Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde
(2/12/14)

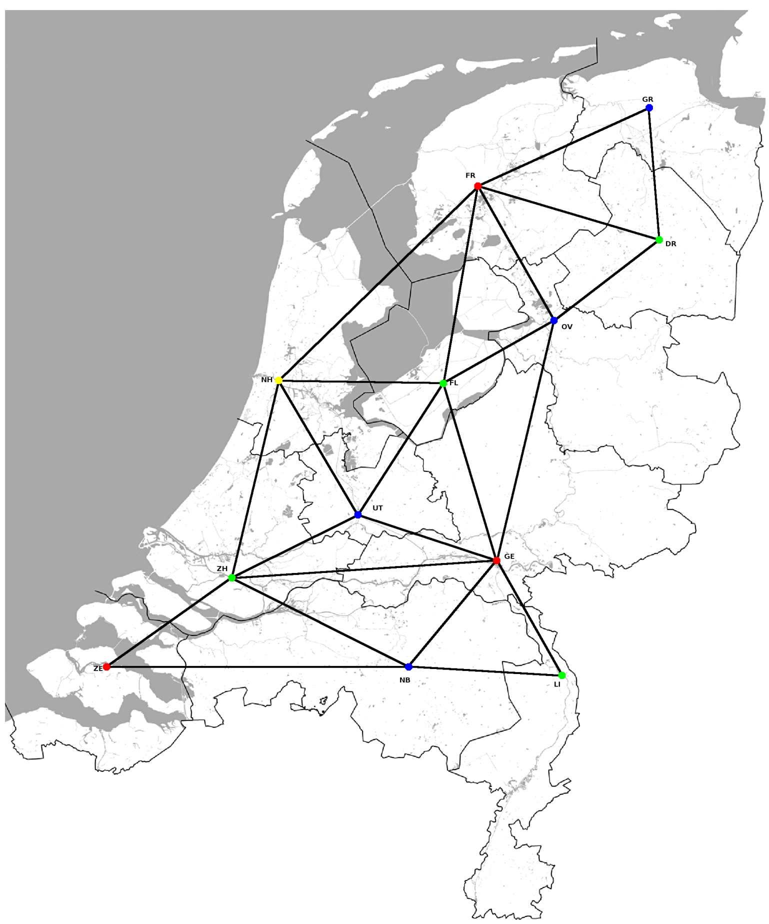
1. We definiëren de graaf

$$G_1 = \langle \{x \mid x \text{ is een provincie van Nederland}\},$$
$$\{(x, y) \mid x \text{ grenst aan } y\}\rangle$$

(zie kaartje op de bijlage). Deze graaf heeft 12 punten en 23 lijnen.

(a) Teken de graaf G_1 op de bijlage. (Zet de punten daadwerkelijk in de provincies.) (10 punten)

Dit is graaf G_1:



(b) Geef het kleurgetal van G_1. Verklaar je antwoord. (10 punten)

Op grond van de vierkleurenstelling weten we dat het kleurgetal hoogstens vier is. Het lukt echter niet om de graaf met drie kleuren te kleuren. Bekijk de deelgraaf $\langle P_2, L_2 \rangle$ met

$$\begin{aligned} P_2 &= \{FR, NH, UT, GE, OV, FL\} \\ L_2 &= \{(FR, NH), (NH, UT), (UT, GE), (GE, OV), (OV, FR), \\ &\quad (FR, FL), (NH, FL), (UT, FL), (GE, FL), (OV, FL)\} \end{aligned}$$

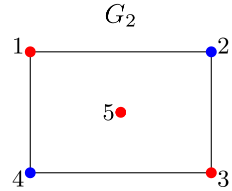
Dan zien we hier feitelijk vijf driehoeken die tegen elkaar aan liggen met FL als middelpunt. (Deze graaf staat in de literatuur bekend als W_6, de wielgraaf met zes punten.) Het is duidelijk dat het middelpunt een andere kleur moet hebben dan de punten op de rand. Dus we mogen aannemen dat FL groen is en FR rood. Gaan we met de klok mee dan moet OV blauw, GE rood, UT blauw en NH rood zijn. Maar omdat (NH, FR) een lijn is, kunnen NH en FR niet allebei rood zijn. Dus lukt het niet om deze graaf met drie kleuren te kleuren en is het kleurgetal dus vier.

(c) Bevat deze graaf een deelgraaf die isomorf is aan $K_{2,2}$? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Ja, want de $K_{2,2}$ is eigenlijk niets anders dan een vier-cykel en die zijn er genoeg te vinden. Bijvoorbeeld $GE \rightarrow NB \rightarrow ZE \rightarrow ZH \rightarrow GE$.

2. Geef een planaire bipartiete graaf die wel een Eulercircuit maar geen Hamiltonpad bevat. Verklaar je antwoord. (10 punten)

G_2



- De graaf is planair want er zijn geen snijdende lijnen.
- De graaf is bipartiete want de graaf is op te splitsen in de verzameling $\{1, 3, 5\}$ van rode punten en $\{2, 4\}$ van blauwe punten, waarbij alle lijnen een rood en een blauw uiteinde hebben.
- De graaf heeft een Eulercircuit, want de cykel $1 \rightarrow 2\ to 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ doet alle lijnen precies één keer aan.
- De graaf heeft geen Hamiltonpad, want er is geen pad dat punt 5 aandoet.

3. We definiëren een rij getallen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= 3a_n - 1 \qquad \text{voor } n \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Bereken de waarde van a_6 (zonder onderstaande formule te gebruiken). Geef aan hoe je aan dit antwoord bent gekomen. (15 punten)

$$\begin{array}{lllllll} a_0 & = & 1 & & & & \\ a_1 & = & 3 \cdot a_0 - 1 & = & 3 \cdot 1 - 1 & = & 2 \\ a_2 & = & 3 \cdot a_1 - 1 & = & 3 \cdot 2 - 1 & = & 5 \\ a_3 & = & 3 \cdot a_2 - 1 & = & 3 \cdot 5 - 1 & = & 14 \\ a_4 & = & 3 \cdot a_3 - 1 & = & 3 \cdot 14 - 1 & = & 41 \\ a_5 & = & 3 \cdot a_4 - 1 & = & 3 \cdot 41 - 1 & = & 122 \\ a_6 & = & 3 \cdot a_5 - 1 & = & 3 \cdot 122 - 1 & = & 365 \end{array}$$

(b) Bewijs met inductie dat

$$a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

voor alle $n \geq 0$. (15 punten)

Propositie:

$a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$ voor alle $n \geq 0$.

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad a_n = \tfrac{1}{2}(3^n + 1)$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, ofwel 3

$a_0 = \frac{1}{2}(3^0 + 1)$

Dit is zo, want $a_0 = 1$ en $\frac{1}{2}(3^0 + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. 4

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq 0$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, oftewel 6

$a_k = \frac{1}{2}(3^k + 1)$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, oftewel 7

$a_{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+1} + 1)$

Dit is zo, want 8

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_k - 1 \\
&\overset{\text{IH}}{=} 3 \cdot \frac{1}{2}(3^k + 1) - 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3(3^k + 1) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(3 \cdot 3^k + 3) - \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} + 3) - \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} + 3 - 2) \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} + 1)
\end{aligned}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$. 9

4. Een groepje van twaalf studenten wil volleybal spelen. Op hoeveel manieren kunnen ze het groepje in twee teams van zes spelers opdelen? Geef aan hoe je je antwoord hebt berekend. (20 punten)

Er wordt geen rekening gehouden met wie op welke positie speelt; het gaat dus puur om wie er samen in één team komen. Om het eerste team te kiezen moeten er zes van de twaalf mensen gekozen worden. Dat kan op

$$\begin{aligned}
\binom{12}{6} &= \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 2} \\
&= \frac{11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \\
&= 924
\end{aligned}$$

manieren. Echter, hierbij is er nog geen rekening gehouden met het feit dat het kiezen van zes spelers precies dezelfde teams oplevert als het kiezen van die andere zes spelers. Dus alle mogelijkheden zijn dubbel geteld en uiteindelijk zijn er dus $\frac{924}{2} = 462$ mogelijkheden.