Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica
(16/09/14)

In de eerste drie opgaven gebruiken we de volgende interpretatie voor de atomaire proposities:

D	het is dag
N	het is nacht
Z	de zon schijnt
M	de maan schijnt

1. Geef formules van de propositielogica die de volgende zinnen in betekenis zo goed mogelijk benaderen:

   (a) *Óf het is dag, óf het is nacht, maar als de zon schijnt is het geen nacht.*

   $$(((D \vee N) \wedge \neg(D \wedge N)) \wedge (Z \to \neg N))$$

   (b) *De zon schijnt alleen als het dag is, maar de zon schijnt nu niet terwijl het wel dag is.*

   $$((Z \to D) \wedge (\neg Z \wedge D))$$

   (10 + 10 punten)

2. Schrijf de volgende formule volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef een Nederlandse zin die de betekenis van deze formule zo goed mogelijk benadert:

   $$\neg D \to \neg(Z \vee M) \vee M$$

   (20 punten)

   $$(\neg D \to (\neg(Z \vee M) \vee M))$$

   'Als het geen dag is, geldt dat het of niet zo is dat de zon of de maan schijnt of dat de maan schijnt of allebei.'

   In beter Nederlands: 'Als het geen dag is, schijnt er niets of de maan schijnt.'

3. De nacht is precies die tijd van het etmaal waarin het geen dag is. Betekent dit dat de formule

   $$N \leftrightarrow \neg D$$

   logisch waar is? Verklaar je antwoord. (10 punten)

   Nee, want logisch waar betekent dat de formule waar is ongeacht de betekenis van de symbolen en die betekenis is hier juist wel van belang. Anders gezegd: de waarheidstabel die bij deze formule hoort staat hieronder. En in het bijzonder staan er nullen in de laatste kolom, dus de formule is niet logisch waar.

N	D	$\neg D$	$N \leftrightarrow \neg D$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

4. Geef de waarheidstabel van de formule

$$(a \to b \to c) \to (a \to b) \to (a \to c)$$

en leg uit hoe je daarin kunt zien of deze formule logisch waar is.

(20 punten)

a	b	c	$b \to c$	$a \to b \to c$	$a \to b$	$a \to c$	$(a \to b) \to (a \to c)$	$(a \to b \to c) \to (a \to b) \to (a \to c)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

De laatste kolom bevat alleen maar enen, dus de bewering is logisch waar.

5. Geef een model waarin de formule

$$\neg(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b) \to c$$

niet waar is.

(10 punten)

Als zo'n model v bestaat moet gelden dat $v(c) = 0$ want anders kan de implicatie nooit onwaar zijn. Verder moet $v(\neg(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b)) = 1$. Dus $v(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b) = 0$. Maar dan moet $v(b) = 0$ zijn en $v((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) = 0$. Dus moet $v(\neg a) = 0$ en dus $v(a) = 1$. Controle levert:

$v(a) = 1$	$v(\neg b \wedge \neg c) = 1$
$v(b) = 0$	$v(a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) = 1$
$v(c) = 0$	$v((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) = 0$
$v(\neg a) = 0$	$v(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b) = 0$
$v(\neg b) = 1$	$v(\neg(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b)) = 1$
$v(\neg c) = 1$	$v(\neg(((a \leftrightarrow \neg b \wedge \neg c) \to \neg a) \vee b) \to c) = 0$

Dus dit model v maakt de formule inderdaad onwaar.

6. Geef zes formules van de propositielogica, zodat voor geen enkele van deze formules geldt dat deze een logisch gevolg is van één van de andere formules. Verklaar je antwoord door 'logisch gevolg' uit te leggen in termen van modellen.

(10 punten)

Aangezien er geen beperking op het aantal atomen is, is dit eigenlijk een heel flauwe opgave. Neem a, b, c, d, e en f waarbij dit allemaal verschillende atomen zijn. Om te laten zien dat formule F geen logisch gevolg is van formule G, moeten we laten zien dat er een model v is waarvoor $v(G) = 1$ en $v(F) = 0$. Bij onze zes formules kunnen we 64 verschillende modellen maken, maar we gebruiken er slechts zes:

model	a	b	c	d	e	f
v_1	0	1	1	1	1	1
v_2	1	0	1	1	1	1
v_3	1	1	0	1	1	1
v_4	1	1	1	0	1	1
v_5	1	1	1	1	0	1
v_6	1	1	1	1	1	0

- Uit model v_1 volgt dat a geen logisch gevolg is van alle andere formules, want $v_1(b) = v_1(c) = v_1(d) = v_1(e) = v_1(f) = 1$ terwijl $v_1(a) = 0$.
- Analoog: uit model v_2 volgt dat b geen logisch gevolg is van alle andere formules.
- Analoog: uit model v_3 volgt dat c geen logisch gevolg is van alle andere formules.
- Analoog: uit model v_4 volgt dat d geen logisch gevolg is van alle andere formules.
- Analoog: uit model v_5 volgt dat e geen logisch gevolg is van alle andere formules.
- Analoog: uit model v_6 volgt dat f geen logisch gevolg is van alle andere formules.

Dus is geen van de zes formules een logisch gevolg van één van de andere vijf.