

**Formeel Denken 2011**  
**Uitwerkingen toets 2: Predikaatlogica**  
(05/10/11)

1.

$$(\exists x \in M O(k, x))$$

Deze formule is niet logisch waar, want hij is niet waar in het model

$$M = (\mathbb{N}, 0, =, <)$$

onder de interpretatie

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \mathbb{N} \\ k &\rightarrow 0 \\ H(x, y) &\rightarrow x = y \\ O(x, y) &\rightarrow y < x \end{aligned}$$

want er bestaat geen natuurlijk getal dat kleiner is dan 0.

Een makkelijkere (maar minder wiskundige en daardoor minder precieze) interpretatie waaronder de formule niet waar is, is die uit de opgave, waarbij  $k$  wordt geïnterpreteerd als een Karel die geen kinderen heeft.

2. Merk op dat de frase ‘zijn kind’ impliceert dat Karel precies één kind heeft.

$$(\exists x \in M ((\forall y \in M (O(k, y) \leftrightarrow (y = x))) \wedge (\forall y \in M (H(k, y) \leftrightarrow (y = x)))))$$

Deze formule is niet logisch waar, want is ook niet waar onder de interpretaties uit het vorige antwoord.

3. *Iedereen die een kleinkind heeft, heeft ook een kind.*  
*Iedere grootouder is ook een ouder.*

$$(\forall x \in M ((\exists y \in M (\exists z \in M (O(x, y) \wedge O(y, z)))) \rightarrow (\exists y \in M O(x, y))))$$

Deze formule is wél logisch waar, want uit het bestaan van  $y$  en  $z$  volgt natuurlijk zeker het bestaan van  $y$ , ongeacht de betekenis van de symbolen in de formule.

- 4.
- ‘ $\models f$ ’ staat voor ‘ $f$  is logisch waar’, wat betekent dat  $f$  waar is in ieder model onder iedere interpretatie.
  - ‘ $f \models g$ ’ staat voor ‘ $g$  is een logisch gevolg van  $f$ ’, wat betekent dat  $g$  waar onder iedere interpretatie waaronder  $f$  waar is.
  - $(M, I) \models f$  staat voor ‘ $f$  is waar onder de interpretatie  $I$  in het model  $M$ ’.

5. Bij de eerste formule mag de  $y$  van de  $x$  afhangen, maar bij de tweede formule niet. De eerste formule is dus logisch waar (neem voor  $y$  gewoon  $x$ ), en de tweede niet (want er is een interpretatie waaronder hij niet waar is). De tweede formule is precies dan waar als  $D$  wordt geïnterpreteerd als een domein met één element.