Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Inhaaltoets
(13/01/16)

1. Het voegteken $|$ met de naam *Sheffer stroke* is gedefinieerd zodat $f \mid g \equiv \neg(f \wedge g)$. Geef een formule van de propositielogica f_1 die uitsluitend de Sheffer stroke bevat (dus niet de voegtekens $\neg$, $\wedge$, etc.) zodat $f_1 \equiv a \vee b$.

   Deze *Sheffer stroke* is ook bekend onder de naam NAND. In het bijzonder is hij *functioneel volledig*, wat betekent dat elke normale operator in de propositielogica kan worden uitgedrukt in expressies met uitsluitend deze Sheffer stroke. Bijvoorbeeld op deze manier: [1]

$$
\begin{aligned}
\neg f &\equiv \neg(f \wedge f) \\
&\equiv f \mid f \\
f \wedge g &\equiv \neg\neg(f \wedge g) \\
&\equiv \neg(f \mid g) \\
&\equiv (f \mid g) \mid (f \mid g) \\
f \vee g &\equiv \neg\neg f \vee \neg\neg g \\
&\equiv \neg(\neg f \wedge \neg g) \\
&\equiv \neg f \mid \neg g \\
&\equiv (f \mid f) \mid (g \mid g) \\
f \rightarrow g &\equiv \neg f \vee g \\
&\equiv \neg f \vee \neg\neg g \\
&\equiv \neg(f \wedge \neg g) \\
&\equiv f \mid \neg g \\
&\equiv f \mid (g \mid g) \\
f \leftrightarrow g &\equiv (f \rightarrow g) \wedge (g \rightarrow f) \\
&\equiv (f \mid (g \mid g)) \wedge (g \mid (f \mid f)) \\
&\equiv ((f \mid (g \mid g)) \mid (g \mid (f \mid f))) \mid ((f \mid (g \mid g)) \mid (g \mid (f \mid f)))
\end{aligned}
$$

   Dus we kunnen nemen

$$f_1 = (a \mid a) \mid (b \mid b)$$

2. Geef een model waarin de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid waar is:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x \in D\, \exists y \in D\, \forall y' \in D\, [R(x, y') \leftrightarrow y' = y]) \wedge \\
&(\forall x_1, x_2, y \in D\, [R(x_1, y) \wedge R(x_2, y) \rightarrow x_1 = x_2]) \wedge \\
&(\exists z \in D\, \forall x \in D\, \neg R(x, z))
\end{aligned}
$$

[1] Dit zijn niet noodzakelijk de kortste manieren om deze operatoren uit te drukken in de Sheffer stroke.

De formule valt uiteen in drie simultane eisen:

- Voor elke $x \in D$ is er precies één $y \in D$ met $R(x, y)$.
- Deze y's zijn uniek.
- Er is een $z \in D$ waarvoor geen enkele $x \in D$ bestaat met $R(x, z)$.

Neem als model M_2

Domein(en)	natuurlijke getallen
Relatie(s)	gelijkheid (=)

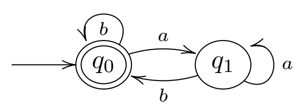
en als interpretatie I_2

D	$\mathbb{N}$
$R(x, y)$	$x + 1 = y$

Aan de eerste eis is voldaan, want neem maar $y = x + 1$ bij een gekozen x. Aan de tweede eis is voldaan, want als $x_1 + 1 = y$ en $x_2 + 1 = y$, volgt dat $x_1 + 1 = x_2 + 1$ en dus in het bijzonder dat $x_1 = x_2$. Aan de derde eis is voldaan, want neem maar $z = 0 \in \mathbb{N}$. Het is duidelijk dat er geen enkele $x \in \mathbb{N}$ is met $x + 1 = 0$.

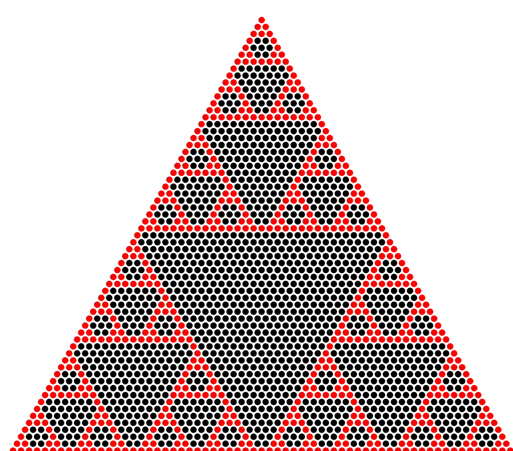
3. Geef een eindige automaat met een minimaal aantal toestanden die de taal $\mathcal{L}((a^*b)^*)$ herkent.

De taal bestaat uit de woorden λ en de woorden die op een b eindigen. Een automaat die die taal herkent is:



Dat het aantal toestanden minimaal is, volgt direct uit de observatie dat er zowel eindtoestanden als niet-eindtoestanden moeten zijn. Dus er moeten minimaal twee toestanden zijn en deze automaat heeft er ook slechts twee.

4.



Hierboven staan 2016 puntjes, want $(63 \cdot 64)/2 = 2016$. Bereken met recursie hoeveel van deze puntjes rood zijn.

De driehoek wordt recursief opgebouwd uit kleinere driehoeken. Zij r_n het aantal rode puntjes in een driehoek van graad n, waarbij deze graad aangeeft uit hoeveel niveaus van driehoeken de complete driehoek is opgebouwd. We beginnen met een driehoek van graad 1.[2] Een driehoek zoals linksonder te zien is met zes rode punten. Dus $r_1 = 6$. Een driehoek van graad $n+1$ wordt opgebouwd door drie driehoeken van graad n te pakken, deze met elkaar te verbinden via drie nieuwe rode puntjes en de tussenliggende ruimte op te vullen met zwarte puntjes. Dus we krijgen als recursieve betrekking voor de aantallen rode puntjes:

$$r_{n+1} = 3 \cdot r_n + 3$$

De gegeven driehoek is van graad 5. Met de recursieve definitie kunnen we eenvoudig r_5 uitrekenen:

$$\begin{array}{lllllll}
r_1 & = & 6 & & & & \\
r_2 & = & 3 \cdot r_1 + 3 & = & 3 \cdot 6 + 3 & = & 21 \\
r_3 & = & 3 \cdot r_2 + 3 & = & 3 \cdot 21 + 3 & = & 66 \\
r_4 & = & 3 \cdot r_3 + 3 & = & 3 \cdot 66 + 3 & = & 201 \\
r_5 & = & 3 \cdot r_4 + 3 & = & 3 \cdot 201 + 3 & = & 606
\end{array}$$

5. Geef een LTL formule f_5 zodat het enige LTL Kripke-model van f_5 met $V(x_i) \subseteq \{a, b\}$ het model is waarvoor geldt:

$$V(x_i) = \begin{cases} \{a\} & \text{als } i \text{ is even} \\ \{b\} & \text{als } i \text{ is oneven} \end{cases}$$

We moeten dus een formule geven die als enige model het model heeft waarbij $x_0 \Vdash (a \wedge \neg b)$, $x_1 \Vdash (b \wedge \neg a)$, $x_2 \Vdash (a \wedge \neg b)$, $x_3 \Vdash (b \wedge \neg a)$, ... Dus in x_0 moet a waar zijn en b niet. En vervolgens moeten de waarheidswaarden van a en b telkens alterneren. Dit kan bijvoorbeeld via de formule

$$f_5 = a \wedge \mathcal{G}(a \leftrightarrow \neg b) \wedge \mathcal{G}(a \rightarrow \mathcal{X}(\neg a \wedge b)) \wedge \mathcal{G}(b \rightarrow \mathcal{X}(\neg b \wedge a))$$

Het eerste deel van de formule zorgt ervoor dat $V(x_0) = a$. Het tweede deel van de formule zorgt ervoor dat in elke wereld geldt dat ofwel a waar is, ofwel b, maar nooit allebei. Het derde deel van de formule dwingt af dat als $V(x_i) = \{a\}$ dat dan ook geldt dat $V(x_{i+1}) = \{b\}$. En het vierde deel van de formule dwingt af dat als $V(x_i) = \{b\}$ dat dan ook geldt dat $V(x_{i+1}) = \{a\}$.

[2] Het is ook mogelijk om te beginnen met een driehoek van graad 0, die bestaat uit precies één rood puntje, maar omdat dat natuurlijk niet op een driehoek lijkt doen we dat hier niet.