Berekenbaarheid 2010, hertentamen

woensdag 9 maart 2011, 10.30–12.30

Er zijn negen opgaven (waarvan twee op de achterzijde van dit blaadje) die alle 1 punt waard zijn. Het eerste punt is gratis. Niet alle opgaven kosten evenveel tijd, dus het is aan te bevelen met de minder bewerkelijke opgaven te beginnen om in geval van tijdnood niet teveel punten te verspelen.

Denk eraan je naam en studentnummer op je uitwerkingen te vermelden. Veel succes!

1. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een standaard Turing machine met input in $\{a, b\}^*$, die van zijn input de eerste twee symbolen verwijdert. Als de input nul of één symbolen lang is moet de output het lege woord zijn.

   Bij input *abbab* moet de output dus *bab* zijn.

2. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een non-deterministische twee-tape Turing machine die de taal

   $$L_2 := \{uvu \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$$

   herkent. Een correcte input $w \in L_2$ moet door de machine worden herkend in ten hoogste $\frac{3}{2}|w| + 5$ stappen.

3. Een Turing machine *met triviale begintoestand* is een standaard Turing machine die vanuit de begintoestand uitsluitend de transitie B/BR heeft. Laat zien dat de Turing machines met triviale begintoestand precies de recursief opsombare talen herkennen.

4. Wat is de Church-Turing these? Wat maakt deze these aannemelijk?

5. Is het beslisbaar of voor een Turing machine M met input w en een gegeven natuurlijk getal n geldt dat de machine M de input w na ten hoogste n stappen accepteert door stoppen?

   Zo ja, toon aan dat dit probleem beslisbaar is. Zo nee, toon aan dat het onbelisbaar is. Hoe zou de input van een machine die dit probleem beslist er uit zien?

6. Is het beslisbaar of een Turing machine M voor alle inputs die het symbool 1 niet bevatten termineert?

   Zo ja, toon aan dat dit probleem beslisbaar is. Zo nee, toon aan dat het onbelisbaar is. Hoe zou de input van een machine die dit probleem beslist er uit zien?

7. Geef partiële getaltheoretische functies f_1 en f_2 met allebei ariteit 1, waarbij $f_1 \circ f_2$ is gedefinieerd voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > 0$, maar waarbij $f_2 \circ f_1$ het lege domein heeft en dus nergens gedefinieerd is.

8. Geef de recursievergelijkingen die horen bij de recursieve definitie van de faculteitsfunctie fact. Geef getaltheoretische functies g en h zodat

$$\mathsf{fact} = \mathsf{primrec}(g, h)$$

Wat zijn de ariteiten van g en h? Schrijf g en h als compositie van mult en van de basisfuncties uit de definitie van primitief recursieve functies.

9. We definiëren de functie l als

$$l(x) := \lfloor \log(x) \rfloor$$

waarbij de logaritme met grondtal 10 wordt genomen en $\lfloor\ \rfloor$ afronden naar beneden betekent. Dus omdat $\log(3) = 0,47712125\ldots$ en $\log(1000) = 3$ geldt dat $l(3) = 0$ en $l(1000) = 3$.

Laat zien dat l primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 3 primitief recursief zijn.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$