mogen de oude eindtoestanden nu geen eindtoestand meer zijn.

Gegeven een non-deterministische automaat M met precies één eindtoestand die $\mathcal{L}(r)$ herkent, hoe maak je dan een non-deterministische automaat met precies één eindtoestand die $\mathcal{L}(r^*)$ herkent?

- Voeg een λ-transitie toe van de eindtoestand van M naar de begintoestand van M.
- Voeg een λ-transitie toe van de begintoestand van M naar de eindtoestand van M.
- Als de begintoestand van M toevallig gelijk was aan de eindtoestand hoef je helemaal niets te doen.

[1] Uit de woorden 'zulke' en 'dergelijke' volgt dat de automaten die je krijgt inderdaad precies één eindtoestand hebben.