Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Toets 5: Modale logica
(14/12/12)

1. Laat *volitieve logica* de variant van modale logica zijn waarin '$\Box f$' wordt geïnterpreteerd als 'ik wil f' en '$\Diamond f$' wordt geïnterpreteerd als 'ik heb geen bezwaar tegen f'. Gebruik verder het woordenboek:

C	ik eet chocolade
L	ik doe aan de lijn

Geef een Nederlandse zin die zo goed mogelijk de betekenis van de volgende formule van deze modale logica benadert:

(a) $\Diamond C \wedge \neg\Box C$ (10 punten)

Ik heb geen bezwaar tegen het eten van chocolade, maar het is niet zo dat ik chocolade wíl eten.

(Merk op dat '*ik wil geen chocolade eten*' en '*ik wil niet chocolade eten*' corresponderen met $\Box\neg C$ en niet met $\neg\Box C$. Ze corresponderen voor mij dus niet met '*ik heb geen bezwaar tegen het niet eten van chocolade*'. Voorts kan '*ik wil niet dat ik chocolade eet*' misschien wel in de juiste betekenis worden gelezen, maar is niet duidelijk genoeg om alle punten te scoren. Het valt zelfs te betwisten of het goed Nederlands is.)

Geef vervolgens formules van deze modale logica die zo goed mogelijk de betekenis van de volgende Nederlandse zinnen benaderen:

(b) *Ik wil aan de lijn doen, dus eet ik geen chocolade.* (10 punten)

$$\Box L \wedge \neg C$$

(c) *Ik heb zin in chocolade, maar ik wil daar geen zin in hebben.* (10 punten)

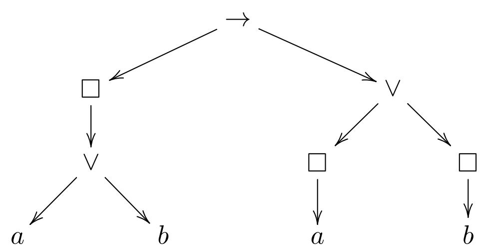
$$\Box C \wedge \Box\neg\Box C$$

(We weten dat 'zin hebben in' niet precies samenvalt met wat uitdrukbaar is door $\Box$ en $\Diamond$ in deze logica. Je moet de zinnen interpreteren op een manier die wél uitdrukbaar is met deze operatoren.)

2. Deze opgave gaat over de formule:

$$\Box(a \vee b) \to \Box a \vee \Box b$$

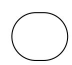
(a) Teken de boom die bij deze formule hoort. (10 punten)



(b) Schrijf deze formule volgens de officiële grammatica uit de syllabus (10 punten)

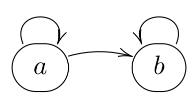
$$(\Box(a \vee b) \rightarrow (\Box a \vee \Box b))$$

(c) Geef een Kripke model waarin deze formule waar is. Verklaar je antwoord. (15 punten)

$\mathcal{M}_1 :$ x_1 

Als tripel: $\mathcal{M}_1 = \langle W, R, V \rangle$ met $W = \{x_1\}$, $R(x_1) = \emptyset$ en $V(x_1) = \emptyset$. Omdat $R(x_1) = \emptyset$ geldt automatisch $x_1 \Vdash \Box a$. Maar op grond van de $\vee$ geldt dan ook $x_1 \Vdash \Box a \vee \Box b$. En op grond van de $\rightarrow$ geldt dan ook $x_1 \Vdash \Box(a \vee b) \rightarrow \Box a \vee \Box b$. En omdat x_1 de enige wereld is, geldt ook $\mathcal{M}_1 \vDash \Box(a \vee b) \rightarrow \Box a \vee \Box b$.

(d) Geef een reflexief Kripke model waarin deze formule niet waar is. Verklaar je antwoord. (15 punten)

$\mathcal{M}_2 :$ x_1 

x_2

Als tripel: $\mathcal{M}_2 = \langle W, R, V \rangle$ met $W = \{x_1, x_2\}$, $R(x_1) = \{x_1, x_2\}$, $R(x_2) = \{x_2\}$, $V(x_1) = \{a\}$ en $V(x_2) = \{b\}$. Merk op dat dit model reflexief is, want vanuit elke wereld is er een pijl naar die wereld zelf. Bekijk onderstaande tabel (geen waarheidstabel!) om te zien welke formules waar zijn in de twee werelden:

$\Vdash$	a	b	$a \vee b$	$\Box(a \vee b)$	$\Box a$	$\Box b$	$\Box a \vee \Box b$	$\Box(a \vee b) \rightarrow \Box a \vee \Box b$
x_1	1	0	1	1	0	0	0	0
x_2	0	1	1	1	0	1	1	1

En omdat $x_1 \nVdash \Box(a \vee b) \rightarrow \Box a \vee \Box b$ geldt ook de gevraagde eigenschap $\mathcal{M}_2 \nvDash \Box(a \vee b) \rightarrow \Box a \vee \Box b$.

3. Deze opgave gaat over de twee LTL formules: (10 punten)

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}\, a)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}\, a)$$

Bestaat er een LTL Kripke model waarin één van deze formules waar is en de andere niet? Zo ja, geef zo'n Kripke model. Zo nee, waarom niet? Verklaar je antwoorden.

Ja, zo'n model bestaat. Neem bijvoorbeeld een model met toestanden x_i voor $i \in \mathbb{N}$, waarbij a geldt in x_i dan en slechts dan als i even is. Er geldt nu $\mathcal{G}(\mathcal{F}\, a)$, want voor elke i zal uiteindelijk een even i volgen, dus $\mathcal{F}\, a$ geldt in elke toestand. Er geldt niet $\mathcal{F}(\mathcal{G}\, a)$, want voor elke i zal uiteindelijk een oneven i volgen, dus $\mathcal{G}\, a$ geldt in geen toestand.