Formeel Denken 2009
Hertentamen

Dit tentamen heeft 15 opgaven en iedere opgave is 6 punten waard. De eerste 10 punten voor deze toets zijn gratis en het cijfer is het aantal punten gedeeld door tien. Veel succes!

1. In deze opgave gebruiken we de interpretatie:

R	het regent
N	ik word nat
D	ik ben droog

   Formaliseer de volgende Nederlandse zin als formule van de propositielogica:

   Hoewel het regent word ik niet nat, maar droog ben ik ook niet.

   Geef voorts de betekenis van de volgende formule van de propositielogica in het Nederlands:

$$(D \to \neg N) \wedge \neg(\neg N \to D)$$

2. Geef de waarheidstabel van de propositielogische formule

$$a \vee b \wedge c$$

3. Geldt de volgende equivalentie?

$$(a \vee b) \wedge c \equiv a \vee (b \wedge c)$$

   Verklaar je antwoord.

4. In deze opgave gebruiken we de interpretatie:

M	het domein van de mannen
V	het domein van de vrouwen
$K(x)$	x is knap
$I(x)$	x is intelligent
$H(x, y)$	x houdt van y

   Formaliseer de volgende Nederlandse zin als formule van de predikaatlogica met gelijkheid:

   Mannen houden van knappe vrouwen en vrouwen houden van intelligente mannen.

Geef voorts de betekenis van de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid in het Nederlands:

$$\exists x \in V \, \forall y \in V \, (K(y) \wedge I(y) \leftrightarrow y = x)$$

5. Wat betekent het symbool $\models$ in de volgende uitspraak?

$$\exists x \in M \, (I(x) \wedge K(x)) \models \exists x \in M \, I(x)$$

Geldt deze uitspraak? Hebben in deze context de symbolen M en $I(x)$ nog iets te maken met het woordenboek uit de vorige opgave? Verklaar je antwoorden.

6. Geef een model M en een interpretatie I zodanig dat

$$(\forall x \in D \, \exists y \in D \, R(x,y)) \wedge (\forall x, y, z \in D \, (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow \neg R(y,z)))$$

waar is in dat model en onder die interpretatie. Verklaar je antwoord.

7. Geef een reguliere expressie voor de taal van alle woorden over het alfabet $\{a, b\}$ waarin precies drie a's voorkomen (dus $aaba$ zit in deze taal). Verklaar je antwoord.

8. De contextvrije grammatica G heeft als productieregels

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \mid bS \mid \lambda \\ A & \rightarrow & bS \mid \lambda \end{array}$$

Iemand claimt dat de eigenschap

$$P(w) := w \text{ bevat niet het deelwoord } aa$$

een invariant is die aantoont dat er geen woorden door deze grammatica worden geproduceerd die het deelwoord aa bevatten. Is dit correct? Verklaar je antwoord.

9. Geef een eindige automaat die de taal herkent die geproduceerd wordt door de rechtslineaire grammatica uit de vorige opgave.

10. Geef een planaire graaf met kleurgetal 3 die geen Hamiltonpad bevat. Verklaar je antwoord.

11. We definiëren de rij a_n met de recursievergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & 2a_n + 1 \quad \text{als } n \geq 0 \end{array}$$

Geef de waarde van a_5 en laat zien hoe je deze hebt berekend. Bewijs voorts met inductie dat $a_n + 1$ deelbaar is door 4 voor alle $n \geq 2$.

12. Geef het binomium van Newton voor $(x+y)^5$, en leg uit waar de coëfficiënten in deze formule te vinden zijn in de driehoek van Pascal.

13. In deze opgave gebruiken we de interpretatie:

R	het regent
W	er valt water uit de lucht

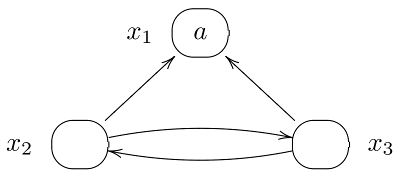
Formaliseer de volgende Nederlandse zin als formule van de epistemische logica:

Je weet niet of het regent.

Geef voorts de betekenis van de volgende formule van de modale logica in het Nederlands:

$$\Box(R \to W) \land \neg(\Box R \to W)$$

14. Geef aan in welke werelden van het Kripke-model



de uitspraak

$$(\Box\Diamond a) \leftrightarrow \neg(\Diamond\Box a)$$

waar is. Verklaar je antwoord.

15. Formaliseer de volgende eigenschap als LTL formule:

a is op alle even tijdstippen waar, en a is op alle oneven tijdstippen niet waar.