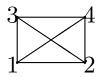
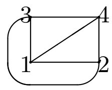
Formeel Denken 2008
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde

1. De K_4 is duidelijk planair, en heeft kleurgetal 4 want alle punten zijn met elkaar verbonden en moeten in een kleuring dus alle een verschillende kleur krijgen.





2. De graaf K_n heeft n punten van graad $n-1$. Volgens de stelling van Euler heeft een graaf een Eulercykel precies dan als alle punten in de graaf even graad hebben. Dat betekent dus dat $n-1$ even moet zijn, en dus zijn de K_n met een Eulercykel precies de K_n waarvoor n oneven is, ofwel K_3, K_5, K_7, ... (In de K_1 bestaat geen pad, dus zeker geen cykel, en dus al helemaal geen Eulercykel.)

   Als n even is, dan hebben alle punten oneven graad. Volgens de stelling van Euler is er een Eulerpad als het aantal punten met oneven graad kleiner of gelijk twee is. Dat geldt dus alleen als $n \leq 2$, en dus is de enige K_n met geen Eulercykel maar wel een Eulerpad de graaf K_2. (In de K_0 bestaat geen pad, dus zeker geen Eulerpad.)

3. We bewijzen **met inductie naar** n de uitspraak

$$P(n) := \text{‘iedere boom met } n \text{ punten heeft } n-1 \text{ lijnen}'$$

   Basisstap, $n = 1$: In een graaf met één punt zijn er geen lijnen (want die verbinden *verschillende* punten), dus zijn er nul lijnen, en $n - 1 = 0$. Dus $P(1)$ geldt.

   Inductiestap: Stel de **inductiehypothese** $P(n)$ geldt, ofwel dat we al weten dat alle bomen met n punten $n-1$ lijnen hebben. We moeten hieruit $P(n+1)$ afleiden, ofwel we moeten laten zien dat iedere boom met $n+1$ punten n lijnen heeft.

   Neem een boom G met $n+1$ punten. We mogen gebruiken dat in G een punt met graad één bestaat. Laat dit punt met de bijbehorende lijn weg, dan krijgen we een graaf G' met n punten.

   We laten zien dat G' ook een boom is. Als G' cykels zou bevatten, dan zouden deze cykels ook voorkomen in G, en dat kan niet, want G was een boom. Verder is G' samenhangend, want ieder tweetal punten in G' was verbonden door een pad in G (omdat G een boom en dus samenhangend is), en dat pad kan niet via het punt dat we hebben weggelaten lopen, want anders had dat punt graad groter dan één gehad. Dus is dit pad ook een pad in G'.

   We weten dus dat G' een boom is, en dus volgens de inductiehypothese $n-1$ lijnen heeft. Maar G' scheelt precies één lijn met G, en dus had G precies n lijnen.

4. We bewijzen **met inductie naar** n dat $a_n = 3$. Hieruit volgt natuurlijk dat ook $a_{1000} = 3$, het antwoord van de opgave.

   Basisstap. $a_0 = 3$, dus dat klopt.

   Inductiestap. Zij gegeven de **inductiehypothese** dat $a_n = 3$. Dan volgt hieruit dat

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$$

5.

$$\begin{aligned}
\binom{0}{0} &= 1 \\
\binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 1+1=2 \\
\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} &= 1+2+1=4 \\
\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 1+3+3+1=8
\end{aligned}$$

De algemene formule is dus:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dit volgt direct uit het binomium van Newton:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^n$$

6. Uitgaande van een vijfdaagse werkweek zijn er

$$\binom{5}{2} = 10$$

mogelijkheden om twee dagen vrij te nemen. (Specifiek: maandag & dinsdag, maandag & woensdag, maandag & donderdag, maandag & vrijdag, dinsdag & woensdag, dinsdag & donderdag, dinsdag & vrijdag, woensdag & donderdag, woensdag & vrijdag, en donderdag & vrijdag.)

Dit getal is te vinden in de driehoek van Pascal in de positie:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$