Inductieschema

Stelling (of **Propositie** of **Lemma**):

$\boxed{\ldots}$ voor alle $n \geq \boxed{\ldots}$

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad \boxed{\ldots}$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(\boxed{\ldots})$ geldt, ofwel 3

$\boxed{\ldots \quad \textit{met } n \textit{ vervangen door } \boxed{\ldots}}$

Dit is zo, want ... 4

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq \boxed{\ldots}$ 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, ofwel 6

$\boxed{\ldots \quad \textit{met } n \textit{ vervangen door } k}$ (inductiehypothese)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, ofwel 7

$\boxed{\ldots \quad \textit{met } n \textit{ vervangen door } (k+1)}$

Dit is zo, want ... 8

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq \boxed{\ldots}$ 9

(De rode en blauwe ... zijn allemaal tekstueel volslagen identiek, afgezien van de twee aangegeven vervangingen. De vier onderstreepte termen moeten allemaal in het bewijs voorkomen. De groene items zijn de enige waarbij je iets anders hoeft te doen dan overschrijven.)

Voorbeeld

Propositie:

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ voor alle $n \geq 1$.

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(1)$ geldt, ofwel 3

$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

Dit is zo, want 4

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) &= \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq 1$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, ofwel 6
$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, ofwel 7
$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$

Dit is zo, want 8

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &\overset{\text{IH}}{=} \tfrac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (\tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}k) + (k+1) \\ &= \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{3}{2}k + 1 \\ &= \tfrac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)((k+1)+1) \end{aligned}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$. 9