Berekenbaarheid 2015
Tentamen
5 november 2015

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op! Sommige opgaven hebben meerdere onderdelen, vergeet er geen!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die twee a's voor zijn input plakt, dus met $M_1(w) = aaw$ voor alle $w \in \{a, b\}^*$.

2. Definieer een standaard Turing-machine M_2 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die de taal

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } a\text{'s}\}$$

herkent *door stoppen*.

Merk op dat nul ook een even getal is.

3. Definieer een nondeterministische twee-tape Turing-machine M_3 die de taal

$$L_3 = \{uu^R u \mid u \in \{a, b\}^*\}$$

herkent. Zorg er voor dat een correcte input van lengte n wordt herkend in hoogstens $n + 4$ stappen.

Merk op dat het lege woord ook in deze taal zit.

(*opgave 4 staat op de volgende pagina*)

4. Definieer een numerieke Turing-machine M_4 die de functie

$$f_4(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is} \\ \uparrow & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases}$$

   uitrekent. Zorg ervoor dat de machine aan de regels van een macro voldoet.

   Je mag in je machine de macro's op pagina 5 gebruiken. Je mag in de machine ook expliciet toestanden en transities opnemen, dus je hoeft niet alles uitsluitend met macro's te doen.

5. Heeft de code $R(U)$ van een universele Turing-machine U altijd

   001011101

   als substring? Verklaar je antwoord.

   Zie pagina 6 voor een relevant stukje over codes van Turing-machines uit het boek van Sudkamp.

6. (a) Het probleem P_6 is gegeven als:

input:	een code $R(M)$ van een Turing-machine M
vraag:	stopt de Turing-machine M met als input 001011101?

   Laat zien dat dit probleem onbeslisbaar is.

   (b) Leg uit of dit probleem onder de stelling van Rice valt of niet.

7. (a) Het probleem P_7 is gegeven als:

input:	een code $R(M)$ van een Turing-machine M
vraag:	bevat de taal $L(M)$ meer woorden dan er toestanden zijn in M?

   Merk op dat als $L(M)$ oneindig is, het antwoord op deze vraag 'ja' zal zijn.

   Laat zien dat dit probleem onbeslisbaar is.

   (b) Leg uit of dit probleem onder de stelling van Rice valt of niet.

8. (a) Geef numerieke functies f_8 en g_8 met $f_8 \circ g_8 = e$ en $g_8 \circ f_8 \neq e$. Hierin is e de 'lege' functie, die voor geen enkele input gedefinieerd is. Verklaar je antwoord.

   (b) Geef de ariteiten van f_8 en g_8.

9. (a) Gegeven de recursievergelijkingen voor een recursieve definitie van een numerieke functie f_9:

$$\begin{aligned} f_9(x,0) &= 1 \\ f_9(x,y+1) &= f_9(x,y)\cdot(x+y) \end{aligned}$$

Met deze functie kun je bijvoorbeeld definiëren:

$$\begin{aligned} x! &= f_9(1,x) \\ \binom{x}{y} &= \frac{f_9(x-y+1,y)}{f_9(1,y)} \end{aligned}$$

Bereken de waarde van $f_9(3,4)$.

(b) Geef numerieke functies g_9 en h_9 met

$$f_9 = \textbf{primrec}(g_9, h_9)$$

en die corresponderen met de recursievergelijkingen.

In de definitie van deze twee functies kun je gebruik maken van de functies op pagina 6.

(c) Geef de ariteiten van f_9, g_9 en h_9.

Pas op dat je van geen van deze drie functies vergeet de ariteit op te schrijven.

(d) Schrijf deze functies g_9 en h_9 expliciet als compositie van functies uit de lijst op pagina 6.

(*opgave 10 staat op de volgende pagina*)

10. (a) De Carmichael-functie f_{10} berekent voor iedere positief natuurlijk getal x de kleinste positieve n zodat

$$a^n \equiv 1 \mod x$$

voor *alle* a die geen gemeenschappelijke delers hebben met x.
Zo is bijvoorbeeld $f_{10}(10) = 4$, want

$$\begin{aligned} 1^4 &= 1 \equiv 1 \mod 10 \\ 3^4 &= 81 \equiv 1 \mod 10 \\ 7^4 &= 2401 \equiv 1 \mod 10 \\ 9^4 &= 6561 \equiv 1 \mod 10 \end{aligned}$$

maar

$$3^3 = 27 \not\equiv 1 \mod 10$$

We definiëren $f_{10}(0)\uparrow$.
Laat zien dat deze functie f_{10} een μ-recursieve functie is.

(b) Is f_{10} ook primitief recursief? Verklaar je antwoord.

Je mag voor beide onderdelen van deze opgave gebruiken dat de functies op pagina 6 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

$\rightarrow\boxed{\mathrm{S}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;BB$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{Z}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;\;B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$ *termineert niet*
$\rightarrow\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\,B\ldots\;\;\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\,B\ldots\;\;\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{A}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{D}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;\;\;\;\;B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}1}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{SUB}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;\;B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}m}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{MULT}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{MR}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$ $B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{ML}_k}\rightarrow$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{FR}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$ $B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{FL}}\rightarrow$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i\geq 0)$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$ $\underset{\uparrow}{B}\ldots\;\;\;\;\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{T}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{INT}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\;\;\;\;\ldots B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\;\;\;\;\ldots B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$ $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$ $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$