Berekenbaarheid 2005, Tentamen

woensdag 29 juni, 10.30–12.30

Er zijn 6 onderdelen die ieder 15 punten opleveren, 10 punten zijn gratis. Het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door 10.

1. Definieer door middel van een toestandsdiagram een 2-tape Turing machine met input alfabet $\{a, b\}$ die zijn input achterstevoren zet. Als de input woord op de eerste tape *abaa* is, dan moet de machine dus termineren met op de eerste tape het woord *aaba*.

2. Definieer met behulp van de macros op pagina 3 een Turing machine die de functie
$$f(n) = n^2 + n + 1$$
uitrekent.

3. Bewijs dat het probleem onbeslisbaar is of er bij een gegeven Turing machine een input tape te vinden is waarop hij termineert.

4. Je kan rijtjes getallen maken volgens het volgende recept: als het getal *even* is deel je door twee, maar als het *oneven* is vermenigvuldig je met drie en tel je er één bij op. Dus bijvoorbeeld als je begint met 3 krijg je het rijtje
$$3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$
(Het is onbekend of dit voor iedere startwaarde altijd bij de reeks $4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$ terecht komt, maar over deze interessante vraag gaat het hier verder niet.)

   Laat zien dat de functie $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, waarbij $g(x, y)$ het y-de element van het rijtje dat met x begint primitief recursief is.

Dus bijvoorbeeld (zie het voorbeeld rijtje hierboven): $g(3,0) = 3$, $g(3,1) = 10$, $g(3,2) = 5$, etc.

Je mag gebruik maken van het feit dat de functies op pagina 4 (behalve de functie div) primitief recursief zijn. Hint: definieer eerst een functie $\mathsf{next}(z)$ die bij een getal z het volgende getal uit het rijtje geeft, en definieer daarmee g met primitieve recursie.

5. Laat zien dat de functie $\mathsf{log} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$\mathsf{log}(x,y) = \begin{cases} z & \text{als } y = x^z \\ \uparrow & \text{als } y \text{ geen macht van } x \text{ is} \end{cases}$$

   μ-recursief is. Deze functie is dus zoiets als de x-logaritme van y.

6. Definieer een primitief recursieve functie $\mathsf{rev} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die een Gödel gecodeerd rijtje achterstevoren zet.

   Bijvoorbeeld: het rijtje $\langle 1,2,3 \rangle$ heeft als Gödel-getal $2^{1+1} \cdot 3^{2+1} \cdot 5^{3+1} = 4 \cdot 27 \cdot 625 = 67500$, en het rijtje $\langle 3,2,1 \rangle$ heeft als Gödel-getal $2^{3+1} \cdot 3^{2+1} \cdot 5^{1+1} = 16 \cdot 27 \cdot 25 = 10800$. Dus $\mathsf{rev}(67500) = 10800$ en $\mathsf{rev}(10800) = 67500$.

   Als het argument van rev niet het Gödel-getal van een rijtje is, dan maakt het niet uit wat je uit de functie die je definieert laat komen.

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{S}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{Z}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\,B\dots B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{E}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\\[1ex] \textit{termineert niet}\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\dots\quad\dots B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\dots\quad\dots B\end{array}$$

in het bijzonder:

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{C}_0^{(0)}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}BB\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{A}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{D}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}1}\,BB\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{MR}_k}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\\[1ex] B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{ML}_k}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{FR}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)\\[1ex] B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{FL}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{E}_k}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\dots B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{T}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{INT}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{MULT}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_k}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\dots B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\dots B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}\quad\Big\downarrow{\scriptstyle n>0}\qquad\begin{array}{l}\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\\[1ex] \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
s(x) &= x+1 \\
z(x) &= 0 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{div}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } \uparrow \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\ldots,x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\ldots,x_n\rangle \\
& \text{(een aparte functie voor iedere } n\text{, dus } n \text{ is geen argument!)} \\
\mathsf{dec}(i,x) &= \text{‘}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{’} \\
\mathsf{gdln}(x) &= \text{‘lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{’}
\end{aligned}
$$