Formeel Denken 2006
Uitwerkingen Hertentamen

1. $$\neg Z \leftrightarrow KZ$$

   Dit is de interpretatie: 'Als het geen zondag is is Kortjakje ziek, maar als het zondag is is Kortjakje niet ziek.'

2. Deze formule moet gelezen worden als $(((\neg a \land b) \lor c) \to d)$.

a	b	c	d	$\neg a$	$\neg a \land b$	$\neg a \land b \lor c$	$\neg a \land b \lor c \to d$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1

3. Neem bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f &= a \\ g &= a \to a \end{aligned}$$

   en kijk naar de bijbehorende waarheidstabel:

	f	g
a	a	$a \to a$
0	0	1
1	1	1

   Hieruit blijkt dat g waar is in alle modellen waarin f waar is (want g is *altijd* waar), maar dat er een model is waarin f niet waar is terwijl g wel waar is (namelijk het model met $v(a) = 0$.)

4. $$\exists x, y \in S\, \forall z \in S\, (H(z) \to z = x \vee z = y)$$

5. *Er is een student zodanig dat* als *hij of zij het tentamen Formeel Denken gehaald heeft, dat hij of zij dan ook het hertentamen Formeel Denken doet.*

   Deze zin is waar, want er bestaat een student die het tentamen Formeel Denken niet gedaan heeft en dus zeker niet gehaald: voor deze student is de implicatie waar omdat de conditie niet waar is.

6. Neem $M = (\mathbb{N}, <)$ en interpretatie I:

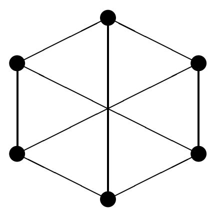
$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \to & x < y \end{array}$$

   Voor ieder getal x is er een groter getal (neem bijvoorbeeld $y = x + 1$), maar is er ook een getal dat niet groter is (neem bijvoorbeeld $y = x$ zelf).

7. $$(a \cup b)^* \cup (a \cup b)^* c (a \cup b)^* \cup (a \cup b)^* c (a \cup b)^* c (a \cup b)^*$$

8. $$\begin{array}{rcl} S & \to & aS \mid bS \mid cA \mid \lambda \\ A & \to & aA \mid bA \mid cB \mid \lambda \\ B & \to & aB \mid bB \mid \lambda \end{array}$$

9. Nee, iedere eindige taal is regulier. De lege taal wordt gegeven door de reguliere expressie $\emptyset$, en de taal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ door de reguliere expressie $w_1 \cup \cdots \cup w_n$.

10. 

   (Dit is toevallig ook de $K_{3,3}$.) Hetzelfde schema werkt voor alle $n \geq 2$: een $2n$-hoek waarvan ieder hoekpunt ook met het punt er diametraal tegenover verbonden is.

11. $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$. (De a-tjes zijn dus niets anders dan de rij van Fibonacci twee plaatsen verschoven.)

   We bewijzen met inductie naar i dat $a_i > 0$ *en* $a_{i+1} > 0$ als $i \geq 3$.

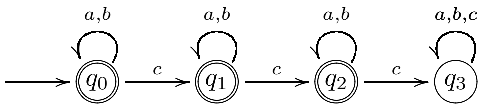
De basisstap is $i = 3$, en inderdaad zowel $a_3 > 0$ als $a_4 > 0$.

De inductiestap is dat als het geldt voor i (de inductiehypothese), dat het dan ook geldt voor $i + 1$. Dus we weten dat $a_i > 0$ en $a_{i+1} > 0$. Daaruit volgt dat dan ook dat $a_{i+2} > 0$ (want de som van twee positieve getallen is positief), en we hadden al dat $a_{i+1} > 0$, dus geldt de uitspraak ook voor $i + 1$.

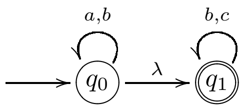
12. De som van alle binomiaalcoëfficienten van de vorm $\binom{2n}{i}$ (een rij in de driehoek van Pascal) is 2^{2n}. Dus is elk van deze coëfficienten kleiner of gelijk dan deze som, en in het bijzonder geldt dit ook voor de coëfficient met $i = n$.

    Deze ongelijkheid voor $n = 1$ is $2 \leq 4$, voor $n = 2$ is het $6 \leq 16$, en voor $n = 3$ is het $20 \leq 64$.

13.



14.



15.