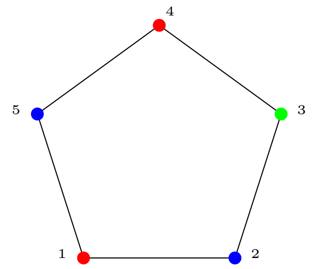
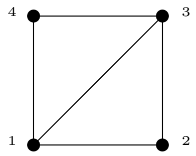
Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde
(2/12/13)

1. Geef een graaf met kleurgetal drie, die geen graaf isomorf aan de K_3 als deelgraaf bevat. Verklaar je antwoord. (15 punten)

   Het simpelste voorbeeld lijkt de cykel met lengte vijf. Omdat de cykel een oneven lengte heeft, is het kleurgetal minstens 3. Het plaatje laat zien dat het kleurgetal ook echt 3 is. Grafen die isomorf zijn aan K_3 zien er uit als driehoeken. In deze graaf zijn geen driehoeken te zien, dus zijn er geen deelgrafen isomorf aan K_3.



2. Geef een graaf die een Hamilton-circuit heeft, en die wel een Euler-pad maar geen Euler-circuit heeft. Zorg er verder voor dat deze graaf een minimaal aantal punten heeft voor deze drie eigenschappen, dus dat geen enkele graaf met minder punten al deze drie eigenschappen kan hebben. Verklaar je antwoord. (15 punten)



- De graaf heeft een Hamilton-circuit: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.
- De graaf heeft een Euler-pad: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 3$.
- De graaf heeft geen Euler-circuit, want punt 1 en punt 3 hebben oneven graad en dan zegt de stelling van Euler dat er geen Euler-circuit kan zijn.
- De graaf heeft een minimaal aantal punten. Om geen Euler-circuit te hebben moeten er punten met oneven graad zijn. Maar als er punten met graad 1 zijn, kan er geen Hamilton-circuit zijn. Dus moeten er wel twee punten met graad 3 zijn. Maar als een punt graad 3 heeft, moeten er minimaal drie andere punten zijn. Dus vier punten is het minimum en het plaatje geeft aan dat er inderdaad zo'n graaf met vier punten bestaat die voldoet aan de eisen.

3. We definiëren twee rijtjes getallen, a_n en b_n:

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & 0 & \\ a_{n+1} & = & 10\, a_n + n + 1 & \text{voor } n \geq 0 \end{array}$$

$$b_n = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10) \qquad \text{voor } n \geq 0$$

(a) Welke van deze twee definities is/zijn recursief? Verklaar je antwoord. (5 punten)

De definitie van a_n is primitief recursief; alleen de vorige a_{n-1} is nodig om a_n uit te rekenen. De definitie van b_n is niet recursief, maar direct of gesloten.

(b) Geef de waardes van a_9 en b_1, en verklaar hoe je deze waardes hebt berekend. (10 punten)

$$\begin{array}{rcccccc} a_9 & = & 10 \cdot a_8 + 9 & = & 123456780 + 9 & = & 123456789 \\ a_8 & = & 10 \cdot a_7 + 8 & = & 12345670 + 8 & = & 12345678 \\ a_7 & = & 10 \cdot a_6 + 7 & = & 1234560 + 7 & = & 1234567 \\ a_6 & = & 10 \cdot a_5 + 6 & = & 123450 + 6 & = & 123456 \\ a_5 & = & 10 \cdot a_4 + 5 & = & 12340 + 5 & = & 12345 \\ a_4 & = & 10 \cdot a_3 + 4 & = & 1230 + 4 & = & 1234 \\ a_3 & = & 10 \cdot a_2 + 3 & = & 120 + 3 & = & 123 \\ a_2 & = & 10 \cdot a_1 + 2 & = & 10 + 2 & = & 12 \\ a_1 & = & 10 \cdot a_0 + 1 & = & 0 + 1 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} b_1 & = & \frac{1}{81} \cdot (10^2 - 9 \cdot 1 - 10) \\ & = & \frac{1}{81} \cdot (100 - 9 - 10) \\ & = & \frac{1}{81} \cdot 81 \\ & = & 1 \end{array}$$

(c) Bewijs met inductie dat $a_n = b_n$ voor alle $n \geq 0$. (15 punten)

Stelling:

$a_n = b_n$ voor alle $n \geq 0$ 0

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad a_n = b_n$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, ofwel 3

$a_0 = b_0$

Dit is zo, want $a_0 = 0$ en $b_0 = \frac{1}{81} \cdot (10^1 - 9 \cdot 0 - 10) = \frac{1}{81} \cdot 0 = 0$. 4

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq 0$ 5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel 6
$a_n = b_n$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt, ofwel 7
$a_{n+1} = b_{n+1}$

Dit is zo, want 8

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 10 \cdot a_n + n + 1 \\
&\overset{\text{IH}}{=} 10 \cdot b_n + n + 1 \\
&= 10 \cdot \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+1} - 9 \cdot n - 10) + n + 1 \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 90 \cdot n - 100) + n + 1 \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 90 \cdot n - 100) + \tfrac{1}{81} \cdot 81 \cdot (n+1) \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 90 \cdot n - 100 + 81 \cdot (n+1)) \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 90 \cdot n - 100 + 81 \cdot n + 81) \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 9 \cdot n - 19) \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 9 \cdot n - 9 - 10) \\
&= \tfrac{1}{81} \cdot (10^{n+2} - 9 \cdot (n+1) - 10) \\
&= b_{n+1}
\end{aligned}
$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$ 9

4. Er zijn 256 verschillende bytes (= rijtjes nullen en enen met lengte acht).

   (a) Hoeveel van deze bytes hebben precies vier enen? (10 punten)

   Het komt er op neer dat je vier van de acht posities in de byte moet kiezen waar de vier enen worden geplaatst. Dat kan op $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$ manieren.

   (b) Hoeveel van deze bytes hebben een even aantal enen? (10 punten)

   Intuïtief: dit is de helft van het totale aantal bytes, dus 128. Formeel: kies nul, twee, vier, zes of acht plaatsen waar enen worden neergezet. Dat kan op respectievelijk $\binom{8}{0} = 1$, $\binom{8}{2} = 28$, $\binom{8}{4} = 70$, $\binom{8}{6} = 28$ en $\binom{8}{8} = 1$ manieren. Bij elkaar opgeteld levert dat 128 manieren. (Iets minder werk: tel het aantal bytes met een oneven aantal enen. Dat kan op $\binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \binom{8}{5} + \binom{8}{7} = 8 + 56 + 56 + 8 = 128$ manieren. Dus het aantal bytes met een even aantal enen is dan $256 - 128 = 128$.)

   (c) Geef aan waar je de antwoorden van de vorige twee opgaven in de driehoek van Pascal kan vinden. Geef hiertoe een voldoende groot deel van de driehoek van Pascal. (10 punten)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\boxed{1} & & 8 & & \boxed{28} & & 56 & & \boxed{70} & & 56 & & \boxed{28} & & 8 & & \boxed{1}
\end{array}
$$