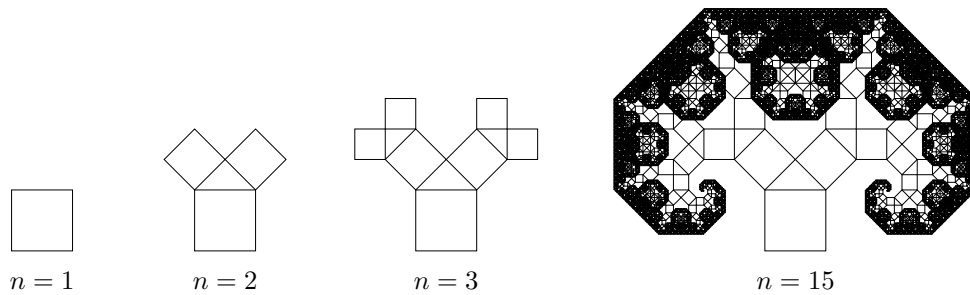


Formeel Denken 2009 Toets 4: Discrete wiskunde

Iedere opgave in deze toets is vijftien punten waard. Het cijfer voor de toets is het aantal punten gedeeld door tien, en de eerste tien punten zijn gratis. Veel succes!

1. Teken de K_4 , kies twee punten in deze graaf, en geef zes verschillende paden tussen deze twee punten.
2. Zijn er niet-samenhangende grafen met een Euler-pad? En zijn er niet-samenhangende grafen met een Hamilton-pad? Geef in beide gevallen een voorbeeld, of verklaar waarom zo'n graaf niet bestaat.
3. Geef een niet-planaire graaf, en verklaar hoe je weet dat hij niet planair is. (Gebruik zonodig een stelling uit de syllabus over planaire grafen.)
4. De *boom van Pythagoras* van orde n bestaat uit een vierkant, plus (indien $n > 1$) twee verkleinde bomen van Pythagoras van orde $n - 1$ er diagonaal bovenop geplakt:



(De boom van orde 2 is het diagram uit het bewijs van de stelling van Pythagoras, vandaar de naam.)

Laat a_n het aantal vierkantjes in de boom van Pythagoras van orde n zijn. Bewijs met inductie dat $a_n = 2^n - 1$. (De meest rechtse boom in het plaatje bestaat dus uit $2^{15} - 1 = 32767$ vierkantjes.)

5. Wat is $(1+x)^6$ volgens het binomium van Newton? En wat is het verband tussen deze veelterm en de driehoek van Pascal?
6. Op hoeveel manieren kunnen we van 6 objecten er 2 aan Alice en 1 aan Bill geven (waarbij Alice en Bill natuurlijk verschillende objecten krijgen).