

**Formeel Denken 2014**  
**Uitwerkingen Toets 2: Predikaatlogica**  
**(30/09/14)**

In de eerste drie opgaven gebruiken we de volgende interpretatie:

$M$	het domein van de mensen
$V(x)$	$x$ is een vrouw
$G(x)$	$x$ is gelukkig
$H(x, y)$	$x$ houdt van $y$

1. Geef voor ieder van de volgende Nederlandse zinnen een formule van de predikaatlogica met gelijkheid die zo precies mogelijk de betekenis van die zin formaliseert:

- (a) *Er bestaat minstens één gelukkig mens.* (10 punten)

$$\exists x \in M G(x)$$

- (b) *Er bestaat precies één gelukkig mens.* (10 punten)

$$\exists x \in M (G(x) \wedge \forall y \in M (G(y) \rightarrow y = x))$$

- (c) *Er bestaan precies twee gelukkige mensen.* (10 punten)

$$\exists x_1, x_2 \in M (x_1 \neq x_2 \wedge G(x_1) \wedge G(x_2) \wedge \forall y \in M (G(y) \rightarrow y = x_1 \vee y = x_2))$$

2. Geef een formule van de predikaatlogica die zo precies mogelijk de betekenis van de volgende Nederlandse zin formaliseert: (15 punten)

*Een man is gelukkig als er een vrouw van hem houdt van wie hij ook houdt.*

Je moet ‘Een man is gelukkig als...’ interpreteren als ‘Voor alle mannen geldt dat zij gelukkig zijn als...’, want de interpretatie ‘Er bestaat een man waarvoor geldt dat hij gelukkig is als...’ geeft een formule die heel raar is (die is namelijk ook waar als er een man bestaat die gelukkig is om een heel andere reden, ook al zijn er géén mannen die gelukkig zijn om de reden uit de zin!)

$$\forall x \in M (\neg V(x) \wedge [\exists y \in M (V(y) \wedge H(y, x) \wedge H(x, y))] \rightarrow G(x))$$

3. Beschouw de volgende formule van de predikaatlogica:

$$\forall x \in M [\neg \exists y \in M H(y, x) \wedge V(x) \rightarrow \neg G(x)]$$

- (a) Schrijf deze formule volgens de officiële grammatica uit de syllabus.  
(10 punten)

$$(\forall x \in M ((\neg(\exists y \in M H(y, x)) \wedge V(x)) \rightarrow \neg G(x)))$$

- (b) Geef een Nederlandse zin die de betekenis van deze formule zo precies mogelijk omschrijft.  
(15 punten)

*Vrouwen van wie niemand houdt zijn niet gelukkig.*

4. Wat betekent  $f \models g$  in de predikaatlogica? Geef de definitie in termen van interpretaties in modellen.  
(10 punten)

Dit is notatie voor ‘ $g$  is een logisch gevolg van  $f$ ’. Dat betekent dat voor *iedere* interpretatie in een model die  $f$  waar maakt moet gelden dat onder diezelfde interpretatie  $g$  ook waar is.

5. Geef een interpretatie  $I_5$  in een model  $M_5$  waaronder de volgende formule niet waar is:

$$\left( \forall x \in D (P(x) \vee Q(x)) \right) \rightarrow \left( (\forall x \in D P(x)) \vee (\forall x \in D Q(x)) \right)$$

Verklaar je antwoord.  
(10 punten)

Neem bijvoorbeeld  $M_5 := (\mathbb{N}, 0)$  met als interpretatie  $I_5$ :

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow \mathbb{N} \\ P(x) &\longrightarrow (x = 0) \\ Q(x) &\longrightarrow (x \neq 0) \end{aligned}$$

Er geldt dat ieder natuurlijk getal gelijk is aan nul, of verschillend van nul, maar niet alle natuurlijke getallen zijn gelijk aan nul, en niet alle natuurlijke getallen zijn verschillend van nul, dus onder deze interpretatie geldt de disjunctie in de conclusie van de formule niet.