Formeel Denken 2010
Hertentamen
(08/03/11)

Dit tentamen heeft 15 opgaven en iedere opgave is 6 punten waard. De eerste 10 punten voor deze toets zijn gratis en het cijfer is het aantal punten gedeeld door tien. Veel succes!

1. Formaliseer als formule van de propositielogica de volgende zin:

   Ik maak alleen het hertentamen als ik het tentamen niet gehaald heb.

   Gebruik als woordenboek:

T	ik maak het tentamen
TG	ik heb het tentamen gehaald
H	ik maak het hertentamen
HG	ik heb het hertentamen gehaald

2. Schrijf de formule
   $$a \to b \vee b \to a$$
   volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef de waarheidstabel.

3. Geldt de volgende uitspraak?
   $$\models (a \to b) \vee (b \to a)$$
   En geldt de volgende uitspraak?
   $$\models a \to b \quad \text{of} \quad \models b \to a$$
   Verklaar je antwoorden op een manier die laat zien dat je begrijpt wat het symbool '$\models$' betekent.

4. Formaliseer als formule van de predikaatlogica de volgende zin:

   Alle mannen hebben een moeder.

   Gebruik als woordenboek:

M	het domein van de mensen
$V(x)$	x is een vrouw
$K(x, y)$	x is het kind van y

5. Geef een formule van de predikaatlogica met gelijkheid die zegt dat het domein E precies drie elementen bevat.

6. Beschouw de volgende formule van de predikaatlogica:

$$(\exists x \in D\, R(x,x)) \wedge \forall x, y \in D\, (R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,x))$$

   Schrijf deze formule volgens de officiële grammatica uit de syllabus. Bestaat er een interpretatie in een model die deze formule waar maakt? Zo ja, geef zo'n interpretatie. Zo nee, leg uit waarom zo'n interpretatie niet bestaat.

7. Geef een alfabet Σ en een reguliere expressie r waarvoor geldt dat zowel $\mathcal{L}(r)$ als $\overline{\mathcal{L}(r)}$ oneindig veel verschillende woorden bevatten. Verklaar je antwoord.

8. Beschouw de contextvrije grammatica G gegeven door:

$$S \quad \rightarrow \quad aSb \mid \lambda$$

   Is dit een rechtslineaire grammatica? Geef een invariant van G die laat zien dat $\mathcal{L}(G) \neq \mathcal{L}(a^*b^*)$. Verklaar je antwoord.

9. Geef een eindige automaat die de volgende taal herkent:

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ begint met } aab \text{ en } w \text{ eindigt op } aab\}$$

10. Geef een graaf met vier punten en vier lijnen die niet isomorf is aan de $K_{2,2}$. Verklaar je antwoord.

11. Geef de recursieve definitie van de faculteitsfunctie, $n!$. Bewijs met inductie dat $n!$ even is voor alle $n \geq 2$.

12. Wim heeft een onuitputtelijke berg witte, rode en zwarte sokken. Op hoeveel verschillende manieren (qua kleuren) kan Wim deze sokken aantrekken? Hierbij geldt een witte sok links en een zwarte sok rechts als een andere manier dan een zwarte sok links en een witte sok rechts.

    En op hoeveel manieren kan een octopus, d.w.z. een inktvis met acht tentakels, de sokken van Wim aantrekken? (Je hoeft dit laatste getal niet uit te rekenen, een formule is goed genoeg.) Verklaar je antwoorden.

13. Geef een interpretatie van de modale operatoren waaronder het axiomaschema

$$\Box f \rightarrow \Box\Box f$$

    in zijn algemeenheid niet geldt. Verklaar je antwoord.

14. Geef een Kripke-model $\mathcal{M}$ met werelden x_1 en x_2 zodat:

$$\mathcal{M}, x_1 \Vdash \Box a \rightarrow \Box\Box a$$
$$\mathcal{M}, x_2 \nVdash \Box a \rightarrow \Box\Box a$$

15. Geef een LTL formule die zegt dat vanaf het moment dat a geldt, b verder altijd geldt.