Vorwort für den Lernenden.

1. Bitte lies nicht das nachstehende Vorwort für den Kenner!

2. Ich setze nur logisches Denken und die deutsche Sprache als bekannt voraus; nichts aus der Schulmathematik oder gar der höheren Mathematik.

Um Einwänden vorzubeugen: **Eine** Zahl, **keine** Zahl, **zwei** Fälle, **alle** Dinge aus einer gegebenen Gesamtheit u. a. m. sind klare Wortgebilde der deutschen Sprache. Satz 1, Satz 2, ..., Satz 301 (desgleichen bei Axiomen, Definitionen, Kapiteln, Paragraphen) oder 1), 2) u. dgl. bei Fallunterscheidungen sind Marken, die die Sätze, Axiome, ..., Fälle unterscheiden und bei Nachschlagungen bequemer sind, als wenn ich etwa von Satz Hellblau, Satz Dunkelblau u. dgl. redete. Bis "301" würde überhaupt die Einführung der sogenannten positiven ganzen Zahlen keine Schwierigkeit machen; die erste – in Kap. 1 überwundene – Schwierigkeit liegt in der positiven ganzen Zahlen

$$1, \ldots$$

mit der geheimnisvollen Punktreihe hinter dem Komma (in Kap. 1 natürliche Zahlen genannt), in der Definition der mit ihnen anzustellenden Rechenoperationen und den Beweisen der zugehörigen Sätze.

Ich entwickle nacheinander alles Entsprechende in Kap. 1 für die natürlichen Zahlen, in Kap. 2 für die positiven Brüche und positiven rationalen Zahlen, in Kap. 3 für die positiven (rationalen und irrationalen) Zahlen, in Kap. 4 für die reellen Zahlen (positive, negative und Null), in Kap. 5 für die komplexen Zahlen: ich spreche also nur von solchen Zahlen, mit denen Du Dich schon in der Schule beschäftigt hast.

In diesem Sinne:

3. Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt.

Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen.

4. Das kleine Einmaleins, bereits der Satz

$$2 \cdot 2 = 4,$$

kommt nicht vor; ich empfehle Dir aber als Übungsaufgabe zu Kap. 1, § 4,

$$2 = 1 + 1,$$
$$4 = \big((1+1)+1\big)+1$$

zu definieren und jenen Satz zu beweisen.

5. Entschuldige, daß ich Dich duze; dies geschieht nicht nur, weil man den Leser mit "lies" und "siehe" anzureden pflegt, sondern weil dies Buch zum Teil in usum delphinarum geschrieben ist, indem meine Töchter bekanntlich (siehe *E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie,* Bd. 1, S. V) schon mehrere Semester studieren (Chemie), schon auf der Schule Differential- und Integralrechnung gelernt zu haben glauben und heute noch nicht wissen, warum

$$x \cdot y = y \cdot x$$

ist.

Berlin, den 28. Dezember 1929.

Edmund Landau.

Vorwort für den Kenner.

Dies Büchlein ist eine Konzession an die (leider in der Mehrzahl befindlichen) Kollegen, welche meinen Standpunkt in der folgenden Frage **nicht** teilen.

Während auf der Schule naturgemäß auf strengen und lückenlosen Aufbau der Elementarmathematik verzichtet werden muß, soll der mathematische Hochschulunterricht den Hörer nicht nur mit dem Stoff und den Ergebnissen, sondern auch mit den Beweismethoden bekannt machen. Auch wer Mathematik hauptsächlich für die Anwendungen auf Physik und andere Wissenschaften lernt, also vielfach sich selbst weitere mathematische Hilfssätze zurechtlegen muß, kann auf dem betretenen Pfade nur dann sicher weiterschreiten, wenn er gehen gelernt hat, d. h. zwischen falsch und wahr, zwischen Vermutungen und Beweisen (oder, wie manche so schön sagen, zwischen unstrengen und strengen Beweisen) unterscheiden kann.

Darum finde ich es – im Anschluß an einige meiner Lehrer und Kollegen, an einige Autoren, aus deren Schriften ich geschöpft habe, und an die meisten meiner Schüler – richtig, daß der Studierende bereits im ersten Semester lernt, auf welchen als Axiomen angenommenen Grundtatsachen sich lückenlos die Analysis aufbaut und wie dieser Aufbau begonnen werden kann. Bei der Wahl der Axiome kann man bekanntlich verschieden verfahren; ich erkläre es also nicht etwa für falsch, sondern für meinem persönlichen Standpunkt fast diametral entgegengesetzt, wenn man für reelle Zahlen zahlreiche der üblichen Rechengesetze und den *Dedekind*schen Hauptsatz 205 der folgenden Schrift als Axiome postuliert. Gewiß beweise ich nicht die Widerspruchslosigkeit der fünf *Peano*schen Axiome (weil man es nämlich nicht kann); aber jedes derselben ist offenkundig von den vorigen unabhängig. Andrerseits drängt sich bei jener erweiterten Zahl von Axiomen dem Lernenden sofort die Frage auf, ob sich nicht so manches darunter aus dem Vorangehenden beweisen (ein Schlauer würde hinzufügen: oder widerlegen) läßt; und da man seit vielen Jahrzehnten die Beweisbarkeit aller dieser Dinge kennt, ist es dem Lernenden wirklich zu gönnen, daß er die (durchweg ganz leichten) Beweise zu Beginn seines Studiums lernt.

Ich will gar nicht erst ausführlich darüber reden, daß vielfach nicht einmal der *Dedekind*sche Hauptsatz (oder sein gleichwertiges Surrogat bei Begründung der reellen Zahlen durch Fundamentalreihen) zugrunde gelegt wird; so daß dann Dinge wie der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, der hierauf fußende Satz, daß eine Funktion mit in einem Intervall verschwindender Ableitung dort konstant ist, oder z. B. der Satz, daß eine beständig fallende, beschränkte Folge von Zahlen gegen einen Grenzwert strebt, ohne jeden Beweis erscheinen oder, was noch schlimmer ist, mit einem vermeintlichen Beweis, der keiner ist. Die Anzahl der Vertreter dieser extremen Spielart des anderen Standpunktes scheint mir nicht nur monoton zu fallen; sondern der Grenzwert, dem diese Anzahl nach dem oben genannten Satze zustrebt, ist vielleicht sogar Null.

Aber mit einer Begründung der natürlichen Zahlen wird nur selten angefangen. Auch ich gestehe, daß ich von jeher nicht unterließ, nach *Dedekind* die Theorie der reellen Zahlen durchzunehmen, früher aber die Eigenschaften der ganzen und der rationalen Zahlen voraussetzte. Die drei letzten Male zog ich allerdings vor, mit den ganzen Zahlen zu beginnen. Einmal und auch für das kommende Sommersemester als Konzession gegen die Zuhörer, die doch gleich differentiieren wollen oder gar die ganze Erläuterung des Zahlbegriffs nicht im ersten Semester (oder womöglich überhaupt nicht) lernen wollen, habe ich allerdings meine Vorlesung in zwei gleichzeitige geteilt, deren eine "Grundlagen der Analysis" hieß. In dieser gelange ich, von den *Peano*schen Axiomen der natürlichen Zahlen ausgehend, bis zur Theorie der reellen Zahlen und der komplexen Zahlen; übrigens braucht der Hörer die komplexen Zahlen im ersten Semester noch nicht; aber deren Einführung ist ja ganz einfach und läßt sich mühelos gleich anbringen.

Nun gibt es in der ganzen Literatur kein Lehrbuch, das sich das bescheidene Ziel setzt, **nur** das Rechnen mit Zahlen im obigen Sinne zu begründen. Und auch die umfangreichen Werke, in denen dies in den einleitenden Kapiteln unternommen wird, überlassen dabei (bewußt oder unbewußt) so manches dem Leser.

Diese Schrift – wenn sie von ihm für passend befunden wird – soll jedem Kollegen der anderen pädagogischen Richtung, der also die Grundlagen nicht durchnimmt, wenigstens die Möglichkeit geben, auf eine Quelle zu verweisen, wo das Fehlende und nur das Fehlende in lückenlosem Zusammenhang dargestellt ist. Die Lektüre ist ganz leicht, wenn man – was ja der Fall ist – schon in der Schule die Ergebnisse erfahren hat und wenn man über die abstrakten vier oder fünf ersten Seiten hinweggekommen ist.

Ich trete mit Zögern mit dieser Schrift an die Öffentlichkeit, weil ich damit über ein Gebiet publiziere, in dem ich (außer einer mündlichen Mitteilung von Herrn *Kalmár*) nichts Neues zu sagen habe; aber ein anderer hat sich meine, zum Teil langweilige Mühe nicht gemacht.

Den definitiven Anstoß zu dieser "Flucht in die Öffentlichkeit" hat aber ein konkreter Vorfall gegeben.

Die andere Richtung meint immer, während des späteren Verlaufes des Studiums würde der Schüler an Hand einer Vorlesung oder der Literatur die Sache schon lernen. Und keiner jener meiner verehrten Freunde und Feinde würde bezweifelt haben, daß z. B. in meinen Vorlesungen sich alles Nötige findet. Auch ich glaubte das. Und nun passierte mir folgendes schreckliche Abenteuer. An Hand meines Kollegheftes las mein damaliger Assistent und lieber Kollege Privatdozent Dr. *Grandjot* (jetzt Professor an der Universität Santiago) über Grundlagen der Analysis und gab mir mein Manuskript mit dem Bemerken zurück, er hätte es für notwendig befunden, zu den *Peano*schen Axiomen im weiteren Verlaufe andere hinzuzufügen, da der übliche Weg, den ich gegangen war, eine bestimmte Lücke aufweise. Ehe ich auf die Einzelheiten eingehe, will ich gleich vorgreifend erwähnen:

1. *Grandjot*s Einwand war berechtigt.

2. Axiome, die nicht zu Anfang des Ganzen aufgezählt werden können (weil sie an spätere Begriffe anknüpfen), sind sehr bedauerlich.

3. *Grandjot*s Axiome sind (wie wir schon von *Dedekind* hätten leruen können) alle beweisbar, und es bleibt (s. die ganze folgende Schrift) bei den *Peano*schen Axiomen.

Es sind drei Stellen, an denen der Einwand Platz greift:

I. Bei der Definition von $x + y$ für natürliche Zahlen.

II. Bei der Definition von $x \cdot y$ für natürliche Zahlen.

III. Bei der Definition von $\sum_{n=1}^{m} x_n$ und $\prod_{n=1}^{m} x_n$, nachdem man für irgend ein Zahlgebiet $x + y$ und $x \cdot y$ schon hat.

Da alle drei Male die Sache analog liegt, spreche ich hier nur von $x+y$ für natürliche Zahlen x, y. Wenn ich etwa in einer Vorlesung über Zahlentheorie irgend einen Satz über natürliche Zahlen so beweise, daß ich erst die Richtigkeit für 1 und dann aus der Richtigkeit für x die für $x+1$ beweise, so pflegt gelegentlich ein Zuhörer den Einwand zu erheben, ich hätte die Behauptung ja gar nicht vorher für x bewiesen. Der Einwand ist unberechtigt, aber verzeiblich; der Student hatte eben nie vom Induktionsaxiom gehört. *Grandjots* Einwand klingt ähnlich mit dem Unterschiede, daß er berechtigt war, so daß ich ihn auch verzeihen mußte. Auf Grund seiner fünf Axiome definiert *Peano* $x+y$ bei festem x für alle y folgendermaßen:

$$x + 1 = x',$$
$$x + y' = (x + y)',$$

und er und Nachfolger meinen damit: $x+y$ ist allgemein definiert; denn die Menge der y, für die es definiert ist, enthält 1 und mit y auch y'.

Aber man hat ja $x+y$ gar nicht definiert.

Es wäre in Ordnung, wenn man (was beim *Peano*schen Wege nicht der Fall ist, da die Ordnung erst nach der Addition eingeführt wird) den Begriff "Zahlen $\leq y$" hätte und von der Menge der y spräche, zu denen es ein für $z \leq y$ definiertes $f(z)$ mit den Eigenschaften gibt:

$$f(1) = x',$$
$$f(z') = \bigl(f(z)\bigr)' \text{ für } z < y.$$

So verläuft *Dedekind*s Begründung. Mit freundlicher Hilfe des Kollegen *von Neumann* in Princeton hatte ich nach vorheriger Einführung der Ordnung (was dem Leser nicht bequem gewesen wäre) einen derartigen Weg für dies Büchlein ausgearbeitet. In letzter Stunde erfuhr ich aber einen sehr viel einfacheren Beweis von Dr. *Kalmár* in Szeged; jetzt sieht die Sache so einfach und der Beweis den übrigen Beweisen des ersten Kapitels so ähnlich aus, daß auch der Kenner diese Pointe nicht gemerkt hätte, wenn ich nicht mein obiges Geständnis von Schuld und Sühne so ausführlich zu Protokoll gegeben hätte. Bei $x \cdot y$ geht es genau ebenso; $\sum_{n=1}^{m} x_n$ und $\prod_{n=1}^{m} x_n$ ist allerdings nur auf dem *Dedekind*schen Wege möglich; aber von Kap. 1, § 3 an hat man ja die Menge der $z \leq y$.

Um es dem Leser möglichst leicht zu machen, habe ich manche (nicht sehr umfangreiche) Wortmengen in mehreren oder allen Kapiteln wiederholt. Für den Kenner wäre es natürlich ausreichend, z. B. ein für allemal beim Beweise der Sätze 16 und 17 zu sagen: Diese Begründung gilt für jede Klasse von Zahlen, bei denen die Zeichen $<$ und $=$ definiert sind und bestimmte vorangegangene Eigenschaften haben. Derartige wiederholte Schlußweisen betreffen Sätze, die in allen betreffenden Kapiteln vorkommen mußten, weil die Sätze im nachfolgenden angewendet wurden. Aber $\sum_{n=1}^{m} a_n$ und $\prod_{n=1}^{m} a_n$ braucht man nur im letzten Kapitel einzuführen, um es damit auch für die niederen Zahlarten zu haben. Daher warte ich damit bis zu den komplexen Zahlen, desgl. mit den Sätzen über Subtraktion und Division; erstere gelten selbstverständlich z. B. für natürliche Zahlen nur, wenn jeder Minuendus größer ist als der Subtrahendus, letztere z. B. bei natürlichen Zahlen nur, wenn alle Divisionen aufgehen.

Mein Buch ist unter Verzicht auf Nebenbemerkungen in dem unbarmherzigen Telegrammstil ("**Axiom**", "**Definition**", "**Satz**", "**Beweis**", nur gelegentlich "**Vorbemerkung**"; selten Worte, die zu keiner dieser fünf Rubriken gehören) geschrieben, der bei einer so leichten Materie am Platz ist.

Ich hoffe, nach jahrzehntelanger Vorbereitung diese Schrift so abgefaßt zu haben, daß ein normaler Student sie in zwei Tagen lesen kann. Und dann darf er sogar (da er die formalen Regeln ja schon von der Schule her kennt) den ganzen Inhalt bis auf das Induktionsaxiom und den *Dedekind*schen Hauptsatz vergessen.

Wenn aber gar dem einen oder anderen Kollegen der anderen Richtung die Sache so leicht erscheint, daß er sie in seinen Anfängervorlesungen (auf dem folgenden oder irgend einem anderen Wege) bringt, würde ich ein Ziel erreicht haben, auf das ich in größerem Umfange nicht zu hoffen wage.

Berlin, den 28. Dezember 1929.

Edmund Landau.

Kapitel 1.

Natürliche Zahlen.

§ 1.

Axiome.

Wir nehmen als gegeben an:

Eine Menge, d. h. Gesamtheit, von Dingen, natürliche Zahlen genannt, mit den nachher aufzuzählenden Eigenschaften, Axiome genannt.

Vor der Formulierung der Axiome sei einiges in bezug auf die benutzten Zeichen = und ≠ vorangeschickt.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten in diesem Buch, wenn nichts anderes gesagt wird, durchweg natürliche Zahlen.

Ist x gegeben und y gegeben, so sind

entweder x und y dieselbe Zahl; das kann man auch

$$x = y$$

schreiben (= sprich: gleich);

oder x und y nicht dieselbe Zahl; das kann man auch

$$x \neq y$$

schreiben (≠ sprich: ungleich).

Hiernach gilt aus rein logischen Gründen:

1)

$$x = x$$

für jedes x.

2) Aus

$$x = y$$

folgt

$$y = x.$$

3) Aus

$$x = y, \quad y = z$$

folgt

$$x = z.$$

Eine Schreibweise wie

$$a = b = c = d,$$

mit der zunächst nur

$$a = b, \quad b = c, \quad c = d$$

gemeint ist, enthält also überdies z. B.

$$a = c, \quad a = d, \quad b = d.$$

(Entsprechend in den späteren Kapiteln.)

Von der Menge der natürlichen Zahlen nehmen wir nun an, daß sie die Eigenschaften hat:

Axiom 1: 1 *ist eine natürliche Zahl.*

D. h. unsere Menge ist nicht leer; sie enthält ein Ding, das 1 (sprich: Eins) heißt.

Axiom 2: *Zu jedem x gibt es genau eine natürliche Zahl, die der Nachfolger von x heißt und mit x' bezeichnet uerden möge.*

Bei komplizierten x wird die Zahl, um deren Nachfolger es sich handelt, eingeklammert, wenn sonst ein Mißverständnis zu befürchten ist. Entsprechendes gilt im ganzen Buch bei $x + y$, xy, $x - y$, $-x$, x^y u. dgl.

Aus

$$x = y$$

folgt also

$$x' = y'.$$

Axiom 3: *Stets ist*

$$x' \neq 1.$$

D. h. es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1.

Axiom 4: *Aus*

$$x' = y'$$

folgt

$$x = y.$$

D. h. zu jeder Zahl gibt es keine oder genau eine, deren Nachfolger jene Zahl ist.

Axiom 5 (Induktionsaxiom): *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge natülicher Zahlen mit den Eigenschaften:*

I) 1 *gehört zu $\mathfrak{M}$.*

II) *Wenn x zu $\mathfrak{M}$ gehört, so gehört x' zu $\mathfrak{M}$.*

Dann umfaßt $\mathfrak{M}$ alle natürlichen Zahlen.

§ 2.
Addition.

Satz 1: *Aus*
$$x \neq y$$
folgt
$$x' \neq y'.$$

Beweis: Sonst wäre
$$x' = y',$$
also nach Axiom 4
$$x = y.$$

Satz 2:
$$x' \neq x.$$

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die dies gilt.

I) Nach Axiom 1 und Axiom 3 ist
$$1' \neq 1;$$
also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist
$$x' \neq x,$$
also nach Satz 1
$$(x')' \neq x',$$
also x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Nach Axiom 5 umfaßt also $\mathfrak{M}$ alle natürlichen Zahlen; d. h. für jedes x ist
$$x' \neq x.$$

Satz 3: *Ist*
$$x \neq 1,$$
so gibt es ein (also nach Axiom 4 genau ein) u *mit*
$$x = u'.$$

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge, die aus der Zahl 1 und denjenigen x besteht, zu denen es ein solches u gibt. (Von selbst ist jedes derartige
$$x \neq 1$$
nach Axiom 3.)

I) 1 gehört zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist, wenn unter u die Zahl x verstanden wird,
$$x' = u',$$
also x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Nach Axiom 5 umfaßt also $\mathfrak{M}$ alle natürlichen Zahlen; zu jedem

$$x \neq 1$$

gibt es also ein u mit

$$x = u'.$$

Satz 4, zugleich **Definition 1:** *Auf genau eine Art läßt sich jedem Zahlenpaar x, y eine natürliche Zahl, $x+y$ genannt* (+ sprich: plus), *so zuordnen, daß*

1)

$$x + 1 = x' \quad \textit{für jedes } x,$$

2)

$$x + y' = (x + y)' \quad \textit{für jedes } x \textit{ und jedes } y.$$

$x + y$ heißt die Summe von x und y oder die durch Addition von y zu x entstehende Zahl.

Beweis: A) Zunächst zeigen wir, daß es bei jedem festen x höchstens eine Möglichkeit gibt, $x + y$ für alle y so zu definieren, daß

$$x + 1 = x'$$

und

$$x + y' = (x + y)' \quad \text{für jedes } y.$$

Es seien a_y und b_y für alle y definiert und so beschaffen, daß

$$a_1 = x', \quad b_1 = x',$$

$$a_{y'} = (a_y)', \quad b_{y'} = (b_y)' \quad \text{für jedes } y.$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der y mit

$$a_y = b_y.$$

I)

$$a_1 = x' = b_1;$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist y zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist

$$a_y = b_y,$$

also nach Axiom 2

$$(a_y)' = (b_y)',$$

also

$$a_{y'} = (a_y)' = (b_y)' = b_{y'},$$

also y' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Daher ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen; d. h. für jedes y ist

$$a_y = b_y.$$

B) Wir zeigen jetzt, daß es zu jedem x eine Möglichkeit gibt, $x + y$ für alle y so zu definieren, daß

$$x + 1 = x'$$

und

$$x + y' = (x + y)' \quad \text{für jedes } y.$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, zu denen es eine (also nach A) genau eine) solche Möglichkeit gibt.

I) Für

$$x = 1$$

leistet

$$x + y = y'$$

das Gewünschte. Denn

$$x + 1 = 1' = x',$$

$$x + y' = (y')' = (x + y)'.$$

Also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) Es sei x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, also ein $x + y$ für alle y vorhanden. Dann leistet

$$x' + y = (x + y)'$$

das Gewünschte bei x'. Denn

$$x' + 1 = (x + 1)' = (x')'$$

und

$$x' + y' = (x + y')' = \big((x + y)'\big)' = (x' + y)'.$$

Also gehört x' zu $\mathfrak{M}$.

Daher umfaßt $\mathfrak{M}$ alle x.

Satz 5 (assoziatives Gesetz der Addition):

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Beweis: x und y seien fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der z, für die die Behauptung gilt.

I)

$$(x + y) + 1 = (x + y)' = x + y' = x + (y + 1)$$

also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) z gehöre zu $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

also

$$(x+y)+z' = \big((x+y)+z\big)' = \big(x+(y+z)\big)' = x+(y+z)' = x+(y+z'),$$

also z' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Die Behauptung gilt also für alle z.

Satz 6 (kommutatives Gesetz der Addition):

$$x + y = y + x.$$

Beweis: y sei fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die die Behauptung gilt.

I) Es ist

$$y + 1 = y'$$

und nach der Konstruktion beim Beweise des Satzes 4

$$1 + y = y',$$

also

$$1 + y = y + 1,$$

1 zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist

$$x + y = y + x,$$

also
$$(x+y)' = (y+x)' = y + x'.$$
Nach der Konstruktion beim Beweise des Satzes 4 ist
$$x' + y = (x+y)',$$
also
$$x' + y = y + x'$$
also x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Die Behauptung gilt also für alle x.

Satz 7:
$$y \neq x + y.$$

Beweis: x sei fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der y, für die die Behauptung gilt.

I)
$$1 \neq x',$$
$$1 \neq x + 1;$$
1 gehört zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist y zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist
$$y \neq x + y,$$
also
$$y' \neq (x+y)',$$
$$y' \neq x + y',$$
y' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Die Behauptung gilt also für alle y.

Satz 8: *Aus*
$$y \neq z$$
folgt
$$x + y \neq x + z.$$

Beweis: Bei festen y, z mit
$$y \neq z$$
sei $\mathfrak{M}$ die Menge der x mit
$$x + y \neq x + z.$$

I)
$$y' \neq z',$$
$$1 + y \neq 1 + z;$$
1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist
$$x + y \neq x + z$$
also
$$(x+y)' \neq (x+z)',$$
$$x' + y \neq x' + z,$$
x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Also gilt die Behauptung stets.

Satz 9: *Sind x und y gegeben, so liegt genau einer der Fälle vor:*

1)

$$x = y.$$

2) Es gibt ein (also nach Satz 8 genau ein) u *mit*

$$x = y + u.$$

3) Es gibt ein (also nach Satz 8 genau ein) v *mit*

$$y = x + v.$$

Beweis: A) Nach Satz 7 sind 1), 2) unverträglich und 1), 3) unverträglich. Aus Satz 7 folgt auch die Unverträglichkeit von 2), 3); denn sonst wäre

$$x = y + u = (x + v) + u = x + (v + u) = (v + u) + x.$$

Also liegt höchstens einer der Fälle 1), 2), 3) vor.

B) x sei fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der y, für die einer (also nach A) genau einer) der Fälle 1), 2), 3) vorliegt.

I) Für $y = 1$ ist nach Satz 3 entweder

$$x = 1 = y \quad \text{(Fall 1))}$$

oder

$$x = u' = 1 + u = y + u \quad \text{(Fall 2)).}$$

Daher gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) Es gehöre y zu $\mathfrak{M}$. Dann ist

entweder (Fall 1) bei y)

$$x = y,$$

also

$$y' = y + 1 = x + 1 \quad \text{(Fall 3) für } y'\text{);}$$

oder (Fall 2) bei y)

$$x = y + u,$$

also, wenn

$$u = 1,$$

$$x = y + 1 = y' \quad \text{(Fall 1) für } y'\text{);}$$

wenn

$$u \neq 1,$$

nach Satz 3

$$u = w' = 1 + w,$$

$$x = y + (1 + w) = (y + 1) + w = y' + w \quad \text{(Fall 2) für } y'\text{);}$$

oder (Fall 3) bei y)

$$y = x + v,$$

also

$$y' = (x + v)' = x + v' \quad \text{(Fall 3) für } y'\text{).}$$

Jedenfalls gehört also y' zu $\mathfrak{M}$.

Daher liegt stets einer der Fälle 1), 2), 3) vor.

§ 3.

Ordnung.

Definition 2: *Ist*

$$x = y + u,$$

so ist

$$x > y.$$

($>$ sprich: größer als.)

Definition 3: *Ist*

$$y = x + v,$$

so ist

$$x < y.$$

($<$ sprich: kleiner als.)

Satz 10: *Sind x, y beliebig, so liegt genau einer der Fälle*

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y$$

vor.

Beweis: Satz 9, Definition 2 und Definition 3.

Satz 11: *Aus*

$$x > y$$

folgt

$$y < x.$$

Beweis: Beides besagt

$$x = y + u$$

bei passendem u.

Satz 12: *Aus*

$$x < y$$

folgt

$$y > x.$$

Beweis: Beides besagt

$$y = x + v$$

bei passendem v.

Definition 4:

$$x \geq y$$

bedeutet

$$x > y \quad \textit{oder} \quad x = y.$$

($\geq$ sprich: größer oder gleich.)

Definition 5:

$$x \leq y$$

bedeutet

$$x < y \quad \textit{oder} \quad x = y.$$

($\leq$ sprich: kleiner oder gleich.)

Satz 13: *Aus*

$$x \geq y$$

folgt

$$y \leq x.$$

Beweis: Satz 11.

Satz 14: *Aus*

$$x \leq y$$

folgt

$$y \geq x.$$

Beweis: Satz 12.

Satz 15 (Transitivität der Ordnung): *Aus*

$$x < y, \quad y < z$$

folgt

$$x < z.$$

Vorbemerkung: Aus

$$x > y, \quad y > z$$

folgt also (wegen

$$z < y, \quad y < x,$$

$$z < x)$$

$$x > z;$$

aber solche trivialerweise durch Rückwärtslesen entstehenden Wortlaute schreibe ich in der Folge nicht erst auf.

Beweis: Bei passenden v, w ist

$$y = x + v, \quad z = y + w,$$

also

$$z = (x + v) + w = x + (v + w),$$

$$x < z.$$

Satz 16: *Aus*

$$x \leq y, \quad y < z \quad \textit{oder} \quad x < y, \quad y \leq z$$

folgt

$$x < z.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 15 erledigt.

Satz 17: *Aus*

$$x \leq y, \quad y \leq z$$

folgt

$$x \leq z.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 16 erledigt.

Nach den Sätzen 15 bis 17 ist eine Schreibweise wie

$$a < b \leq c < d$$

gerechtfertigt; das heißt zunächst

$$a < b, \quad b \leq c, \quad c < d,$$

enthält aber nach jenen Sätzen auch z. B.

$$a < c, \quad a < d, \quad b < d.$$

(Entsprechend in den späteren Kapiteln.)

Satz 18:

$$x + y > x.$$

Beweis:

$$x + y = x + y.$$

Satz 19: *Aus*

$$x > y \quad bzw. \quad x = y \quad bzw. \quad x < y$$

folgt

$$x + z > y + z \quad bzw. \quad x + z = y + z \quad bzw. \quad x + z < y + z.$$

Beweis: 1) Aus

$$x > y$$

folgt

$$x = y + u,$$

$$x + z = (y + u) + z = (u + y) + z = u + (y + z) = (y + z) + u,$$

$$x + z > y + z.$$

2) Aus

$$x = y$$

folgt natürlich

$$x + z = y + z.$$

3) Aus

$$x < y$$

folgt

$$y > x,$$

also nach 1)

$$y + z > x + z,$$

$$x + z < y + z.$$

Satz 20: *Aus*

$$x + z > y + z \quad bzw. \quad x + z = y + z \quad bzw. \quad x + z < y + z$$

folgt

$$x > y \quad bzw. \quad x = y \quad bzw. \quad x < y.$$

Beweis: Folgt aus Satz 19, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 21: *Aus*

$$x > y, \quad z > u$$

folgt

$$x + z > y + u.$$

Beweis: Nach Satz 19 ist

$$x + z > y + z$$

und

$$y + z = z + y > u + y = y + u,$$

also

$$x + z > y + u.$$

Satz 22: *Aus*

$$x \geq y, \quad z > u \quad \textit{oder} \quad x > y, \quad z \geq u$$

folgt

$$x + z > y + u.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung durch Satz 19, sonst durch Satz 21 erledigt.

Satz 23: *Aus*

$$x \geq y, \quad z \geq u$$

folgt

$$x + z \geq y + u.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 22 erledigt.

Satz 24:

$$x \geq 1.$$

Beweis: Entweder ist

$$x = 1$$

oder

$$x = u' = u + 1 > 1.$$

Satz 25: *Aus*

$$y > x$$

folgt

$$y \geq x + 1$$

Beweis:

$$y = x + u,$$

$$u \geq 1,$$

also

$$y \geq x + 1.$$

Satz 26: *Aus*

$$y < x + 1$$

folgt

$$y \leq x.$$

Beweis: Sonst wäre

$$y > x,$$

also nach Satz 25

$$y \geq x + 1.$$

Satz 27: *In jeder nicht leeren Menge natürlicher Zahlen gibt es eine kleinste* (d. h. eine, die kleiner ist als jede etwaige andere).

Beweis: $\mathfrak{N}$ sei die gegebene Menge. $\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, die $\leq$ jeder Zahl aus $\mathfrak{N}$ sind.

1 gehört zu $\mathfrak{M}$ nach Satz 24. Nicht jedes x gehört zu $\mathfrak{M}$; denn für jedes y aus $\mathfrak{N}$ gehört $y + 1$ nicht zu $\mathfrak{M}$, wegen

$$y + 1 > y.$$

Also gibt es in $\mathfrak{M}$ ein m, so daß $m+1$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört; denn sonst müßte nach Axiom 5 jede natürliche Zahl zu $\mathfrak{M}$ gehören.

Von jenem m behaupte ich, daß es $\leq$ jedem n aus $\mathfrak{N}$ ist und zu $\mathfrak{N}$ gehört. Ersteres steht schon fest. Letzteres folgt indirekt so: Wäre m nicht zu $\mathfrak{N}$ gehörig, so wäre für jedes n aus $\mathfrak{N}$

$$m < n,$$

also nach Satz 25

$$m + 1 \leq n;$$

$m + 1$ würde also zu $\mathfrak{M}$ gehören, gegen das Obige.

§ 4.

Multiplikation.

Satz 28, zugleich **Definition 6:** *Auf genau eine Art läßt sich jedem Zahlenpaar x, y eine natürliche Zahl, $x \cdot y$ genannt* ($\cdot$ sprich: mal; aber man schreibt den Punkt meist nicht), *so zuordnen, daß*

1)
$$x \cdot 1 = x \quad \textit{für jedes } x,$$

2)
$$x \cdot y' = x \cdot y + x \quad \textit{für jedes } x \textit{ und jedes } y.$$

$x \cdot y$ heißt das Produkt von x mit y oder die durch Multiplikation von x mit y entstehende Zahl.

Beweis (mutatis mutandis wörtlich mit dem des Satzes 4 übereinstimmend): A) Zunächst zeigen wir, daß es bei jedem festen x höchstens eine Möglichkeit gibt, xy für alle y so zu definieren, daß

$$x \cdot 1 = x$$

und

$$xy' = xy + x \quad \text{für jedes } y.$$

Es seien a_y und b_y für alle y definiert und so beschaffen, daß

$$a_1 = x, \quad b_1 = x,$$

$$a_{y'} = a_y + x, \quad b_{y'} = b_y + x \quad \text{für jedes } y.$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der y mit

$$a_y = b_y.$$

I)
$$a_1 = x = b_1;$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Ist y zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist

$$a_y = b_y,$$

also

$$a_{y'} = a_y + x = b_y + x = b_{y'},$$

also y' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Daher ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen; d. h. für jedes y ist

$$a_y = b_y.$$

B) Wir zeigen jetzt, daß es zu jedem x eine Möglichkeit gibt, xy für alle y so zu definieren, daß

$$x \cdot 1 = x$$

und

$$xy' = xy + x \quad \text{für jedes } y.$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, zu denen es eine (also nach A) genau eine) solche Möglichkeit gibt.

I) Für

$$x = 1$$

leistet

$$xy = y$$

das Gewünschte. Denn

$$x \cdot 1 = 1 = x,$$

$$xy' = y' = y + 1 = xy + x.$$

Also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) Es sei x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, also ein xy für alle y vorhanden. Dann leistet

$$x'y = xy + y$$

das Gewünschte bei x'. Denn

$$x' \cdot 1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1 = x'$$

und

$$\begin{aligned} x'y' &= xy' + y' = (xy + x) + y' = xy + (x + y') = xy + (x + y)' \\ &= xy + (x' + y) = xy + (y + x') = (xy + y) + x' = x'y + x'. \end{aligned}$$

Also gehört x' zu $\mathfrak{M}$.

Daher umfaßt $\mathfrak{M}$ alle x.

Satz 29 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$xy = yx.$$

Beweis: y sei fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die die Behauptuug gilt.

I) Es ist

$$y \cdot 1 = y$$

und nach der Konstruktion beim Beweise des Satzes 28

$$1 \cdot y = y,$$

also

$$1 \cdot y = y \cdot 1,$$

1 zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist

$$xy = yx,$$

also

$$xy + y = yx + y = yx'.$$

Nach der Konstruktion beim Beweise des Satzes 28 ist

$$x'y = xy + y,$$

also

$$x'y = yx'$$

also x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Die Behauptung gilt also für alle x.

Satz 30 (distributives Gesetz):

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Vorbemerkung: Die aus Satz 30 und Satz 29 fließende Formel

$$(y+z)x = yx + zx$$

und ähnliche Analoga späterhin brauchen nicht besonders als Sätze formuliert oder auch nur aufgeschrieben zu werden.

Beweis: Bei festen x, y sei $\mathfrak{M}$ die Menge der z, für die die Behauptung gilt.

I)

$$x(y+1) = xy' = xy + x = xy + x \cdot 1;$$

1 gehört zu $\mathfrak{M}$.

II) Wenn z zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist

$$x(y+z) = xy + xz,$$

also

$$\begin{aligned} x(y+z') = x\big((y+z)'\big) &= x(y+z) + x = (xy+xz) + x \\ &= xy + (xz + x) = xy + xz', \end{aligned}$$

also z' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Daher gilt die Behauptung stets.

Satz 31 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$(xy)z = x(yz).$$

Beweis: x und y seien fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der z, für die die Behauptung gilt.

I)

$$(xy) \cdot 1 = xy = x(y \cdot 1);$$

also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) z gehöre zu $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$(xy)z = x(yz),$$

also unter Benutzung von Satz 30

$$(xy)z' = (xy)z + xy = x(yz) + xy = x(yz + y) = x(yz'),$$

also z' zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

$\mathfrak{M}$ umfaßt also alle natürlichen Zahlen.

Satz 32: *Aus*

$$x > y \quad \textit{bzw.} \quad x = y \quad \textit{bzw.} \quad x < y$$

folgt

$$xz > yz \quad \textit{bzw.} \quad xz = yz \quad \textit{bzw.} \quad xz < yz.$$

Beweis: 1) Aus

$$x > y$$

folgt

$$x = y + u,$$

$$xz = (y+u)z = yz + uz > yz.$$

2) Aus

$$x = y$$

folgt natürlich

$$xz = yz.$$

3) Aus

$$x < y$$

folgt

$$y > x,$$

also nach 1)

$$yz > xz,$$

$$xz < yz.$$

Satz 33: *Aus*

$$xz > yz \quad \textit{bzw.} \quad xz = yz \quad \textit{bzw.} \quad xz < yz$$

folgt

$$x > y \quad \textit{bzw.} \quad x = y \quad \textit{bzw.} \quad x < y.$$

Beweis: Folgt aus Satz 32, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 34: *Aus*

$$x > y, \quad z > u$$

folgt

$$xz > yu.$$

Beweis: Nach Satz 32 ist

$$xz > yz$$

und

$$yz = zy > uy = yu,$$

also

$$xz > yu.$$

Satz 35: *Aus*

$$x \geq y, \quad z > u \quad \textit{oder} \quad x > y, \quad z \geq u$$

folgt

$$xz > yu.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung durch Satz 32, sonst durch Satz 34 erledigt.

Satz 36: *Aus*

$$x \geq y, \quad z \geq u$$

folgt

$$xz \geq yu.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 35 erledigt.

Kapitel 2.

Brüche.

§ 1.

Definition und Äquivalenz.

Definition 7: *Unter einem Bruch* $\frac{x_1}{x_2}$ (sprich: x_1 über x_2) *versteht man das Paar der natürlichen Zahlen* x_1, x_2 (in dieser Reihenfolge).

Definition 8:

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

($\sim$ sprich: äquivalent), *wenn*

$$x_1 y_2 = y_1 x_2.$$

Satz 37:

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$x_1 x_2 = x_1 x_2.$$

Satz 38: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$x_1 y_2 = y_1 x_2,$$

also

$$y_1 x_2 = x_1 y_2.$$

Satz 39: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis:

$$x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad y_1 z_2 = z_1 y_2,$$

also

$$(x_1 y_2)(y_1 z_2) = (y_1 x_2)(z_1 y_2).$$

Stets ist

$$\begin{aligned}(xy)(zu) = x\bigl(y(zu)\bigr) = x\bigl((yz)u\bigr) = x\bigl(u(yz)\bigr) = (xu)(yz)\\ = (xu)(zy);\end{aligned}$$

daher ist

$$(x_1y_2)(y_1z_2) = (x_1z_2)(y_1y_2)$$

und

$$(y_1x_2)(z_1y_2) = (y_1y_2)(z_1x_2) = (z_1x_2)(y_1y_2),$$

folglich nach dem Obigen

$$(x_1z_2)(y_1y_2) = (z_1x_2)(y_1y_2),$$

$$x_1z_2 = z_1x_2.$$

Auf Grund der Sätze 37 bis 39 zerfallen alle Brüche in Klassen, so daß

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

dann und nur dann, wenn $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ derselben Klasse angehören.

Satz 40:

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1x}{x_2x}.$$

Beweis:

$$x_1(x_2x) = x_1(xx_2) = (x_1x)x_2.$$

§ 2.

Ordnung.

Definition 9:
$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$
(> sprich: größer als), *wenn*
$$x_1 y_2 > y_1 x_2.$$

Definition 10:
$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$
(< sprich: kleiner als), *wenn*
$$x_1 y_2 < y_1 x_2.$$

Satz 41: *Sind* $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$ *beliebig, so liegt genau einer der Fälle*
$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$
vor.

Beweis: Es liegt für x_1, x_2, y_1, y_2, genau einer der Fälle
$$x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad x_1 y_2 > y_1 x_2, \quad x_1 y_2 < y_1 x_2$$
vor.

Satz 42: *Aus*
$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$
folgt
$$\frac{y_1}{y_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis: Aus
$$x_1 y_2 > y_1 x_2$$
folgt
$$y_1 x_2 < x_1 y_2.$$

Satz 43: *Aus*
$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$
folgt
$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis: Aus
$$x_1 y_2 < y_1 x_2$$
folgt
$$y_1 x_2 > x_1 y_2.$$

Satz 44: *Aus*
$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2}.$$

Vorbemerkung: Ist also ein Bruch einer Klasse größer als ein Bruch einer anderen Klasse, so gilt dies für alle Repräsentantenpaare der beiden Klassen.

Beweis:

$$y_1u_2 = u_1y_2, \quad z_1x_2 = x_1z_2, \quad x_1y_2 > y_1x_2,$$

also

$$(y_1u_2)(z_1x_2) = (u_1y_2)(x_1z_2),$$

also nach Satz 32

$$(y_1x_2)(z_1u_2) = (u_1z_2)(x_1y_2) > (u_1z_2)(y_1x_2),$$

also nach Satz 33

$$z_1u_2 > u_1z_2.$$

Satz 45: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{u_1}{u_2}.$$

Vorbemerkung: Ist also ein Bruch einer Klasse kleiner als ein Bruch einer anderen Klasse, so gilt dies für alle Repräsentantenpaare der beiden Klassen.

Beweis: Nach Satz 43 ist

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2};$$

wegen

$$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$$

ist also nach Satz 44

$$\frac{u_1}{u_2} > \frac{z_1}{z_2},$$

also nach Satz 42

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{u_1}{u_2}.$$

Definition 11:

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$$

bedeutet

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \quad \textit{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\gtrsim$ sprich: größer oder äquivalent.)

Definition 12:

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$

bedeutet

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2} \quad \textit{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\lesssim$ sprich: kleiner oder äquivalent.)

Satz 46: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit $>$ in der Voraussetzung ist dies durch Satz 44 klar; anderenfalls ist

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}.$$

Satz 47: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{z_1}{z_2} \lesssim \frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit $<$ in der Voraussetzung ist dies durch Satz 45 klar; anderenfalls ist

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}.$$

Satz 48: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$\frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis: Satz 38 und Satz 42.

Satz 49: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$\frac{y_1}{y_2} \gtrsim \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis: Satz 38 und Satz 43.

Satz 50 (Transitivität der Ordnung): *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} < \frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis:

$$x_1 y_2 < y_1 x_2, \quad y_1 z_2 < z_1 y_2,$$

also

$$(x_1 y_2)(y_1 z_2) < (y_1 x_2)(z_1 y_2),$$

$$(x_1 z_2)(y_1 y_2) < (z_1 x_2)(y_1 y_2),$$

$$x_1 z_2 < z_1 x_2.$$

Satz 51 *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} < \frac{z_1}{z_2} \quad \textit{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis: Mit dem Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 45, sonst durch Satz 50 erledigt.

Satz 52: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis: Mit zwei Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 39, sonst durch Satz 51 erledigt.

Satz 53: *Zu* $\frac{x_1}{x_2}$ *gibt es ein*

$$\frac{z_1}{z_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$(x_1 + x_1)x_2 = x_1x_2 + x_1x_2 > x_1x_2,$$

$$\frac{x_1 + x_1}{x_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 54: *Zu* $\frac{x_1}{x_2}$ *gibt es ein*

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$x_1x_2 < x_1x_2 + x_1x_2 = x_1(x_2 + x_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2 + x_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 55: *Ist*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2},$$

so gibt es ein $\frac{z_1}{z_2}$ *mit*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Beweis:

$$x_1y_2 < y_1x_2,$$

also

$$x_1x_2 + x_1y_2 < x_1x_2 + y_1x_2, \quad x_1y_2 + y_1y_2 < y_1x_2 + y_1y_2,$$

$$x_1(x_2 + y_2) < (x_1 + y_1)x_2, \quad (x_1 + y_1)y_2 < y_1(x_2 + y_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

§ 3.

Addition.

Definition 13: *Unter* $\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2}$ (+ sprich: plus) *versteht man den Bruch* $\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$.

Er heißt die Summe von $\frac{x_1}{x_2}$ *und* $\frac{y_1}{y_2}$ *oder der durch Addition von* $\frac{y_1}{y_2}$ *zu* $\frac{x_1}{x_2}$ *entstehende Bruch.*

Satz 56: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Vorbemerkung: Die Klasse der Summe hängt also nur von den Klassen ab, zu denen die "Summanden" gehören.

Beweis:

$$x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad z_1 u_2 = u_1 z_2,$$

also

$$(x_1 y_2)(z_2 u_2) = (y_1 x_2)(z_2 u_2), \quad (z_1 u_2)(x_2 y_2) = (u_1 z_2)(x_2 y_2),$$

also

$$(x_1 z_2)(y_2 u_2) = (y_1 u_2)(x_2 z_2), \quad (z_1 x_2)(y_2 u_2) = (u_1 y_2)(x_2 z_2),$$

$$(x_1 z_2)(y_2 u_2) + (z_1 x_2)(y_2 u_2) = (y_1 u_2)(x_2 z_2) + (u_1 y_2)(x_2 z_2),$$

$$(x_1 z_2 + z_1 x_2)(y_2 u_2) = (y_1 u_2 + u_1 y_2)(x_2 z_2),$$

$$\frac{x_1 z_2 + z_1 x_2}{x_2 z_2} \sim \frac{y_1 u_2 + u_1 y_2}{y_2 u_2}.$$

Satz 57:

$$\frac{x_1}{x} + \frac{x_2}{x} \sim \frac{x_1 + x_2}{x}.$$

Beweis: Nach Definition 13 und Satz 40 ist

$$\frac{x_1}{x} + \frac{x_2}{x} \sim \frac{x_1 x + x_2 x}{xx} \sim \frac{(x_1 + x_2)x}{xx} \sim \frac{x_1 + x_2}{x}.$$

Satz 58: (kommutatives Gesetz der Addition):

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2} \sim \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{y_2 x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 59: (assoziatives Gesetz der Addition):

$$\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2}\right) + \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}\right).$$

Beweis:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\right)+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2y_2}+\frac{z_1}{z_2}$$
$$\sim\frac{(x_1y_2+y_1x_2)z_2+z_1(x_2y_2)}{(x_2y_2)z_2}\sim\frac{\big((x_1y_2)z_2+(y_1x_2)z_2\big)+z_1(y_2x_2)}{x_2(y_2z_2)}$$
$$\sim\frac{\big(x_1(y_2z_2)+(x_2y_1)z_2\big)+(z_1y_2)x_2}{x_2(y_2z_2)}\sim\frac{\big(x_1(y_2z_2)+x_2(y_1z_2)\big)+(z_1y_2)x_2}{x_2(y_2z_2)}$$
$$\sim\frac{x_1(y_2z_2)+\big((y_1z_2)x_2+(z_1y_2)x_2\big)}{x_2(y_2z_2)}\sim\frac{x_1(y_2z_2)+(y_1z_2+z_1y_2)x_2}{x_2(y_2z_2)}$$
$$\sim\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1z_2+z_1y_2}{y_2z_2}\sim\frac{x_1}{x_2}+\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Satz 60:
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}>\frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:
$$x_1y_2+y_1x_2>x_1y_2,$$
$$(x_1y_2+y_1x_2)x_2>(x_1y_2)x_2=x_1(y_2x_2)=x_1(x_2y_2),$$
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\sim\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2y_2}>\frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 61: *Aus*
$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}$$
folgt
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis: Aus
$$x_1y_2>y_1x_2$$
folgt
$$(x_1y_2)z_2>(y_1x_2)z_2.$$
Wegen
$$(xy)z=x(yz)=x(zy)=(xz)y$$
ist also
$$(x_1z_2)y_2>(y_1z_2)x_2$$
und
$$(z_1x_2)y_2=(z_1y_2)x_2,$$
also
$$(x_1z_2+z_1x_2)y_2>(y_1z_2+z_1y_2)x_2,$$
$$(x_1z_2+z_1x_2)(y_2z_2)>(y_1z_2+z_1y_2)(x_2z_2),$$
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{x_1z_2+z_1x_2}{x_2z_2}>\frac{y_1z_2+z_1y_2}{y_2z_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Satz 62: *Aus*
$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}\quad \textit{bzw.}\quad \frac{x_1}{x_2}\sim\frac{y_1}{y_2}\quad \textit{bzw.}\quad \frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$$
folgt
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\quad \textit{bzw.}\quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}$$
$$\textit{bzw.}\quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}<\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis: Der erste Teil ist Satz 61, der zweite in Satz 56 enthalten, der dritte eine Folge des ersten wegen

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2},$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}.$$

Satz 63: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}$$
$$\textit{bzw.} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Beweis: Folgt aus Satz 62, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 64: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Nach Satz 61 ist

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}$$

und

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{z_1}{z_2} + \frac{y_1}{y_2} > \frac{u_1}{u_2} + \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2},$$

also

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Satz 65: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2} \quad \textit{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit dem Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 56 und Satz 61, sonst durch Satz 64 erledigt.

Satz 66: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit zwei Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 56, sonst durch Satz 65 erledigt.

Satz 67: *Ist*
$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2},$$
so hat
$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$$
eine Lösung $\frac{u_1}{u_2}$. *Sind* $\frac{v_1}{v_2}$ *und* $\frac{w_1}{w_2}$ *Lösungen, so ist*
$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Vorbemerkung: Für
$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$
gibt es nach Satz 60 keine Lösung.

Beweis: Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 63; denn für
$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{v_1}{v_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{w_1}{w_2}$$
ist nach jenem Satz
$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Die Existenz eines $\frac{u_1}{u_2}$ (erste Behauptung) ergibt sich folgendermaßen. Es ist
$$x_1y_2 > y_1x_2.$$
Es werde u aus
$$x_1y_2 = y_1x_2 + u$$
bestimmt und
$$u_1 = u, \quad u_2 = x_2y_2$$
gesetzt. Dann ist $\frac{u_1}{u_2}$ Lösung wegen
$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u}{x_2y_2} \sim \frac{y_1x_2}{x_2y_2} + \frac{u}{x_2y_2} \sim \frac{y_1x_2 + u}{x_2y_2} \sim \frac{x_1y_2}{x_2y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Definition 14: *Das beim Beweise des Satzes 67 konstruierte spezielle* $\frac{u_1}{u_2}$ *heißt* $\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}$ (− sprich: minus) *oder die Differenz* $\frac{x_1}{x_2}$ *minus* $\frac{y_1}{y_2}$ *oder der durch Subtraktion des Bruches* $\frac{y_1}{y_2}$ *vom Bruche* $\frac{x_1}{x_2}$ *entstehende Bruch.*

Aus
$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{v_1}{v_2}$$
folgt also
$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}.$$

§ 4.

Multiplikation.

Definition 15: *Unter* $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2}$ ($\cdot$ sprich: mal; aber man schreibt den Punkt meist nicht) *versteht man den Bruch* $\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$.

Er heißt das Produkt von $\frac{x_1}{x_2}$ *mit* $\frac{y_1}{y_2}$ *oder der durch Multiplikation von* $\frac{x_1}{x_2}$ *mit* $\frac{y_1}{y_2}$ *entstehende Bruch.*

Satz 68: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Vorbemerkung: Die Klasse des Produktes hängt also nur den Klassen ab, zu denen die "Faktoren" gehören.

Beweis:

$$x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad z_1 u_2 = u_1 z_2,$$

also

$$(x_1 y_2)(z_1 u_2) = (y_1 x_2)(u_1 z_2),$$

$$(x_1 z_1)(y_2 u_2) = (y_1 u_1)(x_2 z_2),$$

$$\frac{x_1 z_1}{x_2 z_2} \sim \frac{y_1 u_1}{y_2 u_2}.$$

Satz 69 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{x_1}{x_2}.$$

Beweis:

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2} \sim \frac{y_1 x_1}{y_2 x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 70 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}\right)\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Beweis:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}\right)\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{(x_1 y_1) z_1}{(x_2 y_2) z_2}$$
$$\sim \frac{x_1 (y_1 z_1)}{x_2 (y_2 z_2)} \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1 z_1}{y_2 z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Satz 71 (distributives Gesetz):

$$\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2}\right) \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2} + \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis:

$$\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right) \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1z_2+z_1y_2}{y_2z_2} \sim \frac{x_1(y_1z_2+z_1y_2)}{x_2(y_2z_2)}$$
$$\sim \frac{x_1(y_1z_2)+x_1(z_1y_2)}{x_2(y_2z_2)} \sim \frac{x_1(y_1z_2)}{x_2(y_2z_2)}+\frac{x_1(z_1y_2)}{x_2(y_2z_2)} \sim \frac{(x_1y_1)z_2}{(x_2y_2)z_2}+\frac{(x_1z_1)y_2}{(x_2z_2)y_2}$$
$$\sim \frac{x_1y_1}{x_2y_2}+\frac{x_1z_1}{x_2z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}+\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Satz 72: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Beweis: 1) Aus

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$x_1y_2 > y_1x_2,$$
$$(x_1y_2)(z_1z_2) > (y_1x_2)(z_1z_2),$$
$$(x_1z_1)(y_2z_2) > (y_1z_1)(x_2z_2),$$
$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1z_1}{x_2z_2} > \frac{y_1z_1}{y_2z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

2) Aus

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

folgt nach Satz 68

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

3) Aus

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

folgt

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2},$$

also nach 1)

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2},$$
$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Satz 73: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \quad bzw. \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Beweis: Folgt aus Satz 72, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 74: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Nach Satz 72 ist

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}$$

und

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{z_1}{z_2}\frac{y_1}{y_2} > \frac{u_1}{u_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2},$$

also

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Satz 75: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2} \quad \textit{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit dem Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 68 und Satz 72, sonst durch Satz 74 erledigt.

Satz 76: *Aus*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

folgt

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Beweis: Mit zwei Äquivalenzzeichen in der Voraussetzung durch Satz 68, sonst durch Satz 75 erledigt.

Satz 77: *Die Äquivalenz*

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$$

wo $\frac{x_1}{x_2}$ *und* $\frac{y_1}{y_2}$ *gegeben sind, hat eine Lösung* $\frac{u_1}{u_2}$. *Sind* $\frac{v_1}{v_2}$ *und* $\frac{w_1}{w_2}$ *Lösungen, so ist*

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Beweis: Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 73; denn für

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{w_1}{w_2}$$

ist nach jenem Satz

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Die Existenz eines $\frac{u_1}{u_2}$ (erste Behauptung) ergibt sich folgendermaßen. Für

$$u_1 = x_1y_2, \quad u_2 = x_2y_1$$

ist $\frac{u_1}{u_2}$ Lösung wegen

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2} \sim \frac{u_1}{u_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1y_2}{x_2y_1}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{(x_1y_2)y_1}{(x_2y_1)y_2} \sim \frac{x_1(y_1y_2)}{x_2(y_1y_2)} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

§ 5.

Rationale Zahlen und ganze Zahlen.

Definition 16: *Unter einer rationalen Zahl versteht man die Menge aller einem festen Bruch äquivalenten Brüche* (also eine Klasse im Sinne des § 1).

Große lateinische Buchstaben bezeichnen durchweg, wofern nichts anderes gesagt wird, rationale Zahlen.

Definition 17:

$$X = Y$$

(= sprich: gleich), *wenn beide Mengen dieselben Brüche umfassen. Anderenfalls*

$$X \neq Y$$

($\neq$ sprich: ungleich).

Trivial sind die drei Sätze:

Satz 78:

$$X = X.$$

Satz 79: *Aus*

$$X = Y$$

folgt

$$Y = X.$$

Satz 80: *Aus*

$$X = Y, \quad Y = Z$$

folgt

$$X = Z.$$

Definition 18:

$$X > Y$$

($>$ sprich: größer als), *wenn für einen* (also nach Satz 44 für je einen) *Bruch* $\frac{x_1}{x_2}$ *bzw.* $\frac{y_1}{y_2}$ *aus der Menge* X *bzw.* Y

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

ist.

Definition 19:

$$X < Y$$

($<$ sprich: kleiner als), *wenn für einen* (also nach Satz 45 für je einen) *Bruch* $\frac{x_1}{x_2}$ *bzw.* $\frac{y_1}{y_2}$ *aus der Menge* X *bzw.* Y

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

ist.

Satz 81: *Sind* X, Y *beliebig, so liegt genau einer der Fälle*

$$X = Y, \quad X > Y, \quad X < Y$$

vor.

Beweis: Satz 41.

Satz 82: *Aus*

$$X > Y$$

folgt

$$Y < X.$$

Beweis: Satz 42.

Satz 83: *Aus*

$$X < Y$$

folgt

$$Y > X.$$

Beweis: Satz 43.

Definition 20:

$$X \geq Y$$

bedeutet

$$X > Y \quad \textit{oder} \quad X = Y.$$

($\geq$ sprich: größer oder gleich.)

Definition 21:

$$X \leq Y$$

bedeutet

$$X < Y \quad \textit{oder} \quad X = Y.$$

($\leq$ sprich: kleiner oder gleich.)

Satz 84: *Aus*

$$X \geq Y$$

folgt

$$Y \leq X.$$

Beweis: Satz 48.

Satz 85: *Aus*

$$X \leq Y$$

folgt

$$Y \geq X.$$

Beweis: Satz 49.

Satz 86 (Transitivität der Ordnung): *Aus*

$$X < Y, \quad Y < Z$$

folgt

$$X < Z.$$

Beweis: Satz 50.

Satz 87: *Aus*

$$X \leq Y, \quad Y < Z \quad \textit{oder} \quad X < Y, \quad Y \leq Z$$

folgt

$$X < Z.$$

Beweis: Satz 51.

Satz 88: *Aus*

$$X \leq Y, \quad Y \leq Z$$

folgt

$$X \leq Z.$$

Beweis: Satz 52.

Satz 89: *Zu X gibt es ein*

$$Z > X.$$

Beweis: Satz 53.

Satz 90: *Zu X gibt es ein*

$$Z < X.$$

Beweis: Satz 54.

Satz 91: *Ist*

$$X < Y,$$

so gibt es ein Z mit

$$X < Z < Y.$$

Beweis: Satz 55.

Definition 22: *Unter $X + Y$* (+ sprich: plus) *versteht man die Klasse, der eine* (also nach Satz 56 jede) *Summe eines Bruches aus X und eines Bruches aus Y angehört.*

Diese rationale Zahl heißt die Summe von X und Y oder die durch Addition von Y zu X entstehende rationale Zahl.

Satz 92 (kommutatives Gesetz der Addition):

$$X + Y = Y + X.$$

Beweis: Satz 58.

Satz 93 (assoziatives Gesetz der Addition):

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

Beweis: Satz 59.

Satz 94:

$$X + Y > X.$$

Beweis: Satz 60.

Satz 95: *Aus*

$$X > Y$$

folgt

$$X + Z > Y + Z.$$

Beweis: Satz 61.

Satz 96: *Aus*

$$X > Y \quad \textit{bzw.} \quad X = Y \quad \textit{bzw.} \quad X < Y$$

folgt

$$X + Z > Y + Z \quad \textit{bzw.} \quad X + Z = Y + Z \quad \textit{bzw.} \quad X + Z < Y + Z.$$

Beweis: Satz 62.

Satz 97: *Aus*

$$X + Z > Y + Z \quad \textit{bzw.} \quad X + Z = Y + Z \quad \textit{bzw.} \quad X + Z < Y + Z$$

folgt

$$X > Y \quad \textit{bzw.} \quad X = Y \quad \textit{bzw.} \quad X < Y.$$

Beweis: Satz 63.

Satz 98: *Aus*

$$X > Y, \quad Z > U$$

folgt

$$X + Z > Y + U.$$

Beweis: Satz 64.

Satz 99: *Aus*

$$X \geq Y, \quad Z > U \quad \textit{oder} \quad X > Y, \quad Z \geq U$$

folgt

$$X + Z > Y + U.$$

Beweis: Satz 65.

Satz 100: *Aus*

$$X \geq Y, \quad Z \geq U$$

folgt

$$X + Z \geq Y + U.$$

Beweis: Satz 66.

Satz 101: *Ist*

$$X > Y,$$

so hat

$$Y + U = X$$

genau eine lösung U*.*

Vorbemerkung: Für

$$X \leq Y$$

gibt es nach Satz 94 keine Lösung.

Beweis: Satz 67.

Definition 23: *Dies* U *heißt* $X - Y$ ($-$ sprich: minus) *oder die Differenz* X *minus* Y *oder die durch Subtraktion der rationalen Zahl* Y *von der rationalen Zahl* X *entstehende rationale Zahl.*

Definition 24: *Unter* $X \cdot Y$ ($\cdot$ sprich: mal; aber man schreibt den Punkt meist nicht) *versteht man die Klasse, der ein* (also nach Satz 68 jedes) *Produkt eines Bruches aus* X *mit einem Bruche aus* Y *angehört.*

Diese rationale Zahl heißt das Produkt von X *mit* Y *oder die durch Multiplikation von* X *mit* Y *entstehende rationale Zahl.*

Satz 102 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$XY = YX.$$

Beweis: Satz 69.

Satz 103 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$(XY)Z = X(YZ).$$

Beweis: Satz 70.

Satz 104 (distributives Gesetz):

$$X(Y + Z) = XY + XZ.$$

Beweis: Satz 71.

Satz 105: *Aus*

$$X > Y \quad \textit{bzw.} \quad X = Y \quad \textit{bzw.} \quad X < Y$$

folgt

$$XZ > YZ \quad \textit{bzw.} \quad XZ = YZ \quad \textit{bzw.} \quad XZ < YZ.$$

Beweis: Satz 72.

Satz 106: *Aus*

$$XZ > YZ \quad \textit{bzw.} \quad XZ = YZ \quad \textit{bzw.} \quad XZ < YZ$$

folgt

$$X > Y \quad \textit{bzw.} \quad X = Y \quad \textit{bzw.} \quad X < Y.$$

Beweis: Satz 73.

Satz 107: *Aus*

$$X > Y, \quad Z > U$$

folgt

$$XZ > YU.$$

Beweis: Satz 74.

Satz 108: *Aus*

$$X \geq Y, \quad Z > U \quad \textit{oder} \quad X > Y, \quad Z \geq U$$

folgt

$$XZ > YU.$$

Beweis: Satz 75.

Satz 109: *Aus*

$$X \geq Y, \quad Z \geq U$$

folgt

$$XZ \geq YU.$$

Beweis: Satz 76.

Satz 110: *Die Gleichung*

$$YU = X,$$

wo X und Y gegeben sind, hat genau eine Lösung U.
Beweis: Satz 77.

Satz 111: *Aus*

$$\frac{x}{1} > \frac{y}{1} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{x}{1} \sim \frac{y}{1} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{x}{1} < \frac{y}{1}$$

folgt

$$x > y \quad \textit{bzw.} \quad x = y \quad \textit{bzw.} \quad x < y$$

und umgekehrt.
Beweis:

$$x \cdot 1 > y \cdot 1 \quad \text{bzw.} \quad x \cdot 1 = y \cdot 1 \quad \text{bzw.} \quad x \cdot 1 < y \cdot 1$$

bedeutet dasselbe wie

$$x > y \quad \text{bzw.} \quad x = y \quad \text{bzw.} \quad x < y.$$

Definition 25: *Eine rationale Zahl heißt ganz, wenn unter den Brüchen, deren Gesamtheit sie ist, ein Bruch $\frac{x}{1}$ vorkommt.*
Dies x ist nach Satz 111 eindeutig bestimmt, und umgekehrt entspricht jedem x genau eine ganze Zahl.

Satz 112:
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} \sim \frac{x+y}{1},$$
$$\frac{x}{1}\frac{y}{1} \sim \frac{xy}{1}.$$

Vorbemerkung: Summe und Produkt zweier ganzer Zahlen sind also ganze Zahlen.

Beweis: 1) Nach Satz 57 ist
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} \sim \frac{x+y}{1}.$$

2) Nach Definition 15 ist
$$\frac{x}{1}\frac{y}{1} \sim \frac{xy}{1 \cdot 1} \sim \frac{xy}{1}.$$

Satz 113: *Die ganzen Zahlen genügen den fünf Axiomen der natürlichen Zahlen, wenn die Klasse von $\frac{1}{1}$ an Stelle von 1 genommen wird und als Nachfolger der Klasse von $\frac{x}{1}$ die Klasse von $\frac{x'}{1}$ angesehen wird.*

Beweis: $\overline{\mathfrak{Z}}$ sei die Menge der ganzen Zahlen.

1) Die Klasse von $\frac{1}{1}$ gehört zu $\overline{\mathfrak{Z}}$.

2) Zu jeder ganzen Zahl haben wir einen Nachfolger eindeutig erklärt.

3) Er ist stets von der Klasse von $\frac{1}{1}$ verschieden, da stets
$$x' \neq 1.$$

4) Stimmen die Klassen von $\frac{x'}{1}$ und $\frac{y'}{1}$ überein, so ist
$$\frac{x'}{1} \sim \frac{y'}{1},$$
$$x' = y',$$
$$x = y,$$
$$\frac{x}{1} \sim \frac{y}{1},$$
und die Klassen von $\frac{x}{1}$ und $\frac{y}{1}$ stimmen überein.

5) Eine Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ von ganzen Zahlen habe die Eigenschaften:

I) Die Klasse von $\frac{1}{1}$ gehört zu $\overline{\mathfrak{M}}$.

II) Falls die Klasse von $\frac{x}{1}$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehört, so gehört die Klasse von $\frac{x'}{1}$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$.

Dann bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die die Klasse von $\frac{x}{1}$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehört. Alsdann ist 1 zu $\mathfrak{M}$ und mit jedem x von $\mathfrak{M}$ auch x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Also gehört jede natürliche Zahl zu $\mathfrak{M}$, also jede ganze Zahl zu $\overline{\mathfrak{M}}$.

Da $=$, $>$, $<$, Summe und Produkt (nach Satz 111 und 112) den alten Begriflen entsprechen, haben die ganzen Zahlen alle Eigenschaften, die wir in Kapitel 1 für die natürlichen Zahlen bewiesen haben.

Daher werfen wir die natürlichen Zahlen weg, ersetzen sie durch die entsprechenden ganzen Zahlen und haben fortan (da auch die Brüche überfiüssig werden) in bezug auf das Bisherige nur von rationalen Zahlen zu reden. (Die natürlichen Zahlen verbleiben paarweise über und unter dem Strich im Begriff des Bruches, und die Brüche bleiben als Individuen der Menge, die rationale Zahl heißt.)

Definition 26: (Das frei gewordene Zeichen) *x bezeichnet die ganze Zahl, die durch die Klasse von $\frac{x}{1}$ gegeben ist.*

In unserer neuen Sprache ist also z. B.

$$X \cdot 1 = X;$$

denn

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1}{1} \sim \frac{x_1 \cdot 1}{x_2 \cdot 1} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Satz 114: *Ist Z die zum Bruch $\frac{x}{y}$ gehörige rationale Zahl, so ist*

$$yZ = x.$$

Beweis:

$$\frac{y}{1}\frac{x}{y} \sim \frac{yx}{1 \cdot y} \sim \frac{xy}{1 \cdot y} \sim \frac{x}{1}.$$

Definition 27: *Das U des Satzes 110 heißt Quotient von X durch Y oder die durch Division von X durch Y entstehende rationale Zahl. Es werde mit $\frac{X}{Y}$ bezeichnet* (sprich: X durch Y).

Sind X und Y ganze Zahlen, also $X = x$, $Y = y$, so bedeutet die durch die Definitionen 26 und 27 erklärte rationale Zahl $\frac{x}{y}$ nach Satz 114 die Klasse, der der Bruch $\frac{x}{y}$ im alten Sinne angehört. Eine Verwechselung beider Zeichen $\frac{x}{y}$ ist nicht zu befürchten, da Brüche in Zukunft nicht mehr gesondert vorkommen werden; es bezeichnet fortan $\frac{x}{y}$ stets eine rationale Zahl. Umgekehrt läßt sich jede rationale Zahl in der Form $\frac{x}{y}$ darstellen, auf Grund von Satz 114 und Definition 27.

Satz 115: *Sind X und Y gegeben, so gibt es ein z mit*

$$zX > Y.$$

Beweis: $\frac{Y}{X}$ ist eine rationale Zahl; nach Satz 89 gibt es (in unserer neuen Sprache) ganze Zahlen z, v mit

$$\frac{z}{v} > \frac{Y}{X}.$$

Nach Satz 111 ist

$$v \geq 1,$$

also nach Satz 105

$$zX = Xz = X\left(\frac{z}{v}v\right) = \left(X\frac{z}{v}\right)v \geq \left(X\frac{z}{v}\right) \cdot 1 = X\frac{z}{v} > X\frac{Y}{X} = Y.$$

Kapitel 3.

Schnitte.

§ 1.

Definition.

Definition 28: *Eine Menge von rationalen Zahlen heißt Schnitt, wenn*

1) sie eine rationale Zahl, aber nicht jede rationale Zahl enthält;

2) jede rationale Zahl der Menge kleiner ist als jede nicht zur Menge gehörige rationale Zahl;

3) in ihr keine größte rationale Zahl vorkommt (d. h. Zahl, die größer als jede etwaige andere, von ihr verschiedene ist).

Man nennt auch die Menge Unterklasse, die Menge der nicht in ihr enthaltenen rationalen Zahlen Oberklasse und redet entsprechend von Unterzahlen und Oberzahlen.

Kleine griechische Buchstaben bedeuten durchweg, wenn nichts anderes gesagt wird, Schnitte.

Definition 29:

$$\xi = \eta$$

($=$ sprich: gleich), *wenn jede Unterzahl bei ξ Unterzahl bei η und jede Unterzahl bei η Unterzahl bei ξ ist.*

Mit anderen Worten: wenn die Mengen identisch sind.

Anderenfalls

$$\xi \neq \eta$$

($\neq$ sprich: ungleich).

Trivial sind die drei Sätze:

Satz 116:

$$\xi = \xi.$$

Satz 117: *Aus*

$$\xi = \eta$$

folgt

$$\eta = \xi.$$

Satz 118: *Aus*

$$\xi = \eta, \quad \eta = \zeta$$

folgt

$$\xi = \zeta.$$

Satz 119: *Ist X Oberzahl bei ξ und*

$$X_1 > X,$$

so ist X_1 Oberzahl bei ξ.

Beweis: Folgt aus 2) der Definition 28.

Satz 120: *Ist X Unterzahl bei ξ und*

$$X_1 < X,$$

so ist X_1 Unterzahl bei ξ.

Beweis: Folgt aus 2) der Definition 28.

Natürlich ist umgekehrt die Forderung des Satzes 120 mit 2) der Definition 28 identisch. Um also von irgend einer Menge rationaler Zahlen zu zeigen, daß sie ein Schnitt ist, genügt stets der Nachweis von:

1) Sie ist nicht leer, und es gibt eine rationale Zahl, die nicht darin liegt.

2) Mit jeder ihrer Zahlen gehört jede kleinere dazu.

3) Zu jeder ihrer Zahlen gibt es in ihr eine größere.

§ 2.

Ordnung.

Definition 30: *Sind ξ und η Schnitte, so ist*

$$\xi > \eta$$

($>$ sprich: größer als), *wenn es eine Unterzahl bei ξ gibt, die Oberzahl bei η ist.*

Definition 31: *Sind ξ und η Schnitte, so ist*

$$\xi < \eta$$

($<$ sprich: kleiner als), *wenn es eine Oberzahl bei ξ gibt, die Unterzahl bei η ist.*

Satz 121: *Aus*

$$\xi > \eta$$

folgt

$$\eta < \xi.$$

Beweis: Es gibt eben eine Oberzahl bei η, die Unterzahl bei ξ ist.

Satz 122: *Aus*

$$\xi < \eta$$

folgt

$$\eta > \xi.$$

Beweis: Es gibt eben eine Unterzahl bei η, die Oberzahl bei ξ ist.

Satz 123: *Sind ξ, η beliebig, so liegt genau einer der Fälle*

$$\xi = \eta, \quad \xi > \eta, \quad \xi < \eta$$

vor.

Beweis: 1)

$$\xi = \eta, \quad \xi > \eta$$

sind unverträglich nach Definition 29 und Definition 30.

$$\xi = \eta, \quad \xi < \eta$$

sind unverträglich nach Definition 29 und Definition 31.

Aus

$$\xi > \eta, \quad \xi < \eta$$

würde folgen, daß es eine Unterzahl X bei ξ gibt, die Oberzahl bei η ist, und eine Oberzahl Y bei ξ, die Unterzahl bei η ist. Nach 2) der Definition 28 wäre also zugleich

$$X < Y, \quad X > Y.$$

Folglich liegt höchstens einer der drei Fälle vor.

2) Ist

$$\xi \neq \eta,$$

so stimmen die Unterklassen nicht überein. Also ist entweder eine gewisse Unterzahl bei ξ Oberzahl bei η und alsdann

$$\xi > \eta,$$

oder eine gewisse Unterzahl bei η Oberzahl bei ξ und alsdann

$$\xi < \eta.$$

Definition 32:

$$\xi \geq \eta$$

bedeutet

$$\xi > \eta \quad \textit{oder} \quad \xi = \eta.$$

($\geq$ sprich: größer oder gleich.)

Definition 32:

$$\xi \leq \eta$$

bedeutet

$$\xi < \eta \quad \textit{oder} \quad \xi = \eta.$$

($\leq$ sprich: kleiner oder gleich.)

Satz 124: *Aus*

$$\xi \geq \eta$$

folgt

$$\eta \leq \xi.$$

Beweis: Satz 121.

Satz 125: *Aus*

$$\xi \leq \eta$$

folgt

$$\eta \geq \xi.$$

Beweis: Satz 122.

Satz 126 (Transitivität der Ordnung): *Aus*

$$\xi < \eta, \quad \eta < \zeta$$

folgt

$$\xi < \zeta.$$

Beweis: Es gibt eine Oberzahl X bei ξ, die Unterzahl bei η ist; und eine Oberzahl Y bei η, die Unterzahl bei ζ ist. Wegen Schnitteigenschaft 2) von η ist

$$X < Y,$$

also Y Oberzahl bei ξ. Daher ist

$$\xi < \zeta.$$

Satz 127: *Aus*

$$\xi \leq \eta, \quad \eta < \zeta \quad \textit{oder} \quad \xi < \eta, \quad \eta \leq \zeta$$

folgt

$$\xi < \zeta.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 126 erledigt.

Satz 128: *Aus*

$$\xi \leq \eta, \quad \eta \leq \zeta$$

folgt

$$\xi \leq \zeta.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 127 erledigt.

§ 3.

Addition.

Satz 129: I) *Es seien ξ und η Schnitte. Dann ist die Menge der rationalen Zahlen, die sich in der Form $X+Y$ darstellen lassen, wo X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η ist, ein Schnitt.*

II) *Keine Zahl dieser Menge läßt sich als Summe einer Oberzahl bei ξ und einer Oberzahl bei η darstellen.*

Beweis: 1) Geht man von irgend einer Unterzahl X bei ξ und irgend einer Unterzahl Y bei η aus, so gehört $X+Y$ zur Menge.

Geht man von irgend einer Oberzahl X_1 bei ξ und irgend einer Oberzahl Y_1 bei η aus, so ist für alle Unterzahlen X bzw. Y bei ξ bzw. η

$$X < X_1, \quad Y < Y_1,$$

also

$$X + Y < X_1 + Y_1,$$

$$X_1 + Y_1 \neq X + Y;$$

$X_1 + Y_1$ gehört also nicht zur Menge. Und II) ist schon mitbewiesen.

2) Es ist zu zeigen, daß jede Zahl, die kleiner als eine Zahl der Menge ist, auch zur Menge gehört. Es sei also X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η und

$$Z < X + Y.$$

Dann ist

$$(X+Y)\frac{Z}{X+Y} < (X+Y) \cdot 1,$$

also nach Satz 106

$$\frac{Z}{X+Y} < 1,$$

also nach Satz 105

$$X\frac{Z}{X+Y} < X \cdot 1 = X$$

und

$$Y\frac{Z}{X+Y} < Y \cdot 1 = Y;$$

nach der zweiten Schnitteigenschaft bei ξ bzw. η ist also $X\frac{Z}{X+Y}$ bzw. $Y\frac{Z}{X+Y}$ Unterzahl bei ξ bzw. η.

Die Summe dieser beiden rationalen Zahlen ist das gegebene Z, wegen

$$X\frac{Z}{X+Y} + Y\frac{Z}{X+Y} = (X+Y)\frac{Z}{X+Y} = Z.$$

3) Ist eine Zahl der Menge gegeben, so hat sie die Form $X+Y$, wo X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η ist. Man wähle nach der dritten Schnitteigenschaft eine Unterzahl

$$X_1 > X$$

bei ξ; dann ist

$$X_1 + Y > X + Y,$$

also eine Zahl der Menge $> X + Y$ vorhanden.

Definition 34: *Der in Satz 129 konstruierte Schnitt heißt* $\xi + \eta$ (+ sprich: plus). *Er heißt auch die Summe von* ξ *und* η *oder der durch Addition von* η *und* ξ *entstehende Schnitt.*

Satz 130 (kommutatives Gesetz der Addition):

$$\xi + \eta = \eta + \xi.$$

Beweis: Jedes $X + Y$ ist auch $Y + X$ und umgekehrt.

Satz 131 (assoziatives Gesetz der Addition):

$$(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta).$$

Beweis: Jedes $(X + Y) + Z$ ist auch $X + (Y + Z)$ und umgekehrt.

Satz 132: *Bei jedem Schnitt gibt es, wenn* A *gegeben ist, eine Unterzahl* X *und eine Oberzahl* U *mit*

$$U - X = A.$$

Beweis: X_1 sei irgend eine Unterzahl. Wir betrachten alle rationalen Zahlen

$$X_1 + nA,$$

wo n ganz ist. Sie sind nicht lauter Unterzahlen; denn ist Y irgend eine Oberzahl, so ist

$$Y > X_1$$

also nach Satz 115 bei passendem n

$$nA > Y - X_1,$$

$$X_1 + nA > (Y - X_1) + X_1 = Y,$$

also $X_1 + nA$ Oberzahl.

In der Menge der n, für die $X_1 + nA$ Oberzahl ist, gibt es nach Satz 27 eine kleinste ganze Zahl; sie heiße u.

Ist

$$u = 1,$$

so setze man

$$X = X_1, \quad U = X_1 + A;$$

ist

$$u > 1,$$

so setze man

$$X = X_1 + (u - 1)A, \quad U = X_1 + uA = X + A.$$

Jedesmal ist X Unterzahl, U Oberzahl und

$$U - X = A.$$

Satz 133:

$$\xi + \eta > \xi.$$

Beweis: Y sei eine Unterzahl bei η. Nach Satz 132 wähle man eine Unterzahl X bei ξ und eine Oberzahl U bei ξ mit

$$U - X = Y$$

dann ist

$$U = X + Y$$

Oberzahl bei ξ und Unterzahl bei $\xi + \eta$. Daher ist

$$\xi + \eta > \xi.$$

Satz 134: *Aus*

$$\xi > \eta$$

folgt

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta.$$

Beweis: Es gibt eine Oberzahl Y bei η, die Unterzahl bei ξ ist. Man wähle eine größere Unterzahl

$$X > Y$$

bei ξ; X ist also Oberzahl bei η. Nach Satz 132 wähle man bei ζ eine Oberzahl Z und eine Unterzahl U mit

$$Z - U = X - Y.$$

Dann ist

$$Y + Z = Y + ((X - Y) + U) = (Y + (X - Y)) + U = X + U,$$

also Unterzahl bei $\xi + \zeta$ und (nach Satz 129, II)) Oberzahl bei $\eta + \zeta$. Daher ist

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta.$$

Satz 135: *Aus*

$$\xi > \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi = \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi < \eta$$

folgt

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi + \zeta = \eta + \zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi + \zeta < \eta + \zeta.$$

Beweis: Der erste Teil ist Satz 134, der zweite klar, der dritte eine Folge des ersten wegen

$$\eta > \xi,$$

$$\eta + \zeta > \xi + \zeta,$$

$$\xi + \zeta < \eta + \zeta.$$

Satz 136: *Aus*

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi + \zeta = \eta + \zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi + \zeta < \eta + \zeta$$

folgt

$$\xi > \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi = \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi < \eta.$$

Beweis: Folgt aus Satz 135, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 137: *Aus*

$$\xi > \eta, \quad \zeta > \upsilon$$

folgt

$$\xi + \zeta > \eta + \upsilon.$$

Beweis: Nach Satz 134 ist

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta$$

und

$$\eta + \zeta = \zeta + \eta > \upsilon + \eta = \eta + \upsilon,$$

also
$$\xi + \zeta > \eta + \upsilon.$$

Satz 138: *Aus*
$$\xi \geq \eta, \quad \zeta > \upsilon \quad \textit{oder} \quad \xi > \eta, \quad \zeta \geq \upsilon$$
folgt
$$\xi + \zeta > \eta + \upsilon.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung durch Satz 134, sonst durch Satz 137 erledigt.

Satz 139: *Aus*
$$\xi \geq \eta, \quad \zeta \geq \upsilon$$
folgt
$$\xi + \zeta \geq \eta + \upsilon.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 138 erledigt.

Satz 140: Ist
$$\xi > \eta,$$
so hat
$$\eta + \upsilon = \xi$$
genau eine Lösung υ.

Vorbemerkung: Für
$$\xi \leq \eta$$
gibt es nach Satz 133 keine Lösung.

Beweis: I) Es gibt höchstens eine Lösung; denn für
$$\upsilon_1 \neq \upsilon_2$$
ist nach Satz 135
$$\eta + \upsilon_1 \neq \eta + \upsilon_2.$$

II) Ich zeige zunächst, daß die Menge der rationalen Zahlen der Form $X - Y$ (also $X > Y$), wo X Unterzahl bei ξ, Y Oberzahl bei η ist, einen Schnitt bildet.

1) Wir wissen aus dem Anfang des Beweises des Satzes 134, daß es ein solches $X - Y$ gibt.

Keine Oberzahl X_1 bei ξ ist ein solches $X - Y$; denn für jede Zahl dieser form ist
$$X - Y < (X - Y) + Y = X < X_1.$$

2) Ist ein $X - Y$ obiger Art gegeben und
$$U < X - Y,$$
so ist
$$U + Y < (X - Y) + Y = X,$$
also
$$U + Y = X_2$$
Unterzahl bei ξ,
$$U = X_2 - Y$$
zu unserer Menge gehörig.

3) Ist ein $X - Y$ obiger Art gegeben, so wähle man bei ξ eine Unterzahl
$$X_3 > X.$$

Dann ist

$$(X_3 - Y) + Y > (X - Y) + Y,$$

$$X_3 - Y > X - Y,$$

also $X_3 - Y$ eine größere Zahl unserer Menge als die gegebene $X - Y$.

Unsere Menge ist also ein Schnitt; er heiße υ.

Von ihm werden wir

$$\eta + \upsilon = \xi$$

beweisen. Hierzu genügt es, zweierlei zu zeigen:

A) Jede Unterzahl bei $\upsilon + \eta$ ist Unterzahl bei ξ.

B) Jede Unterzahl bei ξ ist Unterzahl bei $\upsilon + \eta$.

Ad A) Jede Unterzahl bei $\upsilon + \eta$ hat die Form

$$(X - Y) + Y_1,$$

wo X Unterzahl bei ξ, Y Oberzahl bei η, Y_1 Unterzahl bei η und

$$X > Y$$

ist. Nun ist

$$Y > Y_1,$$

$$\big((X-Y)+Y_1\big)+(Y-Y_1) = (X-Y)+\big(Y_1+(Y-Y_1)\big) = (X-Y)+Y = X,$$

$$(X - Y) + Y_1 < X,$$

also $(X - Y) + Y_1$ Unterzahl bei ξ.

Ad B) $\mathfrak{a}$) Die gegebene Unterzahl bei ξ sei zugleich Oberzahl bei η und heiße alsdann Y. Man wähle eine Unterzahl X bei ξ mit

$$X > Y$$

und nach Satz 132 bei η eine Unterzahl Y_1 und eine Oberzahl Y_2 mit

$$Y_2 - Y_1 = X - Y.$$

Dann ist

$$Y > Y_1,$$

also

$$\begin{aligned} Y_2+(Y-Y_1) &= \big((X-Y)+Y_1\big)+(Y-Y_1) = (X-Y)+\big(Y_1+(Y-Y_1)\big) \\ &= (X - Y) + Y = X, \end{aligned}$$

$$Y - Y_1 = X - Y_2,$$

$$Y = (Y - Y_1) + Y_1 = (X - Y_2) + Y_1,$$

also Y Unterzahl bei $\upsilon + \eta$.

$\mathfrak{b}$) Ist die gegebene Unterzahl bei ξ Unterzahl bei η, so ist sie kleiner als jede in $\mathfrak{a}$) als Unterzahl bei $\upsilon + \eta$ nachgewiesene rationale Zahl, also selbst Unterzahl bei $\upsilon + \eta$.

Definition 35: *Das υ des Satzes 140 heißt $\xi - \eta$* ($-$ sprich: minus). *$\xi - \eta$ heißt auch die Differenz ξ minus η oder der durch Subtraktion des η von ξ entstehende Schnitt.*

§ 4.

Multiplikation.

Satz 141: I) *Es seien ξ und η Schnitte. Dann ist die Menge der rationalen Zahlen, die sich in der Form XY schreiben lassen, wo X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η ist, ein Schnitt.*

II) *Keine Zahl dieser Menge läßt sich als Produkt einer Oberzahl bei ξ und einer Oberzahl bei η darstellen.*

Beweis: 1) Geht man von irgend einer Unterzahl X bei ξ und irgend einer Unterzahl Y bei η aus, so gehört XY zur Menge.

Geht man von irgend einer Oberzahl X_1 bei ξ und irgend einer Oberzahl Y_1 bei η aus, so ist für alle Unterzahlen X bzw. Y bei ξ bzw. η

$$X < X_1, \quad Y < Y_1,$$

also

$$XY < X_1Y_1,$$

$$X_1Y_1 \neq XY;$$

X_1Y_1 gehört also nicht zur Menge. Und II) ist schon mitbewiesen.

2) Es sei X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η und

$$Z < XY.$$

Dann ist

$$X\left(\frac{1}{X}Z\right) = \left(X\frac{1}{X}\right)Z = 1 \cdot Z = Z,$$

$$\frac{Z}{X} = \frac{1}{X}Z < \frac{1}{X}(XY) = \left(\frac{1}{X}X\right)Y = Y,$$

also $\frac{Z}{X}$ Unterzahl bei η. Die Gleichung

$$Z = X\frac{Z}{X}$$

zeigt also, daß Z zu unserer Menge gehört.

3) Ist eine Zahl der Menge gegeben, so hat sie die Form XY, wo X Unterzahl bei ξ, Y Unterzahl bei η ist. Man wähle bei ξ eine Unterzahl

$$X_1 > X;$$

dann ist

$$X_1Y > XY,$$

also eine Zahl der Menge $> XY$ vorhanden.

Definition 36: *Der in Satz 141 konstruierte Schnitt heißt $\xi \cdot \eta$* ($\cdot$ sprich: mal; aber man scbreibt den Punkt meist nicht). *Er heißt auch das Produkt von ξ mit η oder der durch Multiplikation von ξ mit η entstehende Schnitt.*

Satz 142 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$\xi\eta = \eta\xi.$$

Beweis: Jedes XY ist auch YX und umgekehrt.

Satz 143 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta).$$

Beweis: Jedes $(XY)Z$ ist auch $X(YZ)$ und umgekehrt.

Satz 144 (distributives Gesetz):

$$\xi(\eta + \zeta) = \xi\eta + \xi\zeta.$$

Beweis: I) Jede Unterzahl bei $\xi(\eta + \zeta)$ ist

$$X(Y + Z) = XY + XZ,$$

wo X, Y, Z bzw. Unterzahlen bei ξ, η, ζ sind. Die Zahl $XY + XZ$ ist Unterzahl bei $\xi\eta + \xi\zeta$.

II) Jede Unterzahl bei $\xi\eta + \xi\zeta$ hat die Form

$$XY + X_1 Z,$$

wo X, Y, X_1, Z bzw. Unterzahlen bei ξ, η, ξ, ζ sind. Im Falle $X \geq X_1$ sei die Zahl X, im Falle $X \leq X_1$ die Zahl X_1 mit X_2 bezeichnet. Dann ist X_2 Unterzahl bei ξ, also $X_2(Y + Z)$ Unterzahl bei $\xi(\eta + \zeta)$. Aus

$$XY \leq X_2 Y,$$

$$X_1 Z \leq X_2 Z$$

folgt

$$XY + X_1 Z \leq X_2 Y + X_2 Z = X_2(Y + Z);$$

also ist $XY + X_1 Z$ Unterzahl bei $\xi(\eta + \zeta)$.

Satz 145: *Aus*

$$\xi > \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi = \eta \quad \textit{bzw.} \quad \xi < \eta$$

folgt

$$\xi\zeta > \eta\zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi\zeta = \eta\zeta \quad \textit{bzw.} \quad \xi\zeta < \eta\zeta.$$

Beweis: 1) Aus

$$\xi > \eta$$

folgt nach Satz 140 bei passendem υ

$$\xi = \eta + \upsilon,$$

also

$$\xi\zeta = (\eta + \upsilon)\zeta = \eta\zeta + \upsilon\zeta > \eta\zeta.$$

2) Aus

$$\xi = \eta$$

folgt natürlich

$$\xi\zeta = \eta\zeta.$$

3) Aus

$$\xi < \eta$$

folgt

$$\eta > \xi,$$

also nach 1)

$$\eta\zeta > \xi\zeta,$$

$$\xi\zeta < \eta\zeta.$$

Satz 146: *Aus*

$$\xi\zeta > \eta\zeta \quad bzw. \quad \xi\zeta = \eta\zeta \quad bzw. \quad \xi\zeta < \eta\zeta$$

folgt

$$\xi > \eta \quad bzw. \quad \xi = \eta \quad bzw. \quad \xi < \eta.$$

Beweis: Folgt aus Satz 145, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 147: *Aus*

$$\xi > \eta, \quad \zeta > \upsilon$$

folgt

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Beweis: Nach Satz 145 ist

$$\xi\zeta > \eta\zeta$$

und

$$\eta\zeta = \zeta\eta > \upsilon\eta = \eta\upsilon,$$

also

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Satz 148: *Aus*

$$\xi \geq \eta, \quad \zeta > \upsilon \quad oder \quad \xi > \eta, \quad \zeta \geq \upsilon$$

folgt

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung durch Satz 145, sonst durch Satz 147 erledigt.

Satz 149: *Aus*

$$\xi \geq \eta, \quad \zeta \geq \upsilon$$

folgt

$$\xi\zeta \geq \eta\upsilon.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 148 erledigt.

Satz 150: *Für jede rationale Zahl R bildet die Menge der ratio- nalen Zahlen $< R$ einen Schnitt.*

Beweis: 1) Nach Satz 90 gibt es ein $X < R$. R selbst ist nicht $< R$.

2) Ist

$$X < R, \quad X_1 \geq R,$$

so ist

$$X < X_1.$$

3) Ist

$$X < R,$$

so gibt es nach Satz 91 ein X_1 mit

$$X < X_1 < R.$$

Definition 37: *Der in Satz 150 konstruierte Schnitt heißt R^*.*

(Große lateinische Buchstaben mit Sternen bedeuten also Schnitte, nicht rationale Zahlen.)

Satz 151:

$$\xi \cdot 1^* = \xi.$$

Beweis: $\xi \cdot 1^*$ ist die Menge aller XY, wo X Unterzahl bei ξ und

$$Y < 1$$

ist.

Jedes solche XY ist $< X$, also Unterzahl bei ξ.

Umgekehrt sei eine Unterzahl X bei ξ gegeben. Dann wähle man bei ξ eine Unterzahl

$$X_1 > X$$

und setze

$$Y = \frac{1}{X_1} X.$$

Dann ist

$$Y < \frac{1}{X_1} X_1 = 1$$

also

$$X = X_1 Y$$

Unterzahl bei $\xi \cdot 1^*$.

Satz 152: *Ist ξ gegeben, so hat die Gleichung*

$$\xi v = 1^*$$

eine lösung v.

Beweis: Wir betrachten die Menge aller Zahlen $\frac{1}{X}$, wo X eine beliebige Oberzahl bei ξ mit etwaiger Ausnahme der kleinsten (wenn es nämlich eine gibt) ist. Wir zeigen, daß diese Menge ein Schnitt ist.

1) Es gibt eine Zahl der Menge; denn wenn X eine Oberzahl bei ξ ist, ist $X + X$ auch eine, aber nicht die kleinste, also $\frac{1}{X+X}$ zur Menge gehörig.

Es gibt eine rationale Zahl, die nicht zur Menge gehört; denn ist X_1 irgend eine Unterzahl bei ξ, so ist für alle Oberzahlen X bei ξ

$$X \neq X_1,$$

also, wegen

$$X \frac{1}{X} = 1 = X_1 \frac{1}{X_1},$$

$$\frac{1}{X} \neq \frac{1}{X_1};$$

$\frac{1}{X_1}$ ist daher nicht zu unserer Menge gehörig.

2) Ist eine Zahl $\frac{1}{X}$ unserer Menge gegeben, also X Oberzahl bei ξ, und

$$U < \frac{1}{X},$$

so ist

$$UX < \frac{1}{X} X = 1 = U \frac{1}{U},$$

also

$$X < \frac{1}{U},$$

also $\frac{1}{U}$ Oberzahl bei ξ und nicht die kleinste; wegen

$$U \frac{1}{U} = 1,$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{U}}$$

ist also U zu unserer Menge gehörig.

3) Ist eine Zahl $\frac{1}{X}$ unserer Menge gegeben, also X Oberzahl bei ξ und nicht die kleinste, so wähle man bei ξ eine Oberzahl

$$X_1 < X$$

und alsdann nach Satz 91 ein X_2, mit

$$X_1 < X_2 < X.$$

Dann ist X_2 Oberzahl bei ξ und nicht die kleinste; aus

$$X_2 \frac{1}{X} < X \frac{1}{X} = 1 = X_2 \frac{1}{X_2}$$

folgt

$$\frac{1}{X_2} > \frac{1}{X},$$

so daß wir eine Zahl unserer Menge gefunden haben, die größer ist als die gegebene.

Unsere Menge ist also ein Schnitt: er heiße υ.

Von ihm werden wir

$$\xi\upsilon = 1^*$$

beweisen. Hierzu genügt es, zweierlei zu zeigen:

A) Jede Unterzahl bei $\xi\upsilon$ ist < 1.

B) Jede rationale Zahl < 1 ist Unterzahl bei $\xi\upsilon$.

Ad A) Jede Unterzahl bei $\xi\upsilon$ hat die Form

$$X \frac{1}{X_1},$$

wo X Unterzahl bei ξ, X_1 Oberzahl bei ξ ist. Aus

$$X < X_1$$

folgt

$$X \frac{1}{X_1} < X_1 \frac{1}{X_1} = 1.$$

Ad B) Es sei

$$U < 1.$$

Wir wählen irgend eine Unterzahl X bei ξ und dann nach Satz 132 eine Unterzahl X_1 bei ξ und eine Oberzahl X_2 bei ξ mit

$$X_2 - X_1 = (1 - U)X.$$

Dann ist

$$X_2 - X_1 < (1 - U)X_2,$$

$$(X_2 - X_1) + UX_2 < (1 - U)X_2 + UX_2 = X_2 = (X_2 - X_1) + X_1,$$

$$UX_2 < X_1,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{U}U\right) X_2 = \frac{1}{U}(UX_2) < \frac{1}{U}X_1 = \frac{X_1}{U}.$$

$\frac{X_1}{U}$ ist also Oberzahl bei ξ und nicht die kleinste. Aus

$$U \frac{X_1}{U} = X_1$$

folgt

$$U = \frac{X_1}{\frac{X_1}{U}} = X_1 \frac{1}{\frac{X_1}{U}};$$

hier ist X_1 Unterzahl bei ξ, $\frac{1}{\frac{X_1}{U}}$ Unterzahl bei υ; also ist U Unterzahl bei $\xi\upsilon$.

Satz 153: *Die Gleichung*

$$\eta\upsilon = \xi,$$

wo ξ, η gegeben sind, hat genau eine Lösung υ.

Beweis: I) Es gibt höchstens eine Lösung; denn für

$$\upsilon_1 \neq \upsilon_2$$

ist nach Satz 145

$$\eta\upsilon_1 \neq \eta\upsilon_2.$$

II) Ist τ die durch Satz 152 als vorhanden nachgewiesene Lösung von

$$\eta\tau = 1^*,$$

so genügt

$$\upsilon = \tau\xi$$

unserer Gleichung; denn nach Satz 151 ist

$$\eta\upsilon = \eta(\tau\xi) = (\eta\tau)\xi = 1^*\xi = \xi.$$

Definition 38: *Das υ des Satzes 153 heißt $\frac{\xi}{\eta}$* (sprich: ξ durch η). *$\frac{\xi}{\eta}$ heißt auch der Quotient von ξ durch η oder der durch Division von ξ durch η entstehende Schnitt.*

§ 5.

Rationale Schnitte und ganze Schnitte.

Definition 39: *Ein Schnitt der Form X^* heißt rationaler Schnitt.*

Definition 40: *Ein Schnitt der Form x^* heißt ganzer Schnitt.*

(Kleine lateinische Buchstaben mit Sternen bedeuten also Schnitte, nicht ganze Zahlen.)

Satz 154: *Aus*

$$X > Y \quad \textit{bzw.} \quad X = Y \quad \textit{bzw.} \quad X < Y$$

folgt

$$X^* > Y^* \quad \textit{bzw.} \quad X^* = Y^* \quad \textit{bzw.} \quad X^* < Y^*$$

und umgekehrt.

Beweis: I) 1) Aus

$$X > Y$$

folgt, daß Y Unterzahl bei X^* ist. Y ist Oberzahl bei Y^*. Also

$$X^* > Y^*.$$

2) Aus

$$X = Y$$

folgt natürlich

$$X^* = Y^*.$$

3) Aus

$$X < Y$$

folgt

$$Y > X,$$

also nach 1)

$$Y^* > X^*,$$

$$X^* < Y^*.$$

II) Die Umkehrung ist klar, da die drei Fälle beide Male sich ausschließen und alle Möglichkeiten erschöpfen.

Satz 155:

$$(X+Y)^* = X^* + Y^*;$$

$$(X-Y)^* = X^* - Y^*, \quad \textit{falls} \quad X > Y;$$

$$(XY)^* = X^* Y^*;$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^* = \frac{X^*}{Y^*}.$$

Beweis: I) $\mathfrak{a}$) Jede Unterzahl bei $X^* + Y^*$ ist die Summe einer rationalen Zahl $< X$ und einer rationalen Zahl $< Y$; sie ist also $< X + Y$, also Unterzahl bei $(X+Y)^*$.

$\mathfrak{b}$) Jede Unterzahl U bei $(X+Y)^*$ ist $< X + Y$. Aus

$$\frac{U}{X+Y} < 1,$$

$$U = X\frac{U}{X+Y} + Y\frac{U}{X+Y}$$

folgt, daß U Summe einer rationalen Zahl $< X$ und einer rationalen Zahl $< Y$ ist, also Unterzahl bei $X^* + Y^*$ ist.

Daher ist

$$(X+Y)^* = X^* + Y^*.$$

II) Aus

$$X > Y$$

folgt

$$X = (X-Y) + Y,$$

also nach I)

$$X^* = (X-Y)^* + Y^*,$$

$$(X-Y)^* = X^* - Y^*.$$

III) $\mathfrak{a}$) Jede Unterzahl bei X^*Y^* ist Produkt einer rationalen Zahl $< X$ und einer rationalen Zahl $< Y$; sie ist also $< XY$, also Unterzahl bei $(XY)^*$.

$\mathfrak{b}$) Jede Unterzahl U bei $(XY)^*$ ist $< XY$. Es werde nach Satz 91 eine rationale Zahl U_1 mit

$$U < U_1 < XY$$

gewählt. Dann ist

$$\frac{U}{U_1} < 1$$

und

$$\frac{U_1}{Y} < X.$$

Durch

$$U = \frac{U_1}{Y}\left(Y\frac{U}{U_1}\right)$$

ist also U als das Produkt einer Unterzahl bei X^* und einer Unterzahl bei Y^* dargestellt. U ist also Unterzahl bei X^*Y^*.

Daher ist

$$(XY)^* = X^*Y^*.$$

IV)

$$X = \frac{X}{Y}Y,$$

also nach III)

$$X^* = \left(\frac{X}{Y}\right)^* Y^*,$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^* = \frac{X^*}{Y^*}.$$

Satz 156: *Die ganzen Schnitte genügen den fünf Axiomen der natürlichen Zahlen, wenn* 1^* *an Stelle von* 1 *genommen wird und*

$$(x^*)' = (x')^*$$

gesetzt wird.

Beweis: $\mathfrak{Z}^*$ sei die Menge der ganzen Schnitte.

1) 1^* gehört zu $\mathfrak{Z}^*$.

2) Zu x^* ist $(x^*)'$ in $\mathfrak{Z}^*$ vorhanden.

3) Stets ist

$$x' \neq 1,$$

also

$$(x')^* \neq 1^*,$$

$$(x^*)' \neq 1^*.$$

4) Aus

$$(x^*)' = (y^*)'$$

folgt

$$(x')^* = (y')^*,$$

$$x' = y',$$

$$x = y,$$

$$x^* = y^*.$$

5) Eine Menge $\mathfrak{M}^*$ von ganzen Schnitten habe die Eigenschaften:

I) 1^* gehört zu $\mathfrak{M}^*$.

II) Falls x^* zu $\mathfrak{M}^*$ gehört, so gehört $(x^*)'$ zu $\mathfrak{M}^*$.

Dann bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die x^* zu $\mathfrak{M}^*$ gehört. Alsdann ist 1 zu $\mathfrak{M}$ gehörig und mit jedem x von $\mathfrak{M}$ auch x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Also gehört jede ganze Zahl zu $\mathfrak{M}$, also jeder ganze Schnitt zu $\mathfrak{M}^*$.

Da $=$, $>$, $<$, Summe, Differenz (wofern vorhanden), Produkt und Quotient bei rationalen Schnitten nach Satz 154 und Satz 155 den alten Begriffen entsprechen, haben die rationaleh Schnitte alle Eigenschaften, die wir in Kapitel 2 für rationale Zahlen bewiesen haben, und insbesondere die ganzen Schnitte alle bewiesenen Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Daher werfen wir die rationalen Zahlen weg, ersetzen sie durch die entsprechenden rationalen Schnitte und haben fortan in bezug auf das Bisherige nur noch von Schnitten zu reden. (Die rationalen Zahlen verbleiben aber in Mengen beim Begriff des Schnittes.)

Definition 41: (Das freigewordene Zeichen) *X bezeichnet den rationalen Schnitt X^*, auf den auch das Wort rationale Zahl übergeht; ebenso geht das Wort ganze Zahl auf die ganzen Schnitte über.*

Also schreiben wir jetzt z. B. statt

$$\xi \frac{1^*}{\xi} = 1^*$$

einfach

$$\xi \frac{1}{\xi} = 1.$$

Satz 157: *Die rationalen Zahlen sind die Schnitte, bei denen es eine kleinste Oberzahl X gibt. Und zwar ist alsdann X der Schnitt.*

Beweis: 1) Beim Schnitt X (dem alten X^*) ist X (rationale Zahl im alten Sinne) kleinste Oberzahl.

2) Gibt es bei einem Schnitt ξ eine kleinste Oberzahl X, so ist jede Unterzahl $< X$, jede Oberzahl $\geq X$, der Schnitt also X (das alte X^*).

Satz 158: *Es sei ξ ein Schnitt. Dann ist X Unterzahl genau dann, wenn*

$$X < \xi,$$

also Oberzahl genau dann, wenn

$$X \geq \xi.$$

Beweis: 1) Ist X Unterzahl bei ξ, so ist, da X Oberzahl bei X (dem alten X^*) ist,

$$X < \xi.$$

2) Ist X Oberzahl bei ξ und zwar die kleinste, so ist nach Satz 157

$$X = \xi.$$

3) Ist X Oberzahl bei ξ und zwar nicht die kleinste, so wähle man eine kleinere Oberzahl X_1. Dann ist X_1 Unterzahl bei X, also

$$X > \xi.$$

Satz 159: *Ist*

$$\xi < \eta,$$

so gibt es ein Z mit

$$\xi < Z < \eta.$$

Beweis: Man wähle eine Oberzahl X bei ξ, die Unterzahl bei η ist, und dann eine größere Unterzahl Z bei η. Dann ist nach Satz 158

$$\xi \leq X < Z < \eta.$$

Satz 160: *Jedes*

$$Z > \xi\eta$$

läßt sich auf die Form bringen

$$Z = XY, \quad X \geq \xi, \quad Y \geq \eta.$$

Beweis: Es bezeichne ζ den kleinsten der beiden Schnitte 1 und $\frac{Z-\xi\eta}{(\xi+\eta)+1}$. Dann ist

$$\zeta \leq 1, \quad \zeta \leq \frac{Z - \xi\eta}{(\xi + \eta) + 1}.$$

Man wähle Z_1 und Z_2 nach Satz 159 mit

$$\xi < Z_1 < \xi + \zeta, \quad \eta < Z_2 < \eta + \zeta.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &< (\xi + \zeta)(\eta + \zeta) = (\xi + \zeta)\eta + (\xi + \zeta)\zeta \leq (\xi + \zeta)\eta + (\xi + 1)\zeta \\ &= (\xi\eta + \eta\zeta) + (\xi + 1)\zeta = \xi\eta + \big((\xi + \eta) + 1\big)\zeta \leq \xi\eta + (Z - \xi\eta) = Z. \end{aligned}$$

In

$$Z = \frac{Z}{Z_2} Z_2$$

ist

$$X = \frac{Z}{Z_2} = Z\frac{1}{Z_2} > (Z_1 Z_2)\frac{1}{Z_2} = Z_1 > \xi,$$
$$Y = Z_2 > \eta,$$

also Z in gewünschter Weise zerlegt.

Satz 161: *Bei jedem ζ hat*

$$\xi\xi = \zeta$$

genau eine Lösung.

Beweis: I) Es gibt höchstens eine Lösung; denn aus

$$\xi_1 > \xi_2$$

folgt

$$\xi_1\xi_1 > \xi_2\xi_2.$$

II) Wir betrachten die Menge der rationalen Zahlen X mit

$$XX < \zeta.$$

Sie bildet einen Schnitt. Denn:

1) Ist

$$X < 1 \quad \text{und} \quad X < \zeta,$$

so ist

$$XX < X \cdot 1 = X < \zeta.$$

Ist

$$X \geq 1 \quad \text{und} \quad X \geq \zeta,$$

so ist

$$XX \geq X \cdot 1 = X \geq \zeta.$$

2) Aus

$$XX < \zeta, \quad Y < X$$

folgt

$$YY < XX < \zeta.$$

3) Es sei

$$XX < \zeta.$$

Man wähle Z kleiner als der kleinste der beiden Schnitte 1 und $\frac{\zeta - XX}{X+(X+1)}$. Dann ist

$$Z < 1, \quad Z < \frac{\zeta - XX}{X + (X+1)};$$

alsdann ist

$$X + Z > X$$

und

$$\begin{aligned}(X+Z)(X+Z) &= (X+Z)X + (X+Z)Z < (XX+ZX) + (X+1)Z \\ &= XX + \big(X + (X+1)\big)Z < XX + (\zeta - XX) = \zeta.\end{aligned}$$

Nennen wir den konstruierten Schnitt ξ, so behaupten wir nunmehr

$$\xi\xi = \zeta.$$

Wäre

$$\xi\xi > \zeta,$$

so wählen wir Z nach Satz 159 mit

$$\xi\xi > Z > \zeta.$$

Als Unterzahl bei $\xi\xi$ wäre

$$Z = X_1 X_2, \quad X_1 < \xi, \quad X_2 < \xi;$$

wenn X die größte der Zahlen X_1 und X_2 bedeutet, wäre

$$X < \xi,$$

$$Z \leq XX < \zeta,$$

gegen das Obige.

Wäre

$$\xi\xi < \zeta,$$

so wählen wir Z nach Satz 159 mit

$$\xi\xi < Z < \zeta.$$

Z hätte nach Satz 160 die Form

$$Z = X_1 X_2, \quad X_1 \geq \xi, \quad X_2 \geq \xi;$$

wenn X die kleinste der Zahlen X_1 und X_2 bedeutet, wäre

$$X \geq \xi,$$

$$Z \geq XX \geq \zeta,$$

gegen das Obige.

Definition 42: *Jeder Schnitt, der keine rationale Zahl ist, heißt irrationale Zahl.*

Satz 162: *Es gibt eine irrationale Zahl.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die nach Satz 161 vorhandene Lösung von

$$\xi\xi = 1'$$

irrational ist.

Sonst wäre

$$\xi = \frac{x}{y};$$

unter allen solchen Darstellungen wählen wir nach Satz 27 eine solche, in der y möglichst klein ist. Wegen

$$1' = \xi\xi = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{xx}{yy}$$

ist

$$yy < 1'(yy) = xx = (1'y)y < (1'y)(1'y),$$

$$y < x < 1'y.$$

Wir setzen

$$x - y = u.$$

Dann ist

$$y + u = x < 1'y = y + y,$$

$$u < y.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(v+w)(v+w) = (v+w)v + (v+w)w &= (vv + wv) + (vw + ww) \\ &= \big(vv + 1'(vw)\big) + ww,\end{aligned}$$

also,

$$y - u = t$$

gesetzt,

$$\begin{aligned}xx + tt = (y+u)(y+u) + tt &= \big(yy + 1'(yu)\big) + (uu + tt) \\ &= \big(yy + (1'u)(u+t)\big) + (uu + tt) \\ &= \big(yy + 1'(uu)\big) + \Big(\big(1'(ut) + uu\big) + tt\Big) \\ &= \big(yy + 1'(uu)\big) + (u+t)(u+t) \\ &= \big(yy + 1'(uu)\big) + yy = 1'(yy) + 1'(uu) = xx + 1'(uu),\end{aligned}$$

$$tt = 1'(uu),$$

$$\frac{t}{u} \cdot \frac{t}{u} = 1',$$

gegen

$$u < y.$$

Kapitel 4.

Reelle Zahlen.

§ 1.

Definition.

Definition 43: *Die Schnitte nennen wir jetzt positive Zahlen; und entsprechend sagen wir jetzt positive rationale Zahl statt bisher rationale Zahl und positive ganze Zahl statt bisher ganze Zahl.*

Wir erschaffen eine neue, von den positiven Zahlen verschiedene Zahl 0 (sprich: Null).

Wir erschaffen ferner Zahlen, die von den positiven und von 0 *verschieden sind, negative genannt, derart, daß wir jedem* ξ (d. h. jeder positiven Zahl) *eine negative Zahl zuordnen, die wir* $-\xi$ ($-$ sprich: minus) *nennen.*

Dabei gelten $-\xi$ *und* $-\eta$ *als dieselbe Zahl (als gleich) genau dann, wenn* ξ *und* η *dieselbe Zahl sind.*

Die Gesamtheit der positiven Zahlen, der 0 *und der negativen Zahlen nennen wir reelle Zahlen.*

Große griechische Buchstaben bedeuten, wenn nichts anderes gesagt wird, durchweg reelle Zahlen. Gleich schreiben wir $=$, ungleich (verschieden) $\neq$.

Für jedes Ξ und jedes H liegt somit genau einer der Fälle

$$\Xi = H, \quad \Xi \neq H$$

vor. Bei den reellen Zahlen vermischen sich die Begriffe der Identität und Gleichheit, so daß die drei Sätze trivial sind:

Satz 163:

$$\Xi = \Xi.$$

Satz 164: *Aus*

$$\Xi = H$$

folgt

$$H = \Xi.$$

Satz 165: *Aus*

$$\Xi = H, \quad H = Z$$

folgt

$$\Xi = Z.$$

§ 2.

Ordnung.

Definition 44:

$$|\Xi| = \begin{cases} \xi, & \textit{wenn} \quad \Xi = \xi, \\ 0, & \textit{wenn} \quad \Xi = 0, \\ \xi, & \textit{wenn} \quad \Xi = -\xi. \end{cases}$$

Die Zahl $|\Xi|$ heißt der absolute Betrag von Ξ.

Satz 166: $|\Xi|$ *ist für positives und negatives Ξ positiv.*
Beweis: Definition 44.

Definition 45: *Sind Ξ und H nicht beide positiv, so ist*

$$\Xi > H$$

genau dann, wenn
entweder Ξ negativ, H negativ und $|\Xi| < |H|$,
oder $\Xi = 0$, H negativ,
oder Ξ positiv, H negativ,
oder Ξ positiv, $H = 0$.
($>$ sprich: größer als.)

Man beachte, daß wir für positives Ξ nebst positivem H die Begriffe $>$ und $<$ schon haben und letzteren sogar in dem einen Falle der Definition 45 benutzten.

Definition 46:

$$\Xi < H$$

genau dann, wenn

$$H > \Xi.$$

($<$ sprich: kleiner als.)

Man beachte, daß für positives Ξ nebst positivem H Definition 46 im Einklang mit unseren alten Begriffen steht.

Satz 167: *Sind Ξ, H beliebig, so liegt genau einer der Fälle*

$$\Xi = H, \quad \Xi > H, \quad \Xi < H$$

vor.

Beweis: 1) Sind Ξ und H positiv, wissen wir dies aus Satz 123.

2) Ist Ξ positiv, $H = 0$ oder H negativ, so ist

$$\Xi \neq H,$$

ferner nach Definition 45

$$\Xi > H$$

und nach Definition 46

$$\Xi \text{ nicht} < H.$$

3) Ist $\Xi = 0$, H positiv, so ist

$$\Xi \neq H,$$

ferner nach Definition 45

$$\Xi \text{ nicht } > H$$

und nach Definition 46

$$\Xi < H.$$

4) Ist $\Xi = 0$, $H = 0$, so ist

$$\Xi = H,$$

$$\Xi \text{ nicht } > H,$$

$$\Xi \text{ nicht } < H.$$

5) Ist $\Xi = 0$, H negativ, so ist

$$\Xi \neq H,$$

$$\Xi > H,$$

$$\Xi \text{ nicht } < H.$$

6) Ist Ξ negativ, H positiv oder $H = 0$, so ist

$$\Xi \neq H,$$

$$\Xi \text{ nicht } > H,$$

$$\Xi < H.$$

7) Ist Ξ negativ, H negativ, so ist

$$\begin{array}{llll}
\Xi \neq H, & \Xi > H, & \Xi \text{ nicht } < H & \text{für } |\Xi| < |H|, \\
\Xi = H, & \Xi \text{ nicht } > H, & \Xi \text{ nicht } < H & \text{für } |\Xi| = |H|, \\
\Xi \neq H, & \Xi \text{ nicht } > H, & \Xi < H & \text{für } |\Xi| > |H|.
\end{array}$$

Definition 47:

$$\Xi \geq H$$

bedeutet

$$\Xi > H \quad \textit{oder} \quad \Xi = H.$$

($\geq$ sprich: größer oder gleich.)

Definition 48:

$$\Xi \leq H$$

bedeutet

$$\Xi < H \quad \textit{oder} \quad \Xi = H.$$

($\leq$ sprich: kleiner oder gleich.)

Satz 168: *Aus*

$$\Xi \geq H$$

folgt

$$H \leq \Xi$$

und umgekehrt.

Beweis: Definition 46.

Satz 169: *Die positiven Zahlen sind die Zahlen* > 0; *die negativen Zahlen sind die Zahlen* < 0.

Beweis: 1) Nach Definition 45 ist

$$\xi > 0.$$

2) Aus

$$\Xi > 0$$

folgt nach Definition 45

$$\Xi = \xi.$$

3) Nach Definition 46 ist

$$-\xi < 0.$$

4) Aus

$$\Xi < 0$$

folgt nach Definition 46

$$\Xi = -\xi.$$

Satz 170:

$$|\Xi| \geq 0.$$

Beweis: Definition 44, Satz 166 und Satz 169.

Satz 171 (Transitivität der Ordnung): *Aus*

$$\Xi < H, \quad H < Z$$

folgt

$$\Xi < Z.$$

Beweis: 1) Es sei

$$Z > 0.$$

Falls

$$\Xi > 0,$$

ist

$$H > 0,$$

und wir haben den alten Satz 126.

Falls

$$\Xi \leq 0,$$

ist gewiß

$$\Xi < Z.$$

2) Es sei

$$Z = 0.$$

Dann ist

$$H < 0,$$

also

$$\Xi < 0,$$

$$\Xi < Z.$$

3) Es sei

$$Z < 0.$$

Dann ist

$$H < 0,$$

$$\Xi < 0.$$

Ferner ist

$$|\Xi| > |H|, \quad |H| > |Z|,$$

also

$$|\Xi| > |Z|,$$

$$\Xi < Z.$$

Satz 172: *Aus*

$$\Xi \leq H, \quad H < Z \quad \textit{oder} \quad \Xi < H, \quad H \leq Z$$

folgt

$$\Xi < Z.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar: sonst durch Satz 171 erledigt.

Satz 173: *Aus*

$$\Xi \leq H, \quad H \leq Z$$

folgt

$$\Xi \leq Z.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 172 erledigt.

Definition 49: *Ist*

$$\Xi \leq 0,$$

so heißt Ξ *rational, wenn*

$$\Xi = 0$$

oder

$$\Xi < 0, \quad |\Xi| \text{ rational.}$$

Wir haben also jetzt positive rationale Zahlen, die rationale Zahl 0 und negative rationale Zahlen.

Definition 50: *Ist*

$$\Xi < 0,$$

so heißt Ξ *irrational, wenn es nicht rational ist.*

Wir haben also jetzt positive irrationale Zahlen und negative irrationale Zahlen. (Zahl**en**? Ja; wir hatten ein irrationales ξ; also ist die positive Zahl $\xi + X$ stets irrational, da aus

$$\xi + X = Y$$

folgen würde

$$\xi = Y - X;$$

und $-(\xi + X)$ ist stets negativ irrational.)

Definition 51: *Ist*

$$\Xi \leq 0,$$

so heißt Ξ *ganz, wenn*

$$\Xi = 0$$

oder

$$\Xi < 0, \quad |\Xi| \text{ ganz.}$$

Wir haben also jetzt positive ganze Zahlen, die ganze Zahl 0 und negative ganze Zahlen.

Satz 174: *Jede ganze Zahl ist rational.*

Beweis: Für die positiven Zahlen wissen wir das; für 0 und negative Zahlen folgt es aus Definition 49 und Definition 51.

§ 3.

Addition.

Definition 52:

$$\Xi + H = \begin{cases} -(|\Xi| + |H|), & \textit{wenn} \quad \Xi < 0, \quad H < 0; \\ |\Xi| - |H|, & \textit{wenn} \quad \Xi > 0, \quad H < 0, \quad |\Xi| > |H|; \\ 0, \quad \textit{wenn} \quad \Xi > 0, \quad H < 0, \quad |\Xi| = |H|; \\ -(|H| - |\Xi|), & \textit{wenn} \quad \Xi > 0, \quad H < 0, \quad |\Xi| < |H|; \\ H + \Xi, \quad \textit{wenn} \quad \Xi < 0, \quad H > 0; \\ H, \quad \textit{wenn} \quad \Xi = 0; \\ \Xi, \quad \textit{wenn} \quad H = 0. \end{cases}$$

(+ sprich: plus.) $\Xi + H$ *heißt die Summe von* Ξ *und* H *oder die durch Addition von* H *zu* Ξ *entstehende Zahl.*

Man beachte bei dieser Definition:

1) Für

$$\Xi > 0, \quad H > 0$$

haben wir den Begriff $\Xi + H$ schon aus Definition 34.

2) Er wurde auch in Definition 52 benutzt.

3) Der dritte Fall der Definition benutzt den Begriff der Summe im zweiten Fall.

4) Der vierte und fünfte Fall überdecken sich, wenn

$$\Xi = H = 0;$$

aber dann ist die als $\Xi + H$ definierte Zahl die gleiche (nämlich 0).

Satz 175 (kommutatives Gesetz der Addition):

$$\Xi + H = H + \Xi.$$

Beweis: Für

$$\Xi = 0$$

sind beide Zahlen H; für

$$H = 0$$

sind beide Ξ.

Für

$$\Xi > 0, \quad H > 0$$

liegt der alte Satz 130 vor.

Für

$$\Xi < 0, \quad H < 0$$

ist nach Satz 130

$$\Xi + H = -(|\Xi| + |H|) = -(|H| + |\Xi|) = H + \Xi.$$

Für

$$\Xi < 0, \quad H > 0$$

war die Behauptung geradezu Definition.

Für

$$\Xi > 0, \quad H < 0$$

ist nach dem vorangehenden Fall

$$H + \Xi = \Xi + H,$$

also

$$\Xi + H = H + \Xi.$$

Definition 53:

$$-\Xi = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad \Xi = 0, \\ |\Xi| & \textit{für} \quad \Xi < 0. \end{cases}$$

($-$ sprich: minus.)

Man beachte, daß wir für $\Xi > 0$ den Begriff $-\Xi$ aus Definition 43 schon haben.

Satz 176: *Ist*

$$\Xi > 0 \quad \textit{bzw.} \quad \Xi = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \Xi < 0,$$

so ist

$$-\Xi < 0 \quad \textit{bzw.} \quad -\Xi = 0 \quad \textit{bzw.} \quad -\Xi > 0,$$

und umgekehrt.

Beweis: Definition 43 und Definition 53.

Satz 177:

$$-(-\Xi) = \Xi.$$

Beweis: Definitionen 43, 44 und 53.

Satz 178:

$$|-\Xi| = |\Xi|.$$

Beweis: Definitionen 43, 44 und 53.

Satz 179:

$$\Xi + (-\Xi) = 0.$$

Beweis: Definition 52, Definition 53 und Satz 178.

Satz 180:

$$-(\Xi + H) = -\Xi + (-H).$$

Beweis: Nach Satz 175 ist

$$-(\Xi + H) = -(H + \Xi)$$

und

$$-\Xi + (-H) = -H + (-\Xi);$$

daher darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\Xi \geq H$$

vorausgesetzt werden; denn mindestens eine der Relationen

$$\Xi \geq H, \quad H \geq \Xi$$

besteht, und aus

$$-(H + \Xi) = -H + (-\Xi)$$

folgt eben

$$-(\Xi + H) = -\Xi + (-H).$$

Es sei also

$$\Xi \geq H.$$

1) Ist

$$\Xi > 0, \quad H > 0,$$

so ist

$$-\Xi + (-H) = -(\Xi + H).$$

2) Ist

$$\Xi > 0, \quad H = 0,$$

so ist

$$-\Xi + (-H) = -\Xi + 0 = -\Xi = -(\Xi + 0) = -(\Xi + H).$$

3) Ist

$$\Xi > 0, \quad H < 0,$$

so ist

entweder

$$\Xi > |H|,$$

also

$$\Xi + H = \Xi - |H|,$$

$$-\Xi + (-H) = -\Xi + |H| = -(\Xi - |H|) = -(\Xi + H);$$

oder

$$\Xi = |H|,$$

also

$$\Xi + H = 0,$$

$$-\Xi + (-H) = -\Xi + |H| = 0 = -(\Xi + H);$$

oder

$$\Xi < |H|,$$

also

$$\Xi + H = -(|H| - \Xi),$$

$$-\Xi + (-H) = -\Xi + |H| = |H| - \Xi = -(\Xi + H);$$

4) Ist

$$\Xi = 0,$$

so ist

$$-\Xi + (-H) = 0 + (-H) = -H = -(0 + H) = -(\Xi + H).$$

5) Ist

$$\Xi < 0,$$

so ist

$$H < 0,$$

$$\Xi + H = -(|\Xi| + |H|),$$

$$-\Xi + (-H) = |\Xi| + |H| = -(\Xi + H).$$

Definition 54:

$$\Xi - H = \Xi + (-H).$$

($-$ sprich: minus.) $\Xi - H$ *heißt die Differenz* Ξ *minus* H *oder die durch Subtraktion des* H *von* Ξ *entstehende Zahl.*

Man beachte, daß Definition 54 (wie es sein muß) für

$$\Xi > H > 0$$

mit der alten Definition 35 übereinstimmt; denn dann ist

$$\Xi > 0, \quad -H < 0, \quad |\Xi| > |-H|, \quad \Xi + (-H) = |\Xi| - |-H| = \Xi - H.$$

Satz 181:
$$-(\Xi - H) = H - \Xi.$$

Beweis: Nach Satz 180 und Satz 177 ist

$$-(\Xi+H) = -\big(\Xi+(-H)\big) = -\Xi+\big(-(-H)\big) = -\Xi+H = H+(-\Xi)$$
$$= H - \Xi.$$

Satz 182: *Aus*

$$\Xi - H > 0 \quad \textit{bzw.} \quad \Xi - H = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \Xi - H < 0$$

folgt
$$\Xi > H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi = H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi < H$$

und umgekehrt.

Beweis: Da $-H$ auch eine beliebige reelle Zahl ist, darf man $-H$ statt H schreiben und hat demnach das Entsprechen der Fälle bei
$$\Xi + H > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi + H = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi + H < 0$$

und
$$\Xi > -H \quad \text{bzw.} \quad \Xi = -H \quad \text{bzw.} \quad \Xi < -H$$

zu zeigen.

In der Tat ist für $\Xi = 0$ oder $H = 0$ die Behauptung klar; im übrigen gelten im Fall

$$\Xi > 0, \quad H > 0$$

und in den drei ersten Fällen der Definition 52, wenn der dritte in die drei Unterfälle

$$|H| > |\Xi|, \quad |H| = |\Xi|, \quad |H| < |\Xi|$$

zerlegt wird, beide Male resp. die Zeichen

$$> \quad < \quad > \quad = \quad < \quad > \quad = \quad < .$$

Satz 183: *Aus*

$$\Xi > H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi = H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi < H$$

folgt

$$-\Xi < -H \quad \textit{bzw.} \quad -\Xi = -H \quad \textit{bzw.} \quad -\Xi > -H$$

und umgekehrt.

Beweis: Nach Satz 182 entspricht ersteres den Fällen

$$\Xi - H > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi - H = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi - H < 0,$$

letzteres den Fällen

$$-H-(-\Xi) > 0 \quad \text{bzw.} \quad -H-(-\Xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad -H-(-\Xi) < 0,$$

also liefert

$$-H - (-\Xi) = -H + \big(-(-\Xi)\big) = -H + \Xi = \Xi + (-H) = \Xi - H$$

alles.

Satz 184: *Jede reelle Zahl läßt sich als Differenz zweier positiver Zahlen darstellen.*

Beweis: 1) Ist

$$\Xi > 0,$$

so ist

$$\Xi = (\Xi + 1) - 1.$$

2) Ist

$$\Xi = 0,$$

so ist

$$\Xi = 1 - 1.$$

3) Ist

$$\Xi < 0,$$

so ist

$$-\Xi = |\Xi| = (|\Xi| + 1) - 1,$$

$$\Xi = -\big((|\Xi| + 1) - 1\big) = 1 - (|\Xi| + 1).$$

Satz 185: *Aus*

$$\Xi = \xi_1 - \xi_2, \quad H = \eta_1 - \eta_2$$

folgt

$$\Xi + H = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

Beweis: 1) Es sei

$$\Xi > 0, \quad H > 0.$$

Dann ist, da

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) &= (\alpha + \beta) + (\delta + \gamma) = \big((\alpha + \beta) + \delta\big) + \gamma \\ &= \gamma + \big(\alpha + (\beta + \delta)\big) = (\gamma + \alpha) + (\beta + \delta)\end{aligned}$$

ist,

$$(\Xi + H) + (\xi_2 + \eta_2) = \xi_1 + \eta_1,$$

also die Behauptung wahr.

2) Es sei

$$\Xi < 0, \quad H < 0.$$

Dann ist nach Satz 181

$$\xi_2 - \xi_1 = -\Xi > 0, \quad \eta_2 - \eta_1 = -H > 0,$$

also nach 1)

$$-\Xi + (-H) = (\xi_2 + \eta_2) - (\xi_1 + \eta_1),$$

$$\Xi + H = -\big(-\Xi + (-H)\big) = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

3) Es sei

$$\Xi > 0, H < 0.$$

also

$$\xi_1 - \xi_2 > 0, \quad \eta_2 - \eta_1 > 0.$$

A) Ist

$$\Xi > |H|,$$

so ist

$$\xi_1 - \xi_2 > \eta_2 - \eta_1,$$

also

$$\begin{aligned}\xi_1+\eta_1 &= \big((\xi_1-\xi_2)+\xi_2\big)+\eta_1 = (\xi_1-\xi_2)+(\xi_2+\eta_1) = (\xi_2+\eta_1)+(\xi_1-\xi_2)\\
&= (\xi_2+\eta_1)+\Big((\eta_2-\eta_1)+\big((\xi_1-\xi_2)-(\eta_2-\eta_1)\big)\Big)\\
&= \big((\xi_2+\eta_1)+(\eta_2-\eta_1)\big)+\big((\xi_1-\xi_2)-(\eta_2-\eta_1)\big)\\
&= \Big(\xi_2+\big(\eta_1+(\eta_2-\eta_1)\big)\Big)+\big((\xi_1-\xi_2)-(\eta_2-\eta_1)\big)\\
&= (\xi_2+\eta_2)+\big((\xi_1-\xi_2)-(\eta_2-\eta_1)\big),\end{aligned}$$

$$(\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2) = (\xi_1-\xi_2)-(\eta_2-\eta_1) = \Xi-|H| = \Xi+H.$$

B) Ist

$$\Xi < H,$$

so ist nach A)

$$\begin{aligned}\Xi+H &= -\big(-H+(-\Xi)\big) = -\big((\eta_2-\eta_1)+(\xi_2-\xi_1)\big)\\
&= -\big((\eta_2+\xi_2)-(\eta_1+\xi_1)\big) = (\eta_1+\xi_1)-(\eta_2+\xi_2)\\
&= (\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2).\end{aligned}$$

C) Ist

$$\Xi = |H|,$$

also

$$\xi_1-\xi_2 = \eta_2-\eta_1,$$

so ist

$$\xi_1 = \xi_2+(\eta_2-\eta_1),$$

$$\xi_1+\eta_1 = \xi_2+\eta_2,$$

$$\Xi+H = 0 = (\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2).$$

4) Es Sei

$$\Xi < 0, \quad H > 0.$$

Dann ist nach 3)

$$H+\Xi = (\eta_1+\xi_1)-(\eta_2+\xi_2),$$

$$\Xi+H = (\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2).$$

5) Es sei

$$\Xi = 0.$$

Dann ist

$$\xi_1 = \xi_2,$$

$$\Xi+H = H.$$

a) Für

$$\eta_1 > \eta_2$$

ist

$$(\eta_1-\eta_2)+(\xi_1+\eta_2) = \big((\eta_1-\eta_2)+\eta_2\big)+\xi_1 = \eta_1+\xi_1 = \xi_1+\eta_1,$$

$$H = \eta_1-\eta_2 = (\xi_1+\eta_1)-(\xi_1+\eta_2) = (\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2).$$

b) Für

$$\eta_1 = \eta_2$$

ist

$$H = 0 = (\xi_1+\eta_1)-(\xi_2+\eta_2).$$

c) Für

$$\eta_1 < \eta_2$$

ist nach a)

$$-H = \eta_2 - \eta_1 = (\xi_2 + \eta_2) - (\xi_1 + \eta_1),$$

$$H = -(-H) = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

6) Es sei

$$H = 0.$$

Dann ist nach 5)

$$\Xi + H = H + \Xi = (\eta_1 + \xi_1) - (\eta_2 + \xi_2) = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

Satz 186 (assoziatives Gesetz der Addition):

$$(\Xi + H) + Z = \Xi + (H + Z).$$

Beweis: Nach Satz 184 ist

$$\Xi = \xi_1 - \xi_2, \quad H = \eta_1 - \eta_2, \quad Z = \zeta_1 - \zeta_2.$$

Nach Satz 185 ist

$$\begin{aligned}(\Xi + H) + Z &= \big((\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2)\big) + (\zeta_1 - \zeta_2)\\ &= \big((\xi_1+\eta_1)+\zeta_1\big) - \big((\xi_2+\eta_2)+\zeta_2\big) = \big(\xi_1+(\eta_1+\zeta_1)\big) - \big(\xi_2+(\eta_2+\zeta_2)\big)\\ &= (\xi_1 - \xi_2) + \big((\eta_1 + \zeta_1) - (\eta_2 + \zeta_2)\big) = \Xi + (H + Z).\end{aligned}$$

Satz 187: *Bei gegebenen* Ξ, H *hat*

$$H + Y = \Xi$$

genau eine Lösung, nämlich

$$Y = \Xi - H.$$

Beweis: 1)

$$Y = \Xi - H$$

ist eine Lösung, da nach Satz 186

$$\begin{aligned}H + (\Xi - H) = (\Xi - H) + H &= \big(\Xi + (-H)\big) + H = \Xi + (-H + H)\\ &= \Xi + 0 = \Xi.\end{aligned}$$

2) Aus

$$H + Y = \Xi$$

folgt

$$\begin{aligned}\Xi - H = \Xi + (-H) = -H + \Xi &= -H + (H + Y) = (-H + H) + Y\\ &= 0 + Y = Y.\end{aligned}$$

Satz 188: *Es ist*

$$\Xi + Z > H + Z \quad \textit{bzw.} \quad \Xi + Z = H + Z \quad \textit{bzw.} \quad \Xi + Z < H + Z,$$

je nachdem

$$\Xi > H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi = H \quad \textit{bzw.} \quad \Xi < H.$$

Beweis: Nach Satz 182 gilt ersteres, je nachdem

$$(\Xi + Z) - (H + Z) > 0 \quad \text{bzw.} \quad (\Xi + Z) - (H + Z) = 0$$
$$\text{bzw.} \quad (\Xi + Z) - (H + Z) < 0;$$

letzteres, je nachdem

$$\Xi - H > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi - H = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Xi - H < 0.$$

Aus

$$(\Xi+Z)-(H+Z) = (\Xi+Z)+\bigl(-Z+(-H)\bigr) = \Bigl(\Xi+\bigl(Z+(-Z)\bigr)\Bigr)+(-H)$$
$$= \Xi + (-H) = \Xi - H$$

folgen also die Behauptungen.

Satz 189: *Aus*

$$\Xi > H, \quad Z > Y$$

folgt

$$\Xi + Z > H + Y.$$

Beweis: Nach Satz 188 ist

$$\Xi + Z > H + Z$$

und

$$H + Z = Z + H > Y + H = H + Y,$$

also

$$\Xi + Z > H + Y.$$

Satz 190: *Aus*

$$\Xi \geq H, \quad Z > Y \quad \textit{oder} \quad \Xi > H, \quad Z \geq Y$$

folgt

$$\Xi + Z > H + Y.$$

Beweis: Mit dem Gleichheitszeichen in der Voraussetzung durch Satz 188, sonst durch Satz 189 erledigt.

Satz 191: Aus

$$\Xi \geq H, \quad Z \geq Y$$

folgt

$$\Xi + Z \geq H + Y.$$

Beweis: Mit zwei Gleichheitszeichen in der Voraussetzung klar; sonst durch Satz 190 erledigt.

§ 4.

Multiplikation.

Definition 55:

$$\Xi \cdot H = \begin{cases} -(|\Xi|\,|H|), & \textit{wenn} \quad \Xi > 0, \quad H < 0 \quad \textit{oder} \quad \Xi < 0, \quad H > 0; \\ |\Xi|\,|H|\,, & \textit{wenn} \quad \Xi < 0, \quad H < 0; \\ 0, & \textit{wenn} \quad \Xi = 0 \quad \textit{oder} \quad H = 0. \end{cases}$$

($\cdot$ sprich: mal; aber man schreibt den Punkt meist nicht.) $\Xi \cdot H$ *heißt das Produkt von* Ξ *mit* H *oder die durch Multiplikation von* Ξ *mit* H *entstehende Zahl.*

Man beachte, daß $\Xi \cdot H$ für $\Xi > 0$, $H > 0$ uns schon aus Definition 36 bekannt ist, was ja auch in Definition 55 benutzt wurde.

Satz 192: *Es ist*

$$\Xi H = 0$$

dann und nur dann, wenn mindestens eine der beiden Zahlen Ξ, H *Null ist.*

Beweis: Definition 55.

Satz 193:

$$|\Xi H| = |\Xi|\,|H|\,.$$

Beweis: Definition 55.

Satz 194 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$\Xi H = H \Xi.$$

Beweis: Das ist für $\Xi > 0$, $H > 0$ der Satz 142 und folgt sonst aus Definition 55, da die rechte Seite dieser Definition (nach Satz 142) und die Fallunterscheidung in Ξ, H symmetrisch sind.

Satz 195:

$$\Xi \cdot 1 = \Xi.$$

Beweis: Für $\Xi > 0$ folgt dies aus Satz 151; für $\Xi = 0$ aus Definition 55; für $\Xi < 0$ ist nach Definition 55

$$\Xi \cdot 1 = -(|\Xi| \cdot 1) = -|\Xi| = \Xi.$$

Satz 196: *Ist*

$$\Xi \neq 0, \quad H \neq 0,$$

so ist

$$\Xi H = |\Xi|\,|H| \quad \textit{bzw.} \quad \Xi H = -(|\Xi|\,|H|),$$

je nachdem keine oder zwei bzw. genau eine der Zahlen Ξ, H *negativ sind.*

Beweis: Definition 55.

Satz 197:

$$(-\Xi)H = \Xi(-H) = -(\Xi H).$$

Beweis: 1) Ist eine der Zahlen Ξ, H Null, so sind alle drei Ausdrücke 0.

2) Ist

$$\Xi \neq 0, \quad H \neq 0,$$

so haben nach Satz 193 alle drei Ausdrücke denselben absoluten Betrag $|\Xi|\,|H|$, und nach Satz 196 sind alle drei > 0 bzw. < 0, je nachdem genau eine bzw. keine oder zwei der Zahlen Ξ, H negativ sind.

Satz 198:

$$(-\Xi)(-H) = \Xi H.$$

Beweis: Nach Satz 197 ist

$$(-\Xi)(-H) = \Xi\big(-(-H)\big) = \Xi H.$$

Satz 199 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$(\Xi H)Z = \Xi(HZ).$$

Beweis: 1) Ist eine der Zahlen Ξ, H, Z Null, so sind beide Seiten der Behauptung 0.

2) Ist

$$\Xi \neq 0, \quad H \neq 0, \quad Z \neq 0,$$

so haben nach Satz 193 beide Seiten denselben absoluten Betrag

$$(|\Xi|\,|H|)\,|Z| = |\Xi|\,(|H|\,|Z|),$$

und nach Satz 196 sind beide Seiten > 0 bzw. < 0, je nachdem keine oder genau zwei bzw. genau eine oder drei der Zahlen Ξ, H, Z negativ sind.

Satz 200:

$$\xi(\eta - \zeta) = \xi\eta - \xi\zeta.$$

Beweis: 1) Für

$$\eta > \zeta$$

ist

$$(\eta - \zeta) + \zeta = \eta,$$

also nach Satz 144

$$\xi(\eta - \zeta) + \xi\zeta = \xi\eta,$$

$$\xi(\eta - \zeta) = \xi\eta - \xi\zeta.$$

2) Für

$$\eta = \zeta$$

ist

$$\xi\eta = \xi\zeta,$$

$$\xi(\eta - \zeta) = \xi \cdot 0 = 0 = \xi\eta - \xi\zeta.$$

3) Für

$$\eta < \zeta$$

ist nach 1)

$$\xi(\eta - \zeta) = \xi\big(-(\zeta - \eta)\big) = -\big(\xi(\zeta - \eta)\big) = -(\xi\zeta - \xi\eta) = \xi\eta - \xi\zeta.$$

Satz 201 (distributives Gesetz):

$$\Xi(H + Z) = \Xi H + \Xi Z.$$

Beweis: 1) Es sei
$$\Xi > 0.$$
Nach Satz 184 ist
$$H = \eta_1 - \eta_2, \quad Z = \zeta_1 - \zeta_2,$$
nach Satz 185 somit
$$H + Z = (\eta_1 + \zeta_1) - (\eta_2 + \zeta_2),$$
also nach Satz 200 und Satz 144
$$\Xi(H + Z) = \Xi(\eta_1 + \zeta_1) - \Xi(\eta_2 + \zeta_2) = (\Xi\eta_1 + \Xi\zeta_1) - (\Xi\eta_2 + \Xi\zeta_2),$$
also nach Satz 185 und Satz 200
$$\begin{aligned}\Xi(H + Z) &= (\Xi\eta_1 - \Xi\eta_2) + (\Xi\zeta_1 - \Xi\zeta_2) = \Xi(\eta_1 - \eta_2) + \Xi(\zeta_1 - \zeta_2)\\ &= \Xi H + \Xi Z.\end{aligned}$$

2) Es sei
$$\Xi = 0.$$
Dann ist
$$\Xi(H + Z) = 0 = \Xi H + \Xi Z.$$

3) Es sei
$$\Xi < 0.$$
Dann ist nach 1)
$$(-\Xi)(H + Z) = (-\Xi)H + (-\Xi)Z.$$
also
$$-\big(\Xi(H + Z)\big) = (-\Xi)H + (-\Xi)Z,$$
$$\begin{aligned}\Xi(H + Z) &= -\big((-\Xi)H + (-\Xi)Z\big) = -\big((-\Xi)H\big) + \Big(-\big((-\Xi)Z\big)\Big)\\ &= \Xi H + \Xi Z.\end{aligned}$$

Satz 202:
$$\Xi(H - Z) = \Xi H - \Xi Z.$$

Beweis: Nach Satz 201 ist
$$\begin{aligned}\Xi(H - Z) &= \Xi\big(H + (-Z)\big) = \Xi H + \Xi(-Z) = \Xi H + \big(-(\Xi Z)\big)\\ &= \Xi H - \Xi Z.\end{aligned}$$

Satz 203: *Es sei*
$$\Xi > H.$$
Aus
$$Z > 0 \quad \textit{bzw.} \quad Z = 0 \quad \textit{bzw.} \quad Z < 0$$
folgt dann
$$\Xi Z > HZ \quad \textit{bzw.} \quad \Xi Z = HZ \quad \textit{bzw.} \quad \Xi Z < HZ.$$

Beweis:
$$\Xi - H > 0,$$
also
$$(\Xi - H)Z > 0 \quad \text{bzw.} \quad (\Xi - H)Z = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\Xi - H)Z < 0,$$

je nachdem

$$Z > 0 \quad \text{bzw.} \quad Z = 0 \quad \text{bzw.} \quad Z < 0.$$

Da nach Satz 202

$$(\Xi - H)Z = Z(\Xi - H) = Z\Xi - ZH = \Xi Z - HZ$$

ist, ist in diesen Fällen nach Satz 182

$$\Xi Z > HZ \quad \text{bzw.} \quad \Xi Z = HZ \quad \text{bzw.} \quad \Xi Z < HZ.$$

Satz 204: *Die Gleichung*

$$HY = \Xi,$$

wo Ξ, H *gegeben sind und*

$$H \neq 0$$

ist, hat genau eine Lösung Y.

Beweis: I) Es gibt höchstens eine Lösung; denn aus

$$HY_1 = \Xi = HY_2$$

folgt

$$0 = HY_1 - HY_2 = H(Y_1 - Y_2),$$

also nach Satz 192

$$0 = Y_1 - Y_2,$$

$$Y_1 = Y_2.$$

II) 1) Es sei

$$H > 0.$$

Dann ist

$$Y = \frac{1}{H}\Xi$$

eine Lösung wegen

$$HY = H\left(\frac{1}{H}\Xi\right) = \left(H\frac{1}{H}\right)\Xi = 1 \cdot \Xi = \Xi.$$

2) Es sei

$$H < 0.$$

Dann ist

$$Y = -\left(\frac{1}{|H|}\Xi\right)$$

eine Lösung. Denn nach 1) ist

$$\Xi = |H|\left(\frac{1}{|H|}\Xi\right) = |H|(-Y) = (-|H|)Y = HY.$$

Definition 56: *Das* Y *des Satzes 204 heißt* $\frac{\Xi}{H}$ (sprich: Ξ durch H). $\frac{\Xi}{H}$ *heißt auch der Quotient von* Ξ *durch* H *oder die durch Division von* Ξ *durch* H *entstehende Zahl.*

Man beachte, daß (wie es sein muß) dies für $\Xi > 0$, $H > 0$ mit der alten Definition 38 übereinstimmt.

§ 5.

Dedekindscher Hauptsatz.

Satz 205: *Gegeben sei irgend eine Einteilung aller reellen Zahlen in zwei Klassen mit folgenden Eigenschaften.*

1) *Es gibt eine Zahl der ersten Klasse und eine Zahl der zweiten Klasse.*

2) *Jede Zahl der ersten Klasse ist kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse.*

Dann gibt es genau eine reelle Zahl Ξ, *so daß jedes* $H < \Xi$ *zur ersten, jedes* $H > \Xi$ *zur zweiten Klasse gehört.*

Mit anderen Worten: Jede Zahl der ersten Klasse ist $\leq \Xi$, jede Zahl der zweiten Klasse $\geq \Xi$.

Vorbemerkung: Es ist umgekehrt klar, daß jede reelle Zahl Ξ genau zwei solche Einteilungen erzeugt; die eine mit $H \leq \Xi$ als erster, $H > \Xi$ als zweiter Klasse; die andere mit $H < \Xi$ als erster, $H \geq \Xi$ als zweiter Klasse.

Beweis: A) Mehr als ein solches Ξ kann es nicht geben; denn wäre

$$\Xi_1 < \Xi_2$$

und leisteten Ξ_1 und Ξ_2 das Gewünschte, so würde $\frac{\Xi_1+\Xi_2}{1+1}$ wegen

$$(1+1)\Xi_1 = \Xi_1 + \Xi_1 < \Xi_1 + \Xi_2 < \Xi_2 + \Xi_2 = (1+1)\Xi_2,$$

$$\Xi_1 < \frac{\Xi_1 + \Xi_2}{1+1} < \Xi_2$$

sowohl zur zweiten als auch zur ersten Klasse gehören.

B) Zum Nachweis der Existenz eines Ξ unterscheiden wir vier Fälle:

I) Es gebe eine positive Zahl in der ersten Klasse.

Wir betrachten den Schnitt, der folgendermaßen erzeugt wird: Jede positive rationale Zahl kommt in die Unterklasse, wenn sie in der ersten Klasse liegt, ohne die etwaige größte rationale Zahl der ersten Klasse zu sein; sonst (d. h. wenn sie die etwaige größte rationale Zahl der ersten Klasse ist oder in der zweiten Klasse liegt) in die Oberklasse. Das ist wirklich ein Schnitt. Denn:

1) Da die erste Klasse eine positive Zahl enthält, enthält sie jede kleinere positive rationale Zahl (eine solche gibt es nach Satz 158), also eine, zu der es in der ersten Klasse eine größere gibt. Die Unterklasse ist also nicht leer.

Da die zweite Klasse eine Zahl enthält, enthält sie jede größere positive rationale Zahl (eine solche gibt es nach Satz 158). Die Oberklasse ist also nicht leer.

2) Jede Zahl der Unterklasse ist kleiner als jede der Oberklasse; denn jede Zahl der ersten Klasse ist kleiner als jede der zweiten Klasse, und die etwaige größte positive rationale Zahl der ersten Klasse ist gewiß größer als jede Zahl der Unterklasse.

3) Die Unterklasse enthält keine größte positive rationale Zahl. Denn entweder die erste Klasse enthält schon keine solche. Oder sie enthält eine solche; dann war diese in die Oberklasse getan, und unter den positiven rationalen Zahlen, die kleiner als eine gegebene sind, gibt es schon nach Satz 91 keine größte.

Die durch unseren Schnitt definierte positive Zahl nennen wir Ξ und behaupten, daß sie die gestellten Forderungen erfüllt.

a) Es sei H mit

$$H < \Xi$$

gegeben. Wir wählen nach Satz 159 (mit $\xi = H$, $\eta = \Xi$, wenn $H > 0$ ist; mit $\xi = \frac{\Xi}{1+1}$, $\eta = \Xi$, wenn $H \leq 0$ ist) ein Z mit

$$H < Z < \Xi.$$

Dann ist Z Unterzahl bei Ξ, also zur ersten Klasse gehörig; daher gehört H zur ersten Klasse.

b) Es sei H mit

$$H > \Xi$$

gegeben. Wir wählen nach Satz 159 ein Z mit

$$\Xi < Z < H.$$

Dann ist Z Oberzahl bei Ξ und (nach Satz 159) nicht die kleinste, also zur zweiten Klasse gehörig; daher gehört H zur zweiten Klasse.

II) Jede positive Zahl liege in der zweiten Klasse; 0 liege in der ersten Klasse.

Dann liegt jede negative Zahl in der ersten Klasse, und

$$\Xi = 0$$

leistet das Gewünschte.

III) 0 liege in der zweiten Klasse; jede negative Zahl liege in der ersten Klasse.

Dann liegt jede positive Zahl in der zweiten Klasse, und

$$\Xi = 0$$

leistet das Gewünschte.

IV) Es gebe eine negative Zahl in der zweiten Klasse. Dann betrachten wir folgende neue Einteilung:

H in der neuen ersten Klasse, wenn $-H$ in der alten zweiten Klasse lag;

H in der neuen zweiten Klasse, wenn $-H$ in der alten ersten Klasse lag.

Diese Einteilung genügt offenbar den beiden Bedingungen des Satzes 205. Denn

1) in jeder Klasse liegt eine Zahl;

2) aus

$$H_1 < H_2$$

folgt nach Satz 183

$$-H_2 < -H_1.$$

Überdies fällt die neue Einteilung unter Fall 1), da es eine positive Zahl in der neuen ersten Klasse gibt. Nach I) existiert also eine Zahl Ξ_1, so daß jedes

$$H < \Xi_1$$

in der neuen ersten Klasse, jedes

$$H > \Xi_1$$

in der neuen zweiten Klasse liegt. Wird

$$-\Xi_1 = \Xi$$

gesetzt, so folgt aus

$$H < \Xi \quad \text{bzw.} \quad H > \Xi,$$

daß

$$-H > \Xi_1 \quad \text{bzw.} \quad -H < \Xi_1,$$

ist. Also liegt $-H$ in der neuen zweiten bzw. neuen ersten Klasse, also H in der alten ersten bzw. alten zweiten Klasse.

Kapitel 5.

Komplexe Zahlen.

§ 1.

Definition.

Definition 57: *Eine komplexe Zahl ist ein Paar reeller Zahlen* Ξ_1, Ξ_2 (in bestimmter Reihenfolge). *Wir bezeichnen die komplexe Zahl mit* $[\Xi_1, \Xi_2]$. *Dabei gelten* $[\Xi_1, \Xi_2]$ *und* $[H_1, H_2]$ *als dieselbe Zahl (als gleich;* schreibe: $=$*) genau dann, wenn*

$$\Xi_1 = H_1, \quad \Xi_2 = H_2$$

ist; sonst als ungleich (verschieden; schreibe: $\neq$).

Kleine deutsche Buchstaben bedeuten durchweg komplexe Zahlen.

Für jedes $\mathfrak{x}$ und jedes $\mathfrak{y}$ liegt somit genau einer der Fälle

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$$

vor. Bei den komplexen Zahlen vermischen sich die Begriffe der Identität und Gleichheit, so daß die drei Sätze trivial sind:

Satz 206:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}.$$

Satz 207: *Aus*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$$

folgt

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Satz 208: *Aus*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{z}$$

folgt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z}.$$

Definition 58:

$$\mathfrak{n} = [0, 0].$$

Definition 59:

$$\mathfrak{e} = [1, 0].$$

Die Buchstaben $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{e}$ bleiben also für bestimmte komplexe Zahlen reserviert.

§ 2.

Addition.

Definition 60: *Ist*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2],$$

so ist

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = [\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2].$$

(+ sprich: plus.) $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ *heißt die Summe von* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *oder die durch Addition von* $\mathfrak{y}$ *zu* $\mathfrak{x}$ *entstehende* (komplexe) *Zahl.*

Satz 209 (kommutatives Gesetz der Addition):

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$[\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2] = [H_1 + \Xi_1, H_2 + \Xi_2].$$

Satz 210:

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{n} = \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$[\Xi_1, \Xi_2] + [0, 0] = [\Xi_1 + 0, \Xi_2 + 0] = [\Xi_1, \Xi_2].$$

Satz 211 (assoziatives Gesetz der Addition):

$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Beweis: Ist

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2], \quad \mathfrak{z} = [Z_1, Z_2],$$

so ist nach Satz 186

$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z} = [\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2] + [Z_1, Z_2] = [(\Xi_1 + H_1) + Z_1, (\Xi_2 + H_2) + Z_2]$$
$$= [\Xi_1 + (H_1 + Z_1), \Xi_2 + (H_2 + Z_2)] = [\Xi_1, \Xi_2] + [H_1 + Z_1, H_2 + Z_2] = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Satz 212: *Bei gegebenen* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *hat*

$$\mathfrak{y} + \mathfrak{u} = \mathfrak{x}.$$

genau eine Lösung $\mathfrak{u}$, *nämlich,*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2]$$

gesetzt,

$$\mathfrak{u} = [\Xi_1 - H_1, \Xi_2 - H_2].$$

Beweis: Für jedes

$$\mathfrak{u} = [Y_1, Y_2]$$

ist

$$\mathfrak{y}+\mathfrak{u}=[H_1+Y_1,\,H_2+Y_2],$$

und es wird genau

$$H_1+Y_1=\Xi_1,\quad H_2+Y_2=\Xi_2$$

verlangt, so daß Satz 187 alles beweist.

Definition 61: *Das* $\mathfrak{u}$ *des Satzes 212 heißt* $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ ($-$ sprich: minus). $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ *heißt auch die Differenz* $\mathfrak{x}$ *minus* $\mathfrak{y}$ *oder die durch Subtraktion des* $\mathfrak{y}$ *von* $\mathfrak{x}$ *entstehende Zahl.*

Satz 213: *Es ist*

$$\mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{n}$$

dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{y}.$$

Beweis: Es ist

$$\Xi_1-H_1=\Xi_2-H_2=0$$

genau dann, wenn

$$\Xi_1=H_1,\quad \Xi_2=H_2.$$

Definition 62:

$$-\mathfrak{x}=\mathfrak{n}-\mathfrak{x}.$$

($-$ links sprich: minus.)

Satz 214: *Für*

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\,\Xi_2]$$

ist

$$-\mathfrak{x}=[-\Xi_1,\,-\Xi_2].$$

Beweis:

$$\begin{aligned}-[\Xi_1,\,\Xi_2]=[0,\,0]-[\Xi_1,\,\Xi_2]&=[0-\Xi_1,\,0-\Xi_2]\\&=[-\Xi_1,\,-\Xi_2]\end{aligned}$$

Satz 215:

$$-(-\mathfrak{x})=\mathfrak{x}.$$

Beweis: Nach Satz 177 ist

$$-(-\Xi_1)=\Xi_1,\quad -(-\Xi_2)=\Xi_2.$$

Satz 216:

$$\mathfrak{x}+(-\mathfrak{x})=\mathfrak{n}.$$

Beweis: Nach Satz 179 ist

$$\Xi_1+(-\Xi_1)=0,\quad \Xi_2+(-\Xi_2)=0.$$

Satz 217:

$$-(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})=-\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).$$

Beweis: Nach Satz 180 ist,

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\,\Xi_2],\quad \mathfrak{y}=[H_1,\,H_2]$$

gesetzt,

$$\begin{aligned}-(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})&=[-(\Xi_1+H_1),-(\Xi_2+H_2)]=[-\Xi_1+(-H_1),-\Xi_2+(-H_2)]\\&=[-\Xi_1,\,-\Xi_2]+[-H_1,\,-H_2]=-\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).\end{aligned}$$

Satz 218:

$$\mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).$$

Beweis:

$$[\Xi_1-H_1,\,\Xi_2-H_2]=[\Xi_1,\,\Xi_2]+[-H_1,\,-H_2].$$

Satz 219:

$$-(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=\mathfrak{y}-\mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}-(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=-\big(\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y})\big)&=-\mathfrak{x}+\big(-(-\mathfrak{y})\big)=-\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\\&=\mathfrak{y}+(-\mathfrak{x})=\mathfrak{y}-\mathfrak{x}.\end{aligned}$$

§ 3.

Multiplikation.

Definition 63: *Ist*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2],$$

so ist

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = [\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2, \Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1].$$

(· sprich: mal: aber man schreibt den Punkt meist nicht.) $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ *heißt das Produkt von* $\mathfrak{x}$ *mit* $\mathfrak{y}$ *oder die durch Multiplikation von* $\mathfrak{x}$ *mit* $\mathfrak{y}$ *entstehende Zahl.*

Satz 220 (kommutatives Gesetz der Multiplikation):

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}[\Xi_1, \Xi_2][H_1, H_2] &= [\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2, \Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1]\\ = [H_1\Xi_1 - H_2\Xi_2, H_1\Xi_2 + H_2\Xi_1] &= [H_1, H_2][\Xi_1, \Xi_2].\end{aligned}$$

Satz 221:*Es ist*

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$$

dann und nur dann, wenn mindestens eine der beiden Zahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *gleich* $\mathfrak{n}$ *ist.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2].$$

I) Aus

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}$$

folgt

$$\Xi_1 = \Xi_2 = 0,$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = [0 \cdot H_1 - 0 \cdot H_2, 0 \cdot H_2 + 0 \cdot H_1] = [0, 0] = \mathfrak{n}.$$

2) Aus

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$$

folgt nach Satz 220 und 1)

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{n}\mathfrak{x} = \mathfrak{n}.$$

3) Aus

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$$

soll gefolgert werden, daß

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{n}$$

ist. Wir dürfen daher voraussetzen

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

d. h.
$$H_1H_1 + H_2H_2 > 0,$$
und haben
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n},$$
d. h.
$$\Xi_1 = \Xi_2 = 0,$$
zu beweisen.

Nach Voraussetzung ist
$$\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2 = 0 = \Xi_1H_2 + \Xi_2H_1,$$
also
$$\begin{aligned} 0 &= (\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2)H_1 + (\Xi_1H_2 + \Xi_2H_1)H_2 \\ &= \big((\Xi_1H_1)H_1 - (\Xi_2H_2)H_1\big) + \big((\Xi_1H_2)H_2 + (\Xi_2H_1)H_2\big) \\ &= \big(\Xi_1(H_1H_1) - \Xi_2(H_2H_1)\big) + \big(\Xi_1(H_2H_2) + \Xi_2(H_1H_2)\big) \\ &= \Big(\big(\Xi_1(H_1H_1) - \Xi_2(H_1H_2)\big) + \Xi_2(H_1H_2)\Big) + \Xi_1(H_2H_2) \\ &= \Xi_1(H_1H_1) + \Xi_1(H_2H_2) = \Xi_1(H_1H_1 + H_2H_2), \end{aligned}$$
also
$$\Xi_1 = 0,$$
$$\Xi_2H_2 = 0 = \Xi_2H_1.$$
Da H_1 und H_2 nicht beide 0 sind, ist also
$$\Xi_2 = 0.$$

Satz 222:
$$\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}.$$

Beweis:
$$[\Xi_1,\, \Xi_2][1,\, 0] = [\Xi_1 \cdot 1 - \Xi_2 \cdot 0,\, \Xi_1 \cdot 0 + \Xi_2 \cdot 1] = [\Xi_1,\, \Xi_2].$$

Satz 223:
$$\mathfrak{x}(-\mathfrak{e}) = -\mathfrak{x}.$$

Beweis:
$$\begin{aligned} [\Xi_1,\, \Xi_2][-1,\, 0] &= [\Xi_1 \cdot (-1) - \Xi_2 \cdot 0,\, \Xi_1 \cdot 0 + \Xi_2 \cdot (-1)] \\ &= [-\Xi_1,\, -\Xi_2]. \end{aligned}$$

Satz 224:
$$(-\mathfrak{x})\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(-\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

Beweis: 1)
$$\begin{aligned} [-\Xi_1,\, -\Xi_2][H_1,\, H_2] &= [(-\Xi_1)H_1 - (-\Xi_2)H_2,\, (-\Xi_1)H_2 + (-\Xi_2)H_1] \\ &= [-(\Xi_1H_1) + \Xi_2H_2,\, -(\Xi_1H_2) - \Xi_2H_1] \\ &= [-(\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2),\, -(\Xi_1H_2 + \Xi_2H_1)] \\ &= -([\Xi_1,\, \Xi_2][H_1,\, H_2]), \end{aligned}$$
$$(-\mathfrak{x})\mathfrak{y} = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

2) Nach 1) ist
$$\mathfrak{x}(-\mathfrak{y}) = (-\mathfrak{y})\mathfrak{x} = -(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

Satz 225:

$$(-\mathfrak{x})(-\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Beweis: Nach Satz 224 ist

$$(-\mathfrak{x})(-\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\big(-(-\mathfrak{y})\big) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Satz 226 (assoziatives Gesetz der Multiplikation):

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}).$$

Beweis: In diesem Beweise werde der Übersichtlichkeit wegen ausnahmsweise zur Abkürzung

$$(\Xi + H) + Z = \Xi + H + Z,$$

$$(\Xi H)Z = \Xi H Z$$

gesetzt, so daß auch

$$\Xi + (H + Z) = \Xi + H + Z,$$

$$\Xi(HZ) = \Xi H Z$$

ist.

Es werde

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1,\, H_2], \quad \mathfrak{z} = [Z_1,\, Z_2]$$

gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z} &= [\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2,\, \Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1][Z_1,\, Z_2] \\
&= [(\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2)Z_1 - (\Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1)Z_2, \\
&\quad (\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2)Z_2 + (\Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1)Z_1] \\
&= [(\Xi_1 H_1 Z_1 - \Xi_2 H_2 Z_1) - (\Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2), \\
&\quad (\Xi_1 H_1 Z_2 - \Xi_2 H_2 Z_2) + (\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1)] \\
&= \Big[\Big(\Xi_1 H_1 Z_1 + \big(-(\Xi_2 H_2 Z_1)\big)\Big) + \big(-(\Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2)\big), \\
&\quad (\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1) + \Big(\Xi_1 H_1 Z_2 + \big(-(\Xi_2 H_2 Z_2)\big)\Big)\Big] \\
&= [\Xi_1 H_1 Z_1 - (\Xi_2 H_2 Z_1 + \Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2), \\
&\quad (\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1 + \Xi_1 H_1 Z_2) - \Xi_2 H_2 Z_2].
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{x}$$

entsteht durch Buchstabenvertauschung (H statt Ξ, Z statt H, Ξ statt Z)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) &= [H_1 Z_1 \Xi_1 - (H_2 Z_2 \Xi_1 + H_1 Z_2 \Xi_2 + H_2 Z_1 \Xi_2), \\
&\quad (H_1 Z_2 \Xi_1 + H_2 Z_1 \Xi_1 + H_1 Z_1 \Xi_2) - H_2 Z_2 \Xi_2].
\end{aligned}$$

Wegen

$$\Xi H Z = \Xi(HZ) = (HZ)\Xi = HZ\Xi,$$

$$A + B + \Gamma = A + (B + \Gamma) = (B + \Gamma) + A = B + \Gamma + A$$

erkennt man an den ausgerechneten Ausdrücken

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}).$$

Satz 227 (distributives Gesetz):

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&[\Xi_1,\,\Xi_2]([H_1,\,H_2]+[Z_1,\,Z_2]) = [\Xi_1,\,\Xi_2][H_1+Z_1,\,H_2+Z_2]\\
&= [\Xi_1(H_1+Z_1)-\Xi_2(H_2+Z_2),\,\Xi_1(H_2+Z_2)+\Xi_2(H_1+Z_1)]\\
&= \left[(\Xi_1H_1+\Xi_1Z_1)+\Big(-(\Xi_2H_2)+\big(-(\Xi_2Z_2)\big)\Big),(\Xi_1H_2+\Xi_1Z_2)+(\Xi_2H_1+\Xi_2Z_1)\right]\\
&= [(\Xi_1H_1-\Xi_2H_2)+(\Xi_1Z_1-\Xi_2Z_2),(\Xi_1H_2+\Xi_2H_1)+(\Xi_1Z_2+\Xi_2Z_1)]\\
&= [\Xi_1H_1-\Xi_2H_2,\,\Xi_1H_2+\Xi_2H_1]+[\Xi_1Z_1-\Xi_2Z_2,\,\Xi_1Z_2+\Xi_2Z_1]\\
&= [\Xi_1,\,\Xi_2][H_1,\,H_2]+[\Xi_1,\,\Xi_2][Z_1,\,Z_2].
\end{aligned}
$$

Satz 228:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\big(\mathfrak{y}+(-\mathfrak{z})\big) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}(-\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}+\big(-(\mathfrak{x}\mathfrak{z})\big)\\
= \mathfrak{x}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\mathfrak{z}.
\end{aligned}
$$

Satz 229: *Die Gleichung*

$$\mathfrak{y}\mathfrak{u} = \mathfrak{x},$$

wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *gegeben sind und*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}$$

ist, hat genau eine Lösung $\mathfrak{u}$.

Beweis: 1) Es gibt höchstens eine Lösung; denn aus

$$\mathfrak{y}\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{x} = \mathfrak{y}\mathfrak{u}_2$$

folgt

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{y}\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{y}\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{y}(\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_2),$$

also nach Satz 221

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2,$$

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2.$$

2) Ist

$$\mathfrak{y} = [H_1,\,H_2],$$

so ist

$$H = H_1H_1 + H_2H_2 > 0,$$

und

$$\mathfrak{u} = \left[\frac{H_1}{H},\,-\frac{H_2}{H}\right]\mathfrak{x}$$

ist eine Lösung wegen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{y}\mathfrak{u} &= \left([H_1,\,H_2]\left[\frac{H_1}{H},\,-\frac{H_2}{H}\right]\right)\mathfrak{x}\\
&= \left[H_1\frac{H_1}{H}+H_2\frac{H_2}{H},\,-\left(H_1\frac{H_2}{H}\right)+H_2\frac{H_1}{H}\right]\mathfrak{x}\\
&= \left[\frac{H_1H_1+H_2H_2}{H},\,\frac{-(H_1H_2)+H_1H_2}{H}\right]\mathfrak{x} = [1,\,0]\mathfrak{x} = \mathfrak{e}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}.
\end{aligned}
$$

Definition 64: *Das* $\mathfrak{u}$ *des Satzes 229 haßt* $\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$ (sprich: $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{y}$). $\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$ *heißt auch der Quotient von* $\mathfrak{x}$ *durch* $\mathfrak{y}$ *oder die durch Division von* $\mathfrak{x}$ *durch* $\mathfrak{y}$ *entstehende Zahl.*

§ 4.

Subtraktion.

Satz 230:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{y}+(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=\mathfrak{x}.$$

Satz 231:

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})-\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{y}+\mathfrak{x}=\mathfrak{x}+\mathfrak{y}.$$

Satz 232:

$$\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=\mathfrak{y}.$$

Beweis:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Satz 233:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}=\mathfrak{x}-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}\big)&=\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}\big)+(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})\\&=\Big(\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}\big)+\mathfrak{z}\Big)+\mathfrak{y}=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.\end{aligned}$$

Satz 234:

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})-\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}).$$

Beweis:

$$\big(\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})\big)+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\big((\mathfrak{y}-\mathfrak{z})+\mathfrak{z}\big)=\mathfrak{x}+\mathfrak{y}.$$

Satz 235:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}-(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{z}\big)+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})&=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\big(\mathfrak{z}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})\big)\\&=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.\end{aligned}$$

Satz 236:

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{z})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=\mathfrak{x}-\mathfrak{y}.$$

Beweis:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}\big)+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\mathfrak{z}.$$

Satz 237:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=(\mathfrak{x}+\mathfrak{z})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{u}).$$

Beweis:

$$\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})\big)+(\mathfrak{y}+\mathfrak{u})=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\big((\mathfrak{z}-\mathfrak{u})+(\mathfrak{u}+\mathfrak{y})\big)$$
$$=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\Big(\big((\mathfrak{z}-\mathfrak{u})+\mathfrak{u}\big)+\mathfrak{y}\Big)=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$$
$$=\big((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}\big)+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\mathfrak{z}.$$

Satz 238:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=(\mathfrak{x}+\mathfrak{u})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}).$$

Beweis: Nach Satz 237 und Satz 236 ist

$$\big((\mathfrak{x}+\mathfrak{u})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\big)+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=\big((\mathfrak{x}+\mathfrak{u})+\mathfrak{z}\big)-\big((\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\mathfrak{u}\big)$$
$$=\big(\mathfrak{x}+(\mathfrak{u}+\mathfrak{z})\big)-\big(\mathfrak{y}+(\mathfrak{z}+\mathfrak{u})\big)=\mathfrak{x}-\mathfrak{y}.$$

Satz 239: *Es ist*

$$\mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{z}-\mathfrak{u}$$

dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{u}=\mathfrak{y}+\mathfrak{z}.$$

Beweis: Satz 213 und Satz 238.

§ 5.

Division.

Satz 240: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}.$$

Satz 241: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Satz 242: *Ist*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}} = \mathfrak{y}.$$

Beweis:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Satz 243: *Ist*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}.$$

Beweis:

$$(\mathfrak{y}\mathfrak{z})\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}} = \frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = \left(\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}\right)\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Satz 244: *Ist*

$$\mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x}\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}.$$

Beweis:

$$\left(\mathfrak{x}\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}\right) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Satz 245: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}}{\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}}.$$

Beweis:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{z}\right)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\mathfrak{z}\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Satz 246: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}.$$

Beweis:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Satz 247: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}\right)(\mathfrak{y}\mathfrak{u}) &= \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}\mathfrak{y})\right) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}\mathfrak{u}\right)\mathfrak{y}\right) \\ &= \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}.\end{aligned}$$

Satz 248: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}.$$

Beweis: Nach Satz 247 und Satz 246 ist

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{u})\mathfrak{z}}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{u}\mathfrak{z})}{\mathfrak{y}(\mathfrak{z}\mathfrak{u})} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}.$$

Satz 249: *Ist*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{n}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}.$$

Satz 250: *Ist*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{e}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}.$$

Satz 251: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e}$$

dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}.$$

Beweis: 1) Ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y},$$

so ist nach Satz 250

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e}.$$

2) Ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e},$$

so ist nach Satz 222

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}\mathfrak{e} = \mathfrak{y}.$$

Satz 252: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}$$

dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{x}\mathfrak{u} = \mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

Beweis Für

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{n}$$

ist die Behauptung klar.

Sonst ist nach Satz 248

$$\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}},$$

so daß Satz 251 die Behauptung liefert.

Satz 253: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{y}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}\right) = \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{z}.$$

Satz 254: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u} + \mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Beweis: Nach Satz 246 und Satz 253 ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}} + \frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u} + \mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Satz 255: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{y}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}\right) = \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - \mathfrak{z}.$$

Satz 256: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u} - \mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Beweis: Nach Satz 246 und Satz 255 ist

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}} - \frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u} - \mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

§ 6.

Konjugierte Zahlen.

Definition 65: *Zu*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\ \Xi_2]$$

heißt

$$\overline{\mathfrak{x}} = [\Xi_1,\ -\Xi_2]$$

konjugiert komplex.

Satz 257:

$$\overline{\overline{\mathfrak{x}}} = \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$[\Xi_1,\ -(-\Xi_2)] = [\Xi_1,\ \Xi_2].$$

Satz 258: *Es ist*

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{n}$$

dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}.$$

Beweis:

$$\Xi_1 = 0, \quad -\Xi_2 = 0$$

ist dasselbe wie

$$\Xi_1 = 0, \quad \Xi_2 = 0$$

Satz 259: *Es ist*

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$$

dann und nur dann, wenn $\mathfrak{x}$ *die Form*

$$\mathfrak{x} = [\Xi,\ 0]$$

hat.

Beweis: Es ist

$$\Xi_1 = \Xi_1, \quad -\Xi_2 = \Xi_2$$

dann und nur dann, wenn

$$\Xi_2 = 0.$$

Satz 260:

$$\overline{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{x}} + \overline{\mathfrak{y}}.$$

Beweis: Für

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\ \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1,\ H_2]$$

ist

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}} &= [\Xi_1 + H_1,\ -(\Xi_2 + H_2)] = [\Xi_1 + H_1,\ -\Xi_2 + (-H_2)] \\ &= [\Xi_1,\ -\Xi_2] + [H_1,\ -H_2] = \overline{\mathfrak{x}} + \overline{\mathfrak{y}}.\end{aligned}$$

Satz 261:
$$\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}}.$$

Beweis: Für
$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1,\, H_2]$$
ist
$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} &= [\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2,\, -(\Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1)]\\ &= [\Xi_1 H_1 - (-\Xi_2)(-H_2),\, \Xi_1(-H_2) + (-\Xi_2)H_1)]\\ &= [\Xi_1,\, -\Xi_2][H_1,\, -H_2] = \overline{x}\,\overline{y}.\end{aligned}$$

Satz 262:
$$\overline{\mathfrak{x} - \mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{x}} - \overline{\mathfrak{y}}.$$

Beweis: Wegen
$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + \mathfrak{y}$$
ist nach Satz 260
$$\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x} - \mathfrak{y}} + \overline{\mathfrak{y}},$$
$$\overline{\mathfrak{x} - \mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{x}} - \overline{\mathfrak{y}}.$$

Satz 263: *Für*
$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}$$
ist
$$\overline{\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)} = \frac{\overline{\mathfrak{x}}}{\overline{\mathfrak{y}}}.$$

Beweis: Wegen
$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}$$
ist nach Satz 261
$$\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)}\overline{\mathfrak{y}};$$
nach Satz 258 ist
$$\overline{\mathfrak{y}} \neq \mathfrak{n},$$
also
$$\overline{\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)} = \frac{\overline{\mathfrak{x}}}{\overline{\mathfrak{y}}}.$$

§ 7.

Absoluter Betrag.

Definition 66: *Es bedeute* $\sqrt{\zeta}$ *die nach Satz 161 eindeutig vorhandene* (positive) *Lösung* ξ *von*

$$\xi\xi = \zeta.$$

Definition 67:

$$\sqrt{0} = 0.$$

Definition 68:

$$|[\Xi_1,\, \Xi_2]| = \sqrt{\Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2}.$$

(| | sprich: absoluter Betrag.)

Satz 264:

$$|\mathfrak{x}| \begin{cases} > 0 & \textit{für} \quad \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \\ = 0 & \textit{für} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{n}. \end{cases}$$

Beweis: Definitionen 68, 66 und 67.

Satz 265:

$$|[\Xi_1,\, \Xi_2]| \geq |\Xi_1|,$$

$$|[\Xi_1,\, \Xi_2]| \geq |\Xi_2|.$$

Beweis:

$$|[\Xi_1,\, \Xi_2]|\, |[\Xi_1,\, \Xi_2]|$$

$$= \Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2 \begin{cases} \geq \Xi_1\Xi_1 = |\Xi_1||\Xi_1|, \\ \geq \Xi_2\Xi_2 = |\Xi_2||\Xi_2|. \end{cases}$$

Aus

$$\Xi\Xi \geq HH, \quad \Xi \geq 0, \quad H \geq 0$$

folgt

$$\Xi \geq H,$$

da sonst

$$0 < \Xi < H,$$

$$\Xi\Xi < HH$$

wäre. Damit ist Satz 265 bewiesen.

Satz 266: *Aus*

$$[\Xi,\, 0][\Xi,\, 0] = [H,\, 0][H,\, 0], \quad \Xi \geq 0, \quad H \geq 0$$

folgt

$$\Xi = H.$$

Beweis: Wegen

$$[Z,\, 0][Z,\, 0] = [ZZ - 0 \cdot 0,\, Z \cdot 0 + 0 \cdot Z] = [ZZ,\, 0]$$

ist nach voraussetzung

$$[\Xi\Xi,\, 0] = [HH,\, 0],$$

$$\Xi\Xi = HH.$$

Ist

$$\Xi > 0,$$

so folgt

$$HH = \Xi\Xi > 0,$$

$$H > 0,$$

also nach Satz 161

$$\Xi = H.$$

Ist

$$\Xi = 0,$$

so folgt

$$HH = \Xi\Xi = 0,$$

$$H = 0 = \Xi.$$

Satz 267:

$$[|\mathfrak{x}|,\, 0][|\mathfrak{x}|,\, 0] = \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}.$$

Beweis: Wird

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\, \Xi_2]$$

gesetzt, so ist

$$\begin{aligned}[|\mathfrak{x}|,\, 0][|\mathfrak{x}|,\, 0] = [|\mathfrak{x}||\mathfrak{x}|,\, 0] = [\Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2,\, 0]\\ = [\Xi_1\Xi_1 - \Xi_2(-\Xi_2),\, \Xi_1(-\Xi_2) + \Xi_2\Xi_1] = [\Xi_1,\, \Xi_2][\Xi_1,\, -\Xi_2] = \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}.\end{aligned}$$

Satz 268:

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}||\mathfrak{y}|.$$

Beweis: Nach Satz 267 und Satz 261 ist

$$\begin{aligned}[|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|,\, 0][|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|,\, 0] &= (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\overline{\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}}) = (\mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}})(\mathfrak{y}\overline{\mathfrak{y}})\\ &= ([|\mathfrak{x}|,\, 0][|\mathfrak{x}|,\, 0])([|\mathfrak{y}|,\, 0][|\mathfrak{y}|,\, 0])\\ &= ([|\mathfrak{x}|,\, 0][|\mathfrak{y}|,\, 0])([|\mathfrak{x}|,\, 0][|\mathfrak{y}|,\, 0])\\ &= [|\mathfrak{x}||\mathfrak{y}| - 0\cdot 0,\, |\mathfrak{x}|\cdot 0 + 0\cdot|\mathfrak{y}|][|\mathfrak{x}||\mathfrak{y}| - 0\cdot 0,\, |\mathfrak{x}|\cdot 0 + 0\cdot|\mathfrak{y}|]\\ &= [|\mathfrak{x}||\mathfrak{y}|,\, 0][|\mathfrak{x}||\mathfrak{y}|,\, 0],\end{aligned}$$

nach Satz 266 also

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}||\mathfrak{y}|.$$

Satz 269: *Ist*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right| = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{y}|}.$$

Beweis:

$$|\mathfrak{y}| > 0,$$

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x},$$

also nach Satz 268

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right||\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|,$$

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right| = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{y}|}.$$

Satz 270: *Aus*

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{e}$$

folgt

$$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| \geq 1.$$

Beweis: Ist

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1,\, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1,\, H_2],$$

so ist nach Satz 265

$$|\mathfrak{x}| \geq |\Xi_1| \geq \Xi_1,$$
$$|\mathfrak{y}| \geq |H_1| \geq H_1,$$

also

$$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| \geq \Xi_1 + H_1 = 1.$$

Satz 271:

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}|.$$

Beweis: 1) Ist

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{n},$$

so ist die linke Seite der Behauptung 0, also $\leq$ der rechten.

2) Ist

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

so ist, wegen

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}} = \mathfrak{e},$$

nach Satz 270

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}\right| + \left|\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}\right| \geq 1,$$

also nach Satz 269

$$\frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|} + \frac{|\mathfrak{y}|}{|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|} \geq 1,$$

$$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \left(\frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|} + \frac{|\mathfrak{y}|}{|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|}\right) \geq |\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|.$$

Satz 272:

$$|-\mathfrak{x}| = |\mathfrak{x}|.$$

Beweis:

$$(-\Xi_1)(-\Xi_1) + (-\Xi_2)(-\Xi_2) = \Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2.$$

Satz 273:

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| \geq \big||\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|\big|.$$

Beweis:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}),$$

also nach Satz 271

$$|\mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{y}| + |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|,$$
$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| \geq |\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|.$$

Hieraus folgt, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vertauscht werden,

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \geq |\mathfrak{y}| - |\mathfrak{x}|,$$

also nach Satz 272

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| = |-(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})| = |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \geq |\mathfrak{y}| - |\mathfrak{x}| = -(|\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|).$$

Aus

$$\Xi \geq H, \quad \Xi \geq -H$$

folgt aber, da $|H|$ entweder H oder $-H$ ist,

$$\Xi \geq |H|.$$

Daher ist

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| \geq \big||\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|\big|.$$

§ 8.

Summen und Produkte.

Satz 274: *Ist*

$$x < y,$$

so konnen die $m \leq x$ nicht auf die $n \leq y$ ein-eindeutig bezogen werden.

Unter Beziehen verstehe ich in diesem Paragraphen immer ein-eindeutiges Beziehen.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die die Behauptung bei allen $y > x$ wahr ist.

I) Ist

$$1 < y,$$

so kann $m = 1$ nicht auf die $n \leq y$ bezogen werden; denn entspricht dem $m = 1$ das $n = 1$, so bleibt kein m für $n = y$ übrig; ist $m = 1$ auf ein $n > 1$ bezogen, so bleibt kein m für $n = 1$ übrig.

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Es gehöre x zu $\mathfrak{M}$, und es sei

$$x + 1 < y.$$

Wenn eine Beziehung der $m \leq x + 1$ auf die $n \leq y$ vorliegt, so unterscheiden wir zwei Fälle.

α) Dem $m = x + 1$ entspricht $n = y$. Dann sind die $m \leq x$ auf die $n \leq y - 1$ bezogen; das geht nicht wegen

$$x < y - 1.$$

β) Dem $m = x + 1$ entspricht ein $n = n_0 < y$. Dann sei $m = m_0$ die dem $n = y$ entsprechende Zahl, also $m_0 < x + 1$. Man betrachte nun folgende abgeänderte Beziehung der $m \leq x + 1$ auf die $n \leq y$.

$$\begin{cases} \text{Ist } m \neq m_0,\ m \neq x+1, \text{ so gelte das Alte.} \\ m = m_0 \text{ entspreche } n = n_0. \\ m = x + 1 \text{ entspreche } n = y. \end{cases}$$

Dann haben wir eine Beziehung von der soeben in α) als unmöglich nachgewiesenen Art.

Also gehört $x + 1$ zu $\mathfrak{M}$, und die Behauptung ist bewiesen.

Da die Beweise der folgenden Sätze 275 bis 278 und 280 bis 286 nebst zugehörigen Definitionen für Summen und Produkte wörtlich dieselben wären, machen wir das, um lange Wiederholungen zu vermeiden, nur einmal und wählen ein neutrales Zeichen $\oplus$, welches durchweg $+$ oder durchweg $\cdot$ bedeuten soll. Das einstweilen neutrale Zeichen $\coprod$ wird später entsprechend in zwei Zeichen ($\sum$ bei $+$, $\prod$ bei $\cdot$) gespalten werden.

Unter definiert verstehe ich in dieser ganzen Entwicklung: als komplexe Zahl definiert.

Satz 275: *Es sei x fest, $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x$ definiert. Dann gibt es genau ein für $n \leq x$ definiertes*

$$\mathfrak{g}_x(n)$$

(ausführlicher geschrieben

$$\mathfrak{g}_{x,\mathfrak{f}}(n)$$

abgekürzt geschrieben

$$\mathfrak{g}(n))$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1),$$

$$\mathfrak{g}_x(n+1) = \mathfrak{g}_x(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) \quad \text{für} \quad n < x.$$

Beweis: 1) Zunächst zeigen wir, daß es höchstens ein solches $\mathfrak{g}_x(n)$ gibt.

Es mögen $\mathfrak{g}(n)$ und $\mathfrak{h}(n)$ die geforderten Eigenschaften haben. $\mathfrak{M}$ sei die aus den $n \leq x$ mit

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n)$$

und den $n > x$ bestehende Menge.

I)

$$\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1) = \mathfrak{h}(1);$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) n gehöre zu $\mathfrak{M}$. Dann ist

entweder

$$n < x, \quad \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n),$$

also

$$\mathfrak{g}(n+1) = \mathfrak{g}(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) = \mathfrak{h}(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) = \mathfrak{h}(n+1),$$

also $n+1$ zu $\mathfrak{M}$ gehörig;

oder

$$n \geq x,$$

also

$$n+1 > x$$

und $n+1$ auch zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Daher ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen: für jedes $n \leq x$ ist also

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n),$$

w. z. b. w.

2) Wir zeigen jetzt, daß es zu jedem x, wenn $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x$ definiert ist, ein passendes $\mathfrak{g}_x(n)$ gibt.

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die dies wahr ist, für die es also, wenn $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x$ definiert ist, nach 1) genau ein passendes $\mathfrak{g}_x(n)$ gibt.

I) Für $x = 1$ leistet, wenn $\mathfrak{f}(1)$ definiert ist.

$$\mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1)$$

das Gewünschte (da die zweite Forderung wegen der Unmöglichkeit von $n < 1$ nicht erhoben wird). 1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Es sei x zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Wenn $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert ist, ist es für $n \leq x$ definiert, also hier genau ein zugehöriges $\mathfrak{g}_x(n)$ vorhanden. Nun leistet

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n) = \begin{cases} \mathfrak{g}_x(n) \quad \text{für} \quad n \leq x, \\ \mathfrak{g}_x(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) \quad \text{für} \quad n = x+1 \end{cases}$$

das Gewünschte bei $x+1$. Denn erstens ist

$$\mathfrak{g}_{x+1}(1) = \mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1).$$

Zweitens gilt für

$$n < x$$

(wegen $n+1 \leq x$)

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_x(n+1) = \mathfrak{g}_x(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) = \mathfrak{g}_{x+1}(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1),$$

während für

$$n = x$$

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_x(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1) = \mathfrak{g}_{x+1}(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1)$$

ist; aus

$$n < x+1$$

folgt also jedenfalls

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_{x+1}(n) \oplus \mathfrak{f}(n+1).$$

Daher gehört $x+1$ zu $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{M}$ umfaßt alle positiven ganzen Zahlen.

Satz 276: *Wenn $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert ist, gilt für die zugehörigen $\mathfrak{g}_x(n)$ und $\mathfrak{g}_{x+1}(n)$*

$$\mathfrak{g}_{x+1}(x+1) = \mathfrak{g}_x(x) \oplus \mathfrak{f}(x+1).$$

Beweis: Das kam bei der Konstruktion in 2), II) des vorigen Beweises vor.

Definition 69: *Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x$ definiert, so ist*

$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{g}_x(x) \quad (= \mathfrak{g}_{x,\mathfrak{f}}(x)).$$

Wenn $\oplus$ die Bedeutung $+$ hat, schreibt man

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n);$$

wenn $\oplus$ die Bedeutung $\cdot$ hat, schreibt man

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n);$$

($\sum$ sprich: Summe; $\prod$ sprich: Produkt.)

Statt n kann in diesen Zeichen auch jeder andere Buchstabe stehen, der positive ganze Zahlen bezeichnet.

Satz 277: *Ist $\mathfrak{f}(1)$ definiert, so ist*

$$\coprod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{f}(1).$$

Beweis:

$$\mathfrak{g}_1(1) = \mathfrak{f}(1).$$

Satz 278: *Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert, so ist*

$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}(x+1).$$

Beweis: Satz 276.

Satz 279:
$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}[x,\ 0].$$

Beweis: $\mathfrak{x}$ sei fest, $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die dies gilt.

I) Nach Satz 277 ist
$$\sum_{n=1}^{1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}[1,\ 0].$$
1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) Wenn x zu $\mathfrak{M}$ gehört, so folgt aus Satz 278
$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{x} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}[x,\ 0] + \mathfrak{x}[1,\ 0] = \mathfrak{x}([x,\ 0] + [1,\ 0])$$
$$= \mathfrak{x}[x+1,\ 0].$$
$x+1$ gehört also zu $\mathfrak{M}$.

Daher gilt die Behauptung für alle x.

Satz 280: *Sind* $\mathfrak{f}(1)$ *und* $\mathfrak{f}(1+1)$ *definiert, so ist*
$$\coprod_{n=1}^{1+1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{f}(1) \oplus \mathfrak{f}(1+1).$$

Beweis: Nach Satz 278 und Satz 277 ist
$$\coprod_{n=1}^{1+1} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}(1+1) = \mathfrak{f}(1) \oplus \mathfrak{f}(1+1).$$

Satz 281: *Ist* $\mathfrak{f}(n)$ *für* $n \leq x+y$ *definiert, so ist*
$$\coprod_{n=1}^{x+y} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n).$$

Beweis: Bei festem x sei $\mathfrak{M}$ die Menge der y, für die dies gilt.

I) Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert, so ist nach Satz 278 und Satz 277
$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}(x+1) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(x+n).$$
1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) y gehöre zu $\mathfrak{M}$. Wenn $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+(y+1)$ definiert ist, so ist nach Satz 278 (auf $x+y$ statt x angewendet)
$$\coprod_{n=1}^{x+(y+1)} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{(x+y)+1} \mathfrak{f}(n) = \coprod_{n=1}^{x+y} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}\big((x+y)+1\big)$$
$$= \left(\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n)\right) \oplus \mathfrak{f}\big(x+(y+1)\big)$$
$$= \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \left(\coprod_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n) \oplus \mathfrak{f}\big(x+(y+1)\big)\right),$$
also nach Satz 278 (auf y statt x, $\mathfrak{f}(x+n)$ statt $\mathfrak{f}(n)$ angewendet)
$$= \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{y+1} \mathfrak{f}(x+n).$$

$y+1$ gehört also zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist bewiesen.

Satz 282: *Sind $\mathfrak{f}(n)$ und $\mathfrak{g}(n)$ für $n \leq x$ definiert, so ist*

$$\coprod_{n=1}^{x} \big(\mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{g}(n)\big) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n).$$

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die dies gilt.

I) Sind $\mathfrak{f}(1)$ und $\mathfrak{g}(1)$ definiert, so ist

$$\coprod_{n=1}^{1} \big(\mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{g}(n)\big) = \mathfrak{f}(1) \oplus \mathfrak{g}(1) = \coprod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{1} \mathfrak{g}(n).$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) x gehöre zu $\mathfrak{M}$. Sind $\mathfrak{f}(n)$ und $\mathfrak{g}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert, so ist, mit Rücksicht auf

$$(\mathfrak{x} \oplus \mathfrak{y}) \oplus (\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{u}) = \big((\mathfrak{x} \oplus \mathfrak{y}) \oplus \mathfrak{z}\big) \oplus \mathfrak{u} = \big(\mathfrak{z} \oplus (\mathfrak{x} \oplus \mathfrak{y})\big) \oplus \mathfrak{u}$$
$$= \big((\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{x}) \oplus \mathfrak{y}\big) \oplus \mathfrak{u} = (\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{x}) \oplus (\mathfrak{y} \oplus \mathfrak{u}) = (\mathfrak{x} \oplus \mathfrak{z}) \oplus (\mathfrak{y} \oplus \mathfrak{u}),$$

$$\coprod_{n=1}^{x+1} \big(\mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{g}(n)\big) = \coprod_{n=1}^{x} \big(\mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{g}(n)\big) \oplus \big(\mathfrak{f}(x+1) \oplus \mathfrak{g}(x+1)\big)$$
$$= \left(\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n)\right) \oplus \big(\mathfrak{f}(x+1) \oplus \mathfrak{g}(x+1)\big)$$
$$= \left(\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}(x+1)\right) \oplus \left(\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) \oplus \mathfrak{g}(x+1)\right)$$
$$= \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) \oplus \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n).$$

Also gehört $x+1$ zu $\mathfrak{M}$, und die Behauptung gilt stets.

Satz 283: *$s(n)$ beziehe die $n \leq x$ auf die $m \leq x$. $\mathfrak{f}(n)$ sei für $n \leq x$ definiert. Dann ist*

$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}\big(s(n)\big) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Beweis: Zur Abkürzung werde

$$\mathfrak{f}\big(s(n)\big) = \mathfrak{g}(n)$$

gesetzt.

$\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die die Behauptung

$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)$$

(bei allen zulässigen s und $\mathfrak{f}$) wahr ist.

I) Für

$$x = 1$$

ist

$$s(1) = 1,$$

also, wenn $\mathfrak{f}(1)$ definiert ist,

$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) x gehöre zu $\mathfrak{M}$. Es beziehe $s(n)$ die $n \leq x+1$ auf die $m \leq x+1$, und $\mathfrak{f}(n)$ sei für $n \leq x+1$ definiert.

1) Falls
$$s(x+1) = x+1,$$
bezieht $s(n)$ die $n \leq x$ auf die $m \leq x$. Alsdann ist
$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n),$$
$$\mathfrak{g}(x+1) = \mathfrak{f}(x+1),$$
also
$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) \oplus \mathfrak{g}(x+1) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \oplus \mathfrak{f}(x+1) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

2) Falls
$$s(x+1) < x+1, \quad s(1) = 1,$$
bezieht $s(n)$ die n mit $1+1 \leq n \leq x+1$ auf die m mit $1+1 \leq m \leq x+1$; also bezieht $s(1+n)-1$ die $n \leq x$ auf die $m \leq x$. Daher ist
$$\coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(1+n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}\big(s(1+n)\big) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}\Big(1 + \big(s(1+n)-1\big)\Big)$$
$$= \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(1+n),$$
also nach Satz 281
$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(1) \oplus \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(1+n) = \mathfrak{f}(1) \oplus \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(1+n) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

3) Falls
$$s(x+1) < x+1, \quad s(1) > 1,$$
werde
$$s(1) = a$$
gesetzt und b aus
$$1 \leq b \leq x+1, \quad s(b) = 1$$
bestimmt. Dann ist
$$a > 1, \quad b > 1.$$

α) Es sei
$$a < x+1.$$
Dann bezieht sowohl
$$s_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ a & \text{für } n = b, \\ s(n) & \text{für } 1 < n \leq x+1,\, n \neq b \end{cases}$$
als auch
$$s_2(n) = \begin{cases} a & \text{für } n = 1, \\ 1 & \text{für } n = a, \\ n & \text{für } 1 < n \leq x+1,\, n \neq a \end{cases}$$
die $n \leq x+1$ auf die $m \leq x+1$.

Nun ist
$$s(n) = s_2\big(s_1(n)\big) \quad \text{für} \quad n \leq x+1.$$

Denn durch $s_2\bigl(s_1(n)\bigr)$ geht über

$$1 \text{ via } 1 \text{ in } a = s(1),$$

$$b \text{ via } a \text{ in } 1 = s(b),$$

$$\text{jedes andere } n \leq x+1 \text{ via } s(n) \text{ in } s(n).$$

$s_1(n)$ läßt 1, und $s_2(n)$ läßt $x+1$ unverändert. Nach 2) und 1) ist also

$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\bigl(s(n)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\Bigl(s_2\bigl(s_1(n)\bigr)\Bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\bigl(s_2(n)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

β) Es sei

$$a = x+1, \quad b < x+1.$$

Dann bezieht

$$s_3(n) = \begin{cases} b & \text{für } n = 1, \\ 1 & \text{für } n = b, \\ n & \text{für } 1 < n \leq x+1,\ n \neq b \end{cases}$$

die $n \leq x+1$ auf die $m \leq x+1$. Ferner ist

$$s(n) = s_1\bigl(s_3(n)\bigr) \quad \text{für} \quad n \leq x+1.$$

Denn durch $s_1\bigl(s_3(n)\bigr)$ geht über

$$1 \text{ via } b \text{ in } a = s(1),$$

$$b \text{ via } 1 \text{ in } 1 = s(b),$$

$$\text{jedes andere } n \leq x+1 \text{ via } n \text{ in } s(n).$$

$s_3(n)$ läßt $x+1$ unverändert. Nach 1) und 2) ist also

$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\bigl(s(n)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\Bigl(s_1\bigl(s_3(n)\bigr)\Bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\bigl(s_1(n)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

γ) Es sei

$$a = b = x+1.$$

Ist $x = 1$, so ist

$$\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n)$$

trivial.

Ist $x > 1$, so bezieht

$$s_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ x+1 & \text{für } n = x+1, \\ s(n) & \text{für } 1 < n < x+1 \end{cases}$$

die $n \leq x+1$ auf die $m \leq x+1$. Folglich ist nach 1)

$$\begin{aligned}
\coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) \oplus \mathfrak{g}(x+1) &= \left(\mathfrak{g}(1) \oplus \coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1)\right) \oplus \mathfrak{g}(x+1) \\
&= \mathfrak{g}(1) \oplus \left(\coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1) \oplus \mathfrak{g}(x+1)\right) \\
&= \left(\mathfrak{g}(x+1) \oplus \coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1)\right) \oplus \mathfrak{g}(1) \\
&= \left(\mathfrak{f}\bigl(s(x+1)\bigr) \oplus \coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}\bigl(s(n+1)\bigr)\right) \oplus \mathfrak{f}\bigl(s(1)\bigr) \\
&= \left(\mathfrak{f}(1) \oplus \coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}\bigl(s_4(n+1)\bigr)\right) \oplus \mathfrak{f}(x+1) \\
&= \left(\mathfrak{f}\bigl(s_4(1)\bigr) \oplus \coprod_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}\bigl(s_4(n+1)\bigr)\right) \oplus \mathfrak{f}\bigl(s_4(x+1)\bigr) \\
&= \coprod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}\bigl(s_4(n)\bigr) \oplus \mathfrak{f}\bigl(s_4(x+1)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}\bigl(s_4(n)\bigr) = \coprod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).
\end{aligned}$$

Daher gehört $x+1$ zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist bewiesen.

In Definition 70 und Satz 284 bis Satz 286 bezeichnen ausnahmsweise lateinische Buchstaben ganze (nicht notwendig positive) Zahlen.

Definition 70: *Es sei*

$$y \leq x,$$

$\mathfrak{f}(n)$ *für*

$$y \leq n \leq x$$

definiert. Dann ist

$$\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big((n+y)-1\big).$$

Statt n kann auch irgend ein anderer Buchstabe stehen, der ganze Zahlen bezeichnet.

Man beachte

$$x+1>y;\ y \leq (n+y)-1 \leq x \text{ für } 1 \leq n \leq (x+1)-y;$$

ferner, daß für $y=1$ die Definition 70 (wie es sein muß) im Einklang mit Definition 69 steht.

Satz 284: *Es sei*

$$y \leq u < x;$$

$\mathfrak{f}(n)$ *sei für*

$$y \leq n \leq x$$

definiert. Dann ist

$$\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \prod_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \oplus \prod_{n=u+1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Beweis: Nach Definition 70 und Satz 281 ist

$$\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big((n+y)-1\big)$$

$$= \prod_{n=1}^{(u+1)-y} \mathfrak{f}\big((n+y)-1\big) \oplus \prod_{n=1}^{x-u} \mathfrak{f}\Bigg(\bigg(\Big(\big((u+1)-y\big)+n\Big)+y\bigg)-1\Bigg);$$

denn

$$\begin{aligned}\big((u+1)-y\big)+(x-u) &= \big(x+(-u)\big)+\big((u+1)+(-y)\big)\\ &= \Big(x+\big((-u)+(u+1)\big)\Big)+(-y) = (x+1)-y.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\Big(\big((u+1)-y\big)+n\Big)+y &= \big((u+1)-y\big)+(y+n)\\ &= \Big(\big((u+1)-y\big)+y\Big)+n = n+(u+1),\end{aligned}$$

also nach Definition 70

$$\begin{aligned}\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) &= \prod_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \oplus \prod_{n=1}^{(x+1)-(u+1)} \mathfrak{f}\Big(\big(n+(u+1)\big)-1\Big)\\ &= \prod_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \oplus \prod_{n=u+1}^{x} \mathfrak{f}(n).\end{aligned}$$

Satz 285: *Es sei*

$$y \leq x,$$

$\mathfrak{f}(n)$ *für*

$$y \leq n \leq x$$

definiert. Dann ist

$$\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \prod_{n=y+v}^{x+v} \mathfrak{f}(n-v).$$

Beweis: Nach Definition 70 ist die linke Seite der Behauptung

$$= \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big((n+y)-1\big),$$

die rechte (man beachte $y \leq n-v \leq x$ für $y+v \leq n \leq x+v$)

$$= \prod_{n=1}^{((x+v)+1)-(y+v)} \mathfrak{f}\Big(\big((n+(y+v))-1\big)-v\Big);$$

hierin ist

$$\begin{aligned} &\big((x+v)+1\big)-(y+v) = \big(1+(x+v)\big)+\big((-v)+(-y)\big) \\ &= \Big(1+\big((x+v)+(-v)\big)\Big)+(-y) = (1+x)-y = (x+1)-y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\Big(\big(n+(y+v)\big)-1\Big)-v = \big(n+(y+v)\big)-(1+v) = \big((n+y)+v\big)+\big(-v+(-1)\big) \\ &= \Big(\big((n+y)+v\big)+(-v)\Big)+(-1) = \Big((n+y)+\big(v+(-v)\big)\Big)-1 = (n+y)-1. \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 286: *Es sei*

$$y \leq x,$$

$\mathfrak{f}(n)$ *für*

$$y \leq n \leq x$$

definiert. $s(n)$ *beziehe die* n *mit* $y \leq n \leq x$ *auf die* m *mit* $y \leq m \leq x$*. Dann ist*

$$\prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}\big(s(n)\big) = \prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Beweis:

$$s_1(n) = s\big((n+y)-1\big)-(y-1)$$

bezieht die positiven $n \leq (x+1)-y$ auf die positiven $m \leq (x+1)-y$. Daher ist nach Satz 283

$$\begin{aligned} \prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}\big(s(n)\big) &= \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\Big(s\big((n+y)-1\big)\Big) = \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big(s_1(n)+(y-1)\big) \\ &= \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big(n+(y-1)\big) = \prod_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}\big((n+y)-1\big) = \prod_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n). \end{aligned}$$

Üblich ist statt

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)$$

auch die saloppe Schreibweise

$$\mathfrak{f}(y)+\mathfrak{f}(y+1)+\cdots+\mathfrak{f}(x)$$

(und entsprechend beim Produkt); aber völlig einwandfrei ist z. B.

$$\mathfrak{f}(1)+\mathfrak{f}(1+1)+\mathfrak{f}\big((1+1)+1\big)+\mathfrak{f}\Big(\big((1+1)+1\big)+1\Big),$$

mit anderen Worten

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$$

(was also nach Definition auf die alte Addition zurückführt und

$$\big((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}\big)+\mathfrak{d}$$

bedeutet). oder z. B.

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{k}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

Man kann auch ruhig z. B.

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$$

im Sinne von

$$\mathfrak{a}+(-\mathfrak{b})+\mathfrak{c}$$

schreiben, da jedenfalls

$$\mathfrak{f}(1)+\mathfrak{f}(1+1)+\mathfrak{f}\big((1+1)+1\big)$$

mit

$$\mathfrak{f}(1)=\mathfrak{a},\quad \mathfrak{f}(1+1)=-\mathfrak{b},\quad \mathfrak{f}\big((1+1)+1\big)=\mathfrak{c}$$

gemeint ist.

Nunmehr bedeuten kleine lateinische Buchstaben wiederum positive ganze Zahlen.

Satz 287: *Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x$ definiert, so gibt es ein Ξ, so daß*

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right| \leq \Xi,$$

$$\sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\,0]=[\Xi,\,0].$$

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die es (bei beliebigem $\mathfrak{f}(n)$) ein solches Ξ gibt.

I) Ist $\mathfrak{f}(1)$ definiert, so ist

$$\left|\sum_{n=1}^{1}\mathfrak{f}(n)\right| = |\mathfrak{f}(1)|,$$

$$\sum_{n=1}^{1}[|\mathfrak{f}(n)|,\,0]=[|\mathfrak{f}(1)|,\,0];$$

also leistet

$$\Xi=|\mathfrak{f}(1)|$$

bei $x=1$ das Gewünschte. 1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) x gehöre zu $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert, so gibt es ein Ξ_1 mit

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right| \leq \Xi_1,$$

$$\sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] = [\Xi_1,\ 0].$$

Nach Satz 278 und Satz 271 ist

$$\left|\sum_{n=1}^{x+1}\mathfrak{f}(n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n) + \mathfrak{f}(x+1)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right| + |\mathfrak{f}(x+1)|$$
$$\leq \Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|,$$

also, wenn

$$\Xi = \Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|$$

gesetzt wird,

$$\left|\sum_{n=1}^{x+1}\mathfrak{f}(n)\right| \leq \Xi.$$

Andererseits ist nach Satz 278

$$\sum_{n=1}^{x+1}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] = \sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] + [|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0]$$
$$= [\Xi_1,\ 0] + [|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0] = [\Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0+0] = [\Xi,\ 0].$$

Ξ leistet also das gewünschte bei $x+1$; also gehört $x+1$ zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist bewiesen.

Satz 288: *Ist* $\mathfrak{f}(n)$ *für* $n \leq x$ *definiert, so ist*

$$\left[\left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|,\ 0\right] = \prod_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0].$$

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge der x, für die dies gilt.

I) Ist $\mathfrak{f}(1)$ definiert, so ist

$$\left[\left|\prod_{n=1}^{1}\mathfrak{f}(n)\right|,\ 0\right] = [|\mathfrak{f}(1)|,\ 0] = \prod_{n=1}^{1}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0].$$

Also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) x gehöre zu $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{f}(n)$ für $n \leq x+1$ definiert, so ist nach Satz 278 und Satz 268

$$\prod_{n=1}^{x+1}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] = \prod_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0]\cdot[|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0]$$
$$= \left[\left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|,\ 0\right]\cdot[|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0]$$
$$= \left[\left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|\cdot|\mathfrak{f}(x+1)| - 0\cdot 0,\ \left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|\cdot 0 + 0\cdot|\mathfrak{f}(x+1)|\right]$$
$$= \left[\left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|\cdot|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0\right] = \left[\left|\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\cdot\mathfrak{f}(x+1)\right|,\ 0\right]$$
$$= \left[\left|\prod_{n=1}^{x+1}\mathfrak{f}(n)\right|,\ 0\right]$$

also $x+1$ zu $\mathfrak{M}$ gehörig, und der Satz ist bewiesen.

Satz 289: *Ist* $\mathfrak{f}(n)$ *für* $n \leq x$ *definiert, so ist*

$$\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

dann und nur dann, wenn ein $n \leq x$ *mit*

$$\mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

vorhanden ist.

Beweis: M sei die Menge der x, für die dies gilt.

I)

$$\prod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

ist mit

$$\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{n}$$

identisch. Also gehört 1 zu $\mathfrak{M}$.

II) x gehöre zu $\mathfrak{M}$.

$$\prod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

bedeutet

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \cdot \mathfrak{f}(x+1) = \mathfrak{n};$$

nach Satz 221 ist hierfür notwendig und hinreichend

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{f}(x+1) = \mathfrak{n},$$

also (da x zu $\mathfrak{M}$ gehört) notwendig und hinreichend

$$\mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n} \text{ für ein } n \leq x \text{ oder für } n = x+1.$$

$x + 1$ gehört also zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist bewiesen.

§ 9.

Potenzen.

In diesem Paragraphen mögen kleine lateinische Buchstaben ganze Zahlen bezeichnen.

Definition 71:

$$\mathfrak{x}^x = \begin{cases} \prod_{n=1}^{x} \mathfrak{x} & \textit{für } x > 0, \\ \mathfrak{e} & \textit{für } \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},\ x = 0, \\ \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}} & \textit{für } \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},\ x < 0. \end{cases}$$

(Sprich: $\mathfrak{x}$ hoch x.) Nicht definiert ist also $\mathfrak{x}^x$ lediglich für

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}, \quad x \leq 0.$$

Man beachte, daß für

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad x < 0.$$

nach der ersten Zeile der Definition 71 und Satz 289

$$\mathfrak{x}^{|x|} \neq \mathfrak{n}$$

ist, so daß dann $\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}}$, einen Sinn hat.

Satz 290: *Für*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$$

ist

$$\mathfrak{x}^x \neq \mathfrak{n}.$$

Beweis: Für $x > 0$ folgt dies aus Satz 289, für $x = 0$ aus der Definition und für $x < 0$ aus

$$\mathfrak{x}^x \mathfrak{x}^{|x|} \neq \mathfrak{n}.$$

Satz 291:

$$\mathfrak{x}^1 = \mathfrak{x}.$$

Beweis:

$$\mathfrak{x}^1 = \prod_{n=1}^{1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}.$$

Satz 292: *Es sei*

$$x > 0$$

oder

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

Vorbemerkung: Beide Seiten haben jedenfalls einen Sinn; denn für $x \leq 0$ ist

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Beweis: 1) Bei festen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sei $\mathfrak{M}$ die Menge der $x > 0$ mit

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

I) Nach Satz 291 ist

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^1 = \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^1\mathfrak{y}^1,$$

also 1 zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

II) Ist x zu $\mathfrak{M}$ gehörig, so ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{x+1} &= \prod_{n=1}^{x+1}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \prod_{n=1}^{x}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}^x\mathfrak{y}^x)(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}^x\mathfrak{x})(\mathfrak{y}^x\mathfrak{y}) \\ &= \left(\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}\right)\left(\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y}\right) = \prod_{n=1}^{x+1}\mathfrak{x}\cdot\prod_{n=1}^{x+1}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^{x+1}\mathfrak{y}^{x+1},\end{aligned}$$

also $x+1$ zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Für $x > 0$ ist also stets

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x\mathfrak{y}^x.$$

2) Es sei

$$x = 0, \quad \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{e} = \mathfrak{e}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^x\mathfrak{y}^x.$$

3) Es sei

$$x < 0, \quad \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Nach 1) ist

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{|x|} = \mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{y}^{|x|},$$

$$\frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{|x|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{y}^{|x|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}} \cdot \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{y}^{|x|}},$$

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x\mathfrak{y}^x.$$

Satz 293:

$$\mathfrak{e}^x = \mathfrak{e}.$$

Beweis: Nach Satz 292 ist

$$\mathfrak{e}^x\mathfrak{e} = \mathfrak{e} = (\mathfrak{e}\mathfrak{e})^x = \mathfrak{e}^x\mathfrak{e}^x,$$

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{e}^x\mathfrak{e}^x - \mathfrak{e}^x\mathfrak{e} = \mathfrak{e}^x(\mathfrak{e}^x - \mathfrak{e}),$$

also (nach Satz 290 und Satz 221)

$$\mathfrak{e}^x - \mathfrak{e} = \mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{e}^x = \mathfrak{e}.$$

Satz 294: *Es sei*

$$x > 0, \quad y > 0$$

oder

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

Beweis: 1) Es sei

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Dann ist nach Satz 281

$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \prod_{n=1}^{x}\mathfrak{x}\cdot\prod_{n=1}^{y}\mathfrak{x} = \prod_{n=1}^{x+y}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

2) Es sei
$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$$
und nicht zugleich
$$x > 0, \quad y > 0.$$
α) Es sei
$$x < 0, \quad y < 0.$$
Dann ist nach 1)
$$\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{x}^{|y|} = \mathfrak{x}^{|x|+|y|} = \mathfrak{x}^{|x+y|},$$
$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}} \cdot \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x+y|}} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
β) Es sei
$$x > 0, \quad y < 0.$$
Dann ist
$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^x\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^{|y|}}.$$
A) Für
$$x > |y|$$
ist nach 1)
$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^{|y|}\mathfrak{x}^{x-|y|}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \mathfrak{x}^{x-|y|} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
B) Für
$$x = |y|$$
ist
$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \mathfrak{e} = \mathfrak{x}^0 = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
C) Für
$$x < |y|$$
ist nach 1)
$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^x\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^{|y|-x}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|-x}} = \mathfrak{x}^{x-|y|} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
γ) Es sei
$$x < 0, \quad y > 0.$$
Dann ist nach β)
$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^y\mathfrak{x}^x = \mathfrak{x}^{y+x} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
δ) Es sei
$$x = 0.$$
Dann ist
$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{e}\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^{0+y} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$
ϵ) Es sei
$$x \neq 0, \quad y = 0.$$
Dann ist nach δ)
$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^y\mathfrak{x}^x = \mathfrak{x}^{y+x} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

Satz 295: *Für*
$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$$
ist
$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^y} = \mathfrak{x}^{x-y}.$$

Beweis: Nach Satz 294 ist

$$\mathfrak{x}^{x-y}\mathfrak{x}^{y} = \mathfrak{x}^{(x-y)+y} = \mathfrak{x}^{x};$$

nach Satz 290 ist

$$\mathfrak{x}^{y} \neq \mathfrak{n},$$

also

$$\frac{\mathfrak{x}^{x}}{\mathfrak{x}^{y}} = \mathfrak{x}^{x-y}.$$

Satz 296: *Für*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$$

ist

$$\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{x}} = \mathfrak{x}^{-x}.$$

Beweis: Nach Satz 295 ist

$$\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{x}} = \frac{\mathfrak{x}^{0}}{\mathfrak{x}^{x}} = \mathfrak{x}^{0-x} = \mathfrak{x}^{-x}.$$

Satz 297: *Es sei*

$$x > 0, \quad y > 0$$

oder

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y} = \mathfrak{x}^{xy}.$$

Beweis: 1) Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Dann ist nach Satz 289

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y} = (\mathfrak{n}^{x})^{y} = \mathfrak{n}^{y} = \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^{xy} = \mathfrak{x}^{xy}.$$

2) Es sei

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}.$$

a) Bei festen $\mathfrak{x}$, x sei $\mathfrak{M}$ die Menge der $y > 0$ mit

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y} = \mathfrak{x}^{xy}.$$

I)

$$(\mathfrak{x}^{x})^{1} = \mathfrak{x}^{x} = \mathfrak{x}^{x \cdot 1};$$

1 gehört also zu $\mathfrak{M}$.

II) y gehöre zu $\mathfrak{M}$. Dann ist nach Satz 294

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y+1} = (\mathfrak{x}^{x})^{y}\,(\mathfrak{x}^{x})^{1} = \mathfrak{x}^{xy}\mathfrak{x}^{x} = \mathfrak{x}^{xy+x} = \mathfrak{x}^{x(y+1)},$$

also $y + 1$ zu $\mathfrak{M}$ gehörig.

Für $y > 0$ ist also die Behauptung wahr.

b) Es sei

$$y = 0.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y} = \mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{xy}.$$

c) Es sei

$$y < 0.$$

Dann ist nach a)

$$(\mathfrak{x}^{x})^{|y|} = \mathfrak{x}^{x|y|},$$

also nach Satz 296 und a)

$$(\mathfrak{x}^{x})^{y} = \frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}^{x})^{-y}} = \frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}^{x})^{|y|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{x|y|}} = \mathfrak{x}^{-(x|y|)} = \mathfrak{x}^{xy}.$$

§ 10.

Einordnung der reellen Zahlen.

Satz 298:

$$[\Xi + H,\ 0] = [\Xi,\ 0] + [H,\ 0];$$

$$[\Xi - H,\ 0] = [\Xi,\ 0] - [H,\ 0];$$

$$[\Xi H,\ 0] = [\Xi,\ 0][H,\ 0];$$

$$\left[\frac{\Xi}{H},\ 0\right] = \frac{[\Xi,\ 0]}{[H,\ 0]}, \quad \textit{falls} \quad H \neq 0;$$

$$[-\Xi,\ 0] = -[\Xi,\ 0];$$

$$|[\Xi,\ 0]| = |\Xi|.$$

Beweis: 1)

$$[\Xi,\ 0] + [H,\ 0] = [\Xi + H,\ 0 + 0] = [\Xi + H,\ 0].$$

2)

$$[\Xi,\ 0] - [H,\ 0] = [\Xi - H,\ 0 - 0] = [\Xi - H,\ 0].$$

3)

$$[\Xi,\ 0][H,\ 0] = [\Xi H - 0 \cdot 0,\ \Xi \cdot 0 + 0 \cdot H] = [\Xi H,\ 0].$$

4) Nach 3) ist, falls $H \neq 0$,

$$[H,\ 0]\left[\frac{\Xi}{H},\ 0\right] = \left[H\frac{\Xi}{H},\ 0\right] = [\Xi,\ 0],$$

$$\frac{[\Xi,\ 0]}{[H,\ 0]} = \left[\frac{\Xi}{H},\ 0\right].$$

5)

$$-[\Xi,\ 0] = [-\Xi,\ -0] = [-\Xi,\ 0].$$

6)

$$|\Xi| = \sqrt{|\Xi||\Xi|} = \sqrt{\Xi\Xi} = \sqrt{\Xi\Xi + 0 \cdot 0} = |[\Xi,\ 0]|.$$

Satz 299: *Die komplexen Zahlen der Form* $[x,\ 0]$ *genügen den fünf Axiomen der natürlichen Zahlen, wenn* $[1,\ 0]$ *an Stelle von* 1 *genommen wird und*

$$[x,\ 0]' = [x',\ 0]$$

gesetzt wird.

Beweis: $[\mathfrak{Z}]$ sei die Menge der $[x,\ 0]$.

1) $[1,\ 0]$ gehört zu $[\mathfrak{Z}]$.

2) Mit $[x,\ 0]$ ist $[x,\ 0]'$ in $[\mathfrak{Z}]$ vorhanden.

3) Stets ist

$$x' \neq 1,$$

also

$$[x', 0] \neq [1, 0],$$

$$[x, 0]' \neq [1, 0].$$

4) Aus

$$[x, 0]' = [y, 0]'$$

folgt

$$[x', 0] = [y', 0],$$

$$x' = y',$$

$$x = y,$$

$$[x, 0] = [y, 0].$$

5) Eine Menge $[\mathfrak{M}]$ von Zahlen aus $[\mathfrak{Z}]$ habe die Eigenschaften:
I) $[1, 0]$ gehört zu $[\mathfrak{M}]$.
II) Falls $[x, 0]$ zu $[\mathfrak{M}]$ gehört, so gehört $[x, 0]'$ zu $[\mathfrak{M}]$.
Dann bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der x, für die $[x, 0]$ zu $[\mathfrak{M}]$ gehört. Alsdann ist 1 zu $\mathfrak{M}$ gehörig und mit jedem x von $\mathfrak{M}$ auch x' zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Also gehört jede positive ganze Zahl x zu $\mathfrak{M}$, also jedes $[x, 0]$ zu $[\mathfrak{M}]$.

Da Summe, Differenz, Produkt und (wofern vorhanden) Quotient zweier $[\Xi, 0]$ nach Satz 298 den alten Begriffen entsprechen, desgleichen die Zeichen $-[\Xi, 0]$ und $|[\Xi, 0]|$; da man

$$[\Xi, 0] > [H, 0] \quad \text{für} \quad \Xi > H,$$

$$[\Xi, 0] < [H, 0] \quad \text{für} \quad \Xi < H$$

definieren kann, so haben also die komplexen Zahlen $[\Xi, 0]$ alle Eigenschaften, die wir in Kapitel 4 für reelle Zahlen bewiesen haben, und insbesondere die Zahlen $[x, 0]$ alle bewiesenen Eigenschaften der positiven ganzen Zahlen.

Daher werfen wir die reellen Zahlen weg, ersetzen sie durch die entsprechenden komplexen Zahlen $[\Xi\ 0]$ und brauchen nur von komplexen Zahlen zu reden. (Die reellen Zahlen verbleiben aber paarweise im Begriff der komplexen Zahl.)

Definition 72: (Das freigewordene Zeichen) Ξ *bezeichnet die komplexe Zahl* $[\Xi, 0]$*, auf die auch das Wort reelle Zahl übergeht. Ebenso heißt jetzt* $[\Xi, 0]$ *bei ganzem* Ξ *ganze Zahl, bei rationalem* Ξ *rationale Zahl. bei irrationalem* Ξ *irrationale Zahl, bei positivem* Ξ *positive Zahl, bei negativem* Ξ *negative Zahl.*

Also schreiben wir z. B. 0 statt $\mathfrak{n}$, 1 statt $\mathfrak{e}$.

Nunmehr können wir die komplexen Zahlen mit kleinen oder großen Buchstaben beliebiger Alphabete (auch promiscue) bezeichnen. Für die folgende spezielle Zahl ist aber ein kleiner lateinischer Buchstabe üblich auf Grund der

Definition 73:

$$i = [0, 1].$$

Satz 300:

$$ii = -1.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} ii = [0, 1][0, 1] &= [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0] \\ &= [-1, 0] = -1. \end{aligned}$$

Satz 301: *Für reelle* u_1, u_2 *ist*

$$u_1 + u_2 i = [u_1, u_2].$$

Zu jeder komplexen Zahl x gibt es also genau ein Paar reeller Zahlen u_1, u_2 mit

$$x = u_1 + u_2 i.$$

Beweis: Für reelle u_1, u_2 ist

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 i = [u_1,\, 0] + [u_2,\, 0][0,\, 1] &= [u_1,\, 0] + [u_2 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\, u_2 \cdot 1 + 0 \cdot 0] \\ &= [u_1,\, 0] + [0,\, u_2] = [u_1,\, u_2]. \end{aligned}$$

Durch Satz 301 ist das Zeichen [ ] unnötig geworden; die komplexen Zahlen sind eben die Zahlen $u_1 + u_2 i$, wo u_1 und u_2 reell sind; gleichen bzw. verschiedenen Paaren u_1, u_2 entsprechen gleiche bzw. verschiedene Zahlen, und Summe, Differenz, Produkt zweier komplexer Zahlen $u_1 + u_2 i$, $v_1 + v_2 i$ (wo u_1, u_2, v_1, v_2 reell sind) bildet man nach den Formeln

$$(u_1 + u_2 i) + (v_1 + v_2 i) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) i,$$

$$(u_1 + u_2 i) - (v_1 + v_2 i) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) i,$$

$$(u_1 + u_2 i)(v_1 + v_2 i) = (u_1 v_1 - u_2 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) i.$$

Man braucht sich nicht einmal diese Formeln zu merken, sondern nur, daß die Gesetze der reellen Zahlen erhalten bleiben und Satz 300 gilt; danach rechnet man einfach so:

$$(u_1 + u_2 i) + (v_1 + v_2 i) = (u_1 + v_1) + (u_2 i + v_2 i) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) i,$$

$$(u_1 + u_2 i) - (v_1 + v_2 i) = (u_1 - v_1) + (u_2 i - v_2 i) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) i,$$

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 i)(v_1 + v_2 i) &= (u_1 + u_2 i) v_1 + (u_1 + u_2 i) v_2 i = \\ &= u_1 v_1 + u_2 i v_1 + u_1 v_2 i + u_2 i v_2 i \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_1 i + u_1 v_2 i + u_2 v_2 i i \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_1 i + u_1 v_2 i + u_2 v_2 (-1) \\ &= (u_1 v_1 - u_2 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) i. \end{aligned}$$

Was die Division betrift, so ergibt die Rechnung, wenn v_1 und v_2 nicht beide 0 sind,

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + u_2 i}{v_1 + v_2 i} &= \frac{(u_1 + u_2 i)(v_1 - v_2 i)}{(v_1 + v_2 i)(v_1 - v_2 i)} = \frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2) + \big(-(u_1 v_2) + u_2 v_1\big) i}{(v_1 v_1 + v_2 v_2) + \big(-(v_1 v_2) + v_2 v_1\big) i} \\ &= \frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2) + \big(-(u_1 v_2) + u_2 v_1\big) i}{v_1 v_1 + v_2 v_2} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{v_1 v_1 + v_2 v_2} + \frac{-(u_1 v_2) + u_2 v_1}{v_1 v_1 + v_2 v_2} i \end{aligned}$$

als kanonische Darstellung im Sinne des Satzes 301.