

**Formeel Denken 2011**  
**Tentamen**  
(17/01/12)

Voor je begint, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Dit tentamen heeft 15 opgaven en iedere opgave is 6 punten waard. De eerste 10 punten voor deze toets zijn gratis en het cijfer is het aantal punten gedeeld door tien. Bedenk dat als er om een verklaring wordt gevraagd, je bij geen verklaring hoogstens de helft van de punten krijgt. Veel succes!

1. Benader de regeling omschreven in de volgende Nederlandse zin

*Als je minder dan 39 punten haalt krijg je geen positief advies, tenzij je niet dit jaar met de studie bent begonnen want dan is het advies altijd positief.*

zo goed mogelijk met een formule van de propositiologica. Gebruik als woordenboek:

$V$	je haalt 39 of meer punten
$E$	je studeert dit jaar voor het eerst
$G$	je krijgt een positief advies

Verklaar je antwoord.

2. Schrijf de formule van de propositiologica

$$a \rightarrow b \leftrightarrow a \rightarrow b \leftrightarrow a$$

met haakjes volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef de waarheidstabel. Is deze formule logisch waar? Verklaar je antwoord.

3. Geef formules van de propositiologica  $f$ ,  $g$  en  $h$  met zo min mogelijk atomen zodat:

$$\begin{aligned} f &\not\equiv g \\ g &\not\equiv h \\ f &\equiv h \end{aligned}$$

Verklaar je antwoord.

4. Benader de betekenis van de Nederlandse zin

*Iedereen houdt wel van een aardig iemand, maar er bestaat geen aardig iemand waar iedereen van houdt.*

zo goed mogelijk met een formule van de predikaatlogica. Gebruik als woordenboek:

$M$	het domein van de mensen
$A(x)$	$x$ is aardig
$H(x, y)$	$x$ houdt van $y$

5. Benader de betekenis van de Nederlandse zin

*Als er precies twee aardige mensen bestaan, dan houden die van elkaar.*

zo goed mogelijk met een formule van de predikaatlogica met gelijkheid. Gebruik hetzelfde woordenboek als in de vorige opgave.

6. Schrijf de formule van de predikaatlogica:

$$\exists x \in D \forall y \in D \neg R(x, y)$$

met haakjes volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef een model plus een interpretatie in dat model die deze formule waar maakt. Verklaar je antwoord.

7. Laat zien dat voor willekeurige talen  $L$  en  $L'$  geldt dat  $\lambda \in LL'$  dan en slechts dan als  $\lambda \in L$  en  $\lambda \in L'$ .
8. Geef een reguliere expressie die de taal

$$L_S := \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{als } w \text{ een } a \text{ bevat dan bevat hij ook een } b\}$$

beschrijft.

9. Geef een rechtslineaire contextvrije grammatica voor de taal  $L_7$  uit de vorige opgave. Gebruik ten hoogste drie hulpsymbolen (dat is inclusief het startsymbool  $S$ ).

(Hint: een eindige automaat voor deze taal maken is waarschijnlijk eenvoudiger dan direct de grammatica opschrijven. Met zo'n automaat kun je vervolgens de grammatica makkelijk opschrijven.)

10. Wat is het minimaal aantal punten van een niet-lege graaf waarin ieder punt graad vier heeft, maar die geen Eulercykel bezit. Verklaar je antwoord. Geef een voorbeeld van zo'n graaf met dit aantal punten.

(Mocht je deze vraag niet kunnen beantwoorden, beschrijf dan in ieder geval hoe je naar een oplossing hebt gezocht.)

11. We definiëren met recursie een rij getallen  $a_n$  (met  $n \geq 0$ ) door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= 10a_n + 1 \quad \text{als } n \geq 0 \end{aligned}$$

Geef de eerste vijf getallen in deze rij (dus  $a_0$  tot en met  $a_4$ ). Bewijs vervolgens met inductie dat

$$a_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

voor alle  $n \geq 0$ .

12. We hebben een la met drie rode en vier zwarte verder identieke sokken (er is blijkbaar ooit een rode sok weggeraakt). Op hoeveel manieren kun je twee sokken van gelijke kleur uit de la halen? En op hoeveel manieren kun je überhaupt twee sokken uit de la halen? Wat is dus de kans dat als je willekeurig twee sokken uit de la haalt, je een paar van dezelfde kleur treft? Geef aan welke binomiaalcoëfficiënten iets met je antwoorden te maken hebben, en hoe je ze hebt berekend.

13. Benader de betekenis van de Nederlandse zin

*Een placebo werkt niet als je er niet in gelooft.*

zo goed mogelijk met een formule van de doxastische logica. Gebruik als woordenboek:

$P$	de placebo werkt
-----	------------------

14. Geef een Kripke-model  $\mathcal{M}$  zodat

$$\mathcal{M} \not\models (\Box \neg a \rightarrow \neg \Box a)$$

Verklaar je antwoord.

15. Geef een LTL formule die uitdrukt dat telkens als  $a$  waar is, het minstens drie tijdseenheden duurt voor  $a$  weer waar kan zijn (er zijn dan dus minstens twee tussenliggende tijdstippen waarop  $a$  niet waar is.)