

Sleutels tot twee intimiteiten: Mathesis en Mystiek

AFSCHEIDSCOLLEGE DOOR HENK BARENDREGT

afsc
heids-
redo

change perspective

Radboud Universiteit



**AFSCHEIDSCOLLEGE
HENK BARENDREGT**



Henk Barendregt bespreekt zijn twee belangrijkste wetenschappelijke interesses: wiskunde en meditatiefenomenen.

Wiskundige uitspraken zijn gebaseerd op bewijzen en berekeningen. Voor deze was tot voor kort een intuïtief oordeel nodig om in te zien dat ze correct en toepasbaar zijn. Na een zoektocht van vele generaties logici en wiskundigen is het nu gelukt dit oordeel te objectiveren en machinaal op correctheid te testen. Hoewel dit de wiskundige intuïtie overbodig lijkt te maken, blijft deze een belangrijke rol spelen bij het vinden van nieuwe resultaten.

De menselijke geest is in staat procedures aan te leren via mentale programma's. Ook is er de mogelijkheid om bepaalde reacties (tijdelijk) af te leren via metabewustzijn (mindfulness). Daarmee wordt een verhoogde resolutie van waarneming mogelijk, die laat zien dat onze acties totaal gedetermineerd zijn. We willen dit niet erkennen en verbergen het met onheilzame beslissingsmechanismen die aanvoelen als vrije wil. Door het gedetermineerd zijn te aanvaarden, wordt de keuzeruimte van ons gedrag wezenlijk vergroot. Er is immers geen reden meer om het determinisme symptomatisch te verbloemen.

De menselijke geest is in staat procedures aan te leren via mentale programma's. Ook is er de mogelijkheid om bepaalde reacties (tijdelijk) af te leren via metabewustzijn (mindfulness). Daarmee wordt een verhoogde resolutie van waarneming mogelijk, die laat zien dat onze acties totaal gedetermineerd zijn. We willen dit niet erkennen en verbergen het met onheilzame beslissingsmechanismen die aanvoelen als vrije wil. Door het gedetermineerd zijn te aanvaarden, wordt de keuzeruimte van ons gedrag wezenlijk vergroot. Er is immers geen reden meer om het determinisme symptomatisch te verbloemen.

Henk Barendregt, Amsterdam 1947, studeerde Mathematische logica bij Dirk van Dalen aan de Universiteit Utrecht, waar hij promoveerde op de λ -calculus, een taal om wiskundige berekeningen en bewijzen compact op te schrijven.

Van 1986 tot 2015 was hij hoogleraar Grondslagen van de wiskunde en informatica aan de Radboud Universiteit.

SLEUTELS TOT TWEE INTIMITEITEN: MATHESIS EN MYSTIEK

Opmaak en productie:

Henk Barendregt en Radboud Universiteit, Facilitair Bedrijf, Print en Druk

Fotografie omslag: Lidia van der Vegt

© Henk Barendregt, Nijmegen, 2015 Niets uit deze uitgave mag worden vermenigvuldigd en/of openbaar worden gemaakt middels druk, fotokopie, microfilm, geluidsband of op welke andere wijze dan ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de copyrighthouder.

Sleutels tot twee intimiteiten: Mathesis en Mystiek

Rede uitgesproken bij het afscheid als hoogleraar Grondslagen van de wiskunde en informatica aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit op donderdag 1 oktober 2015

door Henk Barendregt



Van links naar rechts en van boven naar beneden: Euclides, Boeddha, representatie van de leegte, formeel bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, β -endorfine.

Mijnheer de rector magnificus, dames en heren,
zeer geachte toehoorders,

Omdat *partir est mourir un peu*, speelden wij van Igor Strawinsky het Introitus In Memoriam T.S. Eliot.

De onderwerpen mathesis en mystiek komen voort uit mijn voornaamste wetenschappelijke interesses: wiskunde en meditatievervalsingen. We zullen twee soorten sleutels tot deze onderwerpen bespreken: de persoonlijke, van binnenuit beleefd, en de bovenpersoonlijke, beschreven als een objectief natuurlijk proces. De twee soorten sleutels zijn er voor beide onderwerpen.

In de roman *Dr. Faustus* van Thomas Mann spreken twee vrienden over menselijke emoties en het ervaren van het goddelijke in de muziek. “Dat moet je liefhebben,” zei de eerste. “Houdt jij de liefde dan voor de sterkste emotie?” vroeg de andere. “Ken je soms een sterkere?” stelde de eerste als tegenvraag. “Ja, de interesse.”¹ Deze passage geeft aan dat liefde en interesse wedijveren welke van beide tot de sterkste emoties gerekend kan worden. Dit wordt door romantici wel beschreven als de tegenstelling tussen hart en verstand of ook tussen lichaam en geest. Maar voor de meeste emoties is een gecoördineerde samenwerking tussen lichaam en geest van belang.

De zuiverste vorm van verstand richt zich op de mathesis, de wiskunde. De hoogste vorm van liefde wordt wel gezien als de mystieke eenheid met God. Maar om de mystieke ervaring te verklaren is de hypothese van het bestaan van het opgevoerd niet noodzakelijk. Men kan deze ook opvatten, zoals in de boeddhistische psychologie, als een bewustzijnstoestand met hoge concentratie.

Eerst zijn er de persoonlijke sleutels tot de twee onderwerpen. De *ervaring* van de wiskundige waarheid verloopt via de mentale activiteit van het bewijzen. Hiervoor zijn nieuwsgierigheid en studie noodzakelijk. De mystieke ervaring bereikt men via de beoefening van de meditatie, gebruik makend van de vergelijkbare hulpmiddelen motivatie en inzet. Voor zowel het ervaren van wiskunde als mystiek kan men slechts met wilskracht de juiste condities scheppen, de rest is—zou je kunnen zeggen—goddelijke genade. Zo spreekt men er althans over in vele tradities van de mystiek. Maar dit taalgebruik is ook in zwang bij wiskundigen. Zo sprak de Poolse logicus Andrzej Mostowski met bewondering over zijn Amerikaanse collega Robert Solovay: “Hij moet een directe telefoonlijn naar God hebben.” Tot zover de persoonlijke varianten van de sleutels tot genoemde onderwerpen.

Dan zijn er de bovenpersoonlijke sleutels, waardoor beide onderwerpen als het ware ontpersoonlijkt worden. Maar ik meen dat de onderwerpen juist aan diepgang winnen door de combinatie van de persoonlijke en bovenpersoonlijke aspecten.

¹“Man soll sie lieben.” “Hältst du die Liebe für den stärksten Affekt?” fragte er. “Weisst du einen stärkeren?” “Ja, das Interesse.”

1. Twee sleutels tot de wiskunde

1.1. Persoonlijk

In zijn roman *De man zonder eigenschappen*, schreef Robert Musil het volgende over de hoofdpersoon, een wiskundige, die over zijn vak contempleert:

De precisie, kracht en zekerheid van dit denken, dat in het leven zijn weerga niet kent, vervulde hem bijna met weemoed².

We geven een voorbeeld uit het wiskundige denken.

1. DEFINITIE. Een positief geheel getal p heet een *priemgetal* indien $p > 1$ is en p heeft alleen 1 en zichzelf als deler.

Zo zijn van de getallen onder de tien 2, 3, 5 en 7 priemgetallen; geen priemgetallen zijn 1 (per definitie), 4, 6, 8 en 9. We willen niet dat 1 een priemgetal is om een esthetische reden, welke volgt uit het volgende feit, dat we noemen zonder bewijs.

2. STELLING. *Ieder positief geheel getal is te schrijven als product van een uniek rijtje (afgezien van de volgorde en mogelijk met duplicaten of leeg³) priemgetallen (ontbinding in priemfactoren). Daardoor heeft ieder getal >1 een priemfactor.*

Zo is $12 = 2 \times 2 \times 3$. Als 1 nu als priemgetal beschouwd zou worden, dan gold ook $12 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$, waarmee de ontbinding in priemfactoren niet uniek is.

De oude Grieken kenden de priemgetallen. Zij konden ze niet alleen opsommen, maar er ook vragen over stellen en deze beantwoorden. Van de rij priemgetallen:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots$$

vroeg men zich af of deze ooit ophoudt of oneindig lang door gaat.

3. STELLING (Euclides). *Er zijn oneindig veel priemgetallen.*

BEWIJS. Laat p_1, \dots, p_n een eindig rijtje priemgetallen zijn. Beschouw dan

$$P = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n.$$

Laat q een priemfactor zijn van $P+1$. Nu deelt $p_1 > 1$ het getal P , dus niet $P+1$. En omdat q per definitie $P+1$ wél deelt, geldt $q \neq p_1$. Evenzo $q \neq p_2, \dots, q \neq p_n$. Daarmee is q een priemgetal dat niet in het oorspronkelijke rijtje voorkomt. Ieder eindig rijtje priemgetallen kan dus uitgebreid worden met een nieuw exemplaar. Daarom zijn er oneindig veel priemgetallen. QED

²Die Genauigkeit, Kraft und Sicherheit dieses Denkens, die nirgends im Leben ihresgleichen hat, erfüllte ihm fast mit Schwermut. R. Musil: *Der Mann ohne Eigenschaften*. Nederlandse vertaling: Ingeborg Lesener.

³Het getal 1 kan beschouwd worden als het product van het lege rijtje.

Een kleine variant van dit bewijs laat zien, dat er voor ieder getal n een priemgetal $>n$ gevonden kan worden dat hoogstens $n! + 1 = (1 \times 2 \times \dots \times n) + 1$ is. In de voor de wiskunde zeer rijke 19-de eeuw is zelfs bewezen dat het eerste priemgetal groter dan n altijd ten hoogste $2n$ is.⁴

We hebben het niet in de hand wanneer inzicht komt. De Franse wiskundige Poincaré schreef⁵ dat hij het ooit opgaf een oplossing voor een bepaald probleem te vinden, nadat hij daar lange tijd naar gezocht had; hij moest in militaire dienst. Na zijn diensttijd stapte hij op een goede dag in een tram. Toen hij de trede betrad zag hij opeens de oplossing van zijn probleem, dat tot hem kwam via directe intuïtie. Deze moest nog wel rationeel geverifieerd worden; het bleek te kloppen. De intuïtie kwam volgens Poincaré uit zijn onderbewuste. Later voegde zijn vak- en landgenoot Hadamard [1945] daaraan toe dat dit onderbewuste hierbij waarschijnlijk parallelle verwerking benut.

Hoewel wiskunde beschouwd wordt als de meest exacte van de wetenschappen, berust het uiteindelijke oordeel over de juistheid van een bewering geheel op ‘innerlijk schouwen’. Ondanks het redeneren en rekenen, zoals in bovenstaand bewijs, heeft men toch dat innerlijk schouwen nodig, om correctheid van een redenering en toepasbaarheid van een berekening in te zien. Dit gold althans tot en met de 20-ste eeuw. Hierin begint nu langzaam verandering te komen.

1.2. Bovenpersoonlijk

Voor de bovenpersoonlijke sleutels tot de wiskunde zijn twee ideeën van de Griekse filosoof Aristoteles van belang. Zijn eerste bijdrage was de volgende beschrijving van de *axiomatische methode* voor de wiskunde. Aan de ene kant zijn er wiskundige *objecten* (ook wel *begrippen* genoemd omdat deze vooral bestaan binnen ons denken), bijvoorbeeld getallen zoals 2 , $\frac{3}{4}$ en $\sqrt{5}$, of meetkundige figuren zoals driehoeken, ellipsen en piramides. Aan de andere kant zijn er *eigenschappen* van die objecten. Het is de moeite waard om uit te vinden wat de geldige eigenschappen, *stellingen*, zijn van een gegeven object of klasse van objecten. Hoe komt men nu

⁴De stelling van Euclides over de oneindigheid van de verzameling priemgetallen leidt meteen tot andere vragen. Een *priemtweeling* is een paar priemgetallen $(p, p+2)$ die twee verschillen. Zo zijn $(3,5)$ en ook $(5,7)$ priemtweelingen, maar het paar $(7,9)$ is dat niet. Een nog onbeantwoorde vraag is of er oneindig veel priemtweelingen bestaan. Deze eenvoudige vraag geeft aanleiding tot complexe wiskunde. Indien men van twee priemgetallen eist dat ze maximaal 600 mogen verschillen, dan zijn er wel oneindig veel van zulke paren, J. Maynard [2013](arxiv.org/abs/1311.4600), waarbij het getal 600 een verbetering is van 70 miljoen, eerder gevonden door Y. Zhang. Het resultaat lijkt ondertussen verbeterd te zijn in een gemeenschappelijke project Polymath8 (arxiv.org/abs/1409.8361) tot 246 als maximaal verschil. Daarmee is men nog niet aangeland bij het verschil 2 voor de priemtweelingen; de gebruikte methoden kunnen daar waarschijnlijk niet komen.

⁵Poincaré [1908].

tot wiskundige objecten en stellingen daarover? Objecten krijg je uit reeds eerder gevonden objecten door middel van een *definitie*. Stellingen krijg je uit reeds eerder gevonden stellingen door middel van een *bewijs*. Om niet in een oneindige terugval te geraken, moet er uitgegaan worden van *primitieve begrippen*, welke niet nader gedefinieerd hoeven te worden. Evenzo zijn er *axioma's*, stellingen die niet bewezen hoeven te worden. Uitgaande van de primitieve begrippen en axioma's kan men door definiëren en bewijzen een wiskundige theorie ontwikkelen⁶.

Het bewijzen is gebaseerd op intuïtief redeneren. Een tweede belangrijke bijdrage van Aristoteles voor de grondslagen van de wiskunde was zijn aanzet om dat redeneren in kaart te brengen. Deze onderneming werd pas voltooid door Frege in [1879]⁷, zo'n 2300 jaar later. Vanaf dat moment lagen bewijzen en daarmee de gevolgen van een axiomatisch systeem geheel vast: een bewijs is een rij stellingen, welke gegarandeerd zijn door de axioma's of volgen uit eerdere uitspraken op grond van de regels van de logica.

Op deze manier is het mogelijk bewijzen geheel formeel op te schrijven en is het eenvoudig om de geldigheid ervan objectief vast te stellen: stap voor stap. Frege [1893, 1903] begon daarna een (bescheiden) deel van de rekenkunde te formaliseren. Helaas vond de logicus Bertrand Russell dat er een contradictie afgeleid kon worden uit het door Frege gebruikte axioma systeem, waardoor deze laatste voorstelde zijn werk in te trekken⁸. Daarna werkte Russell samen met de wiskundige Whitehead aan een formalisatie van een deel van de wiskunde (waaronder de rekenkunde), en wel binnen een veilig geacht axioma systeem. Zo resulteerde van de hand van deze auteurs het eerste deel van hun monumentale *Principia Mathematica*, Whitehead and Russell [1910]. Dit werk had echter als nadeel dat het vrijwel onleesbaar was⁹. Als dat zo is, wie verifieert dan hun formele bewijzen?

Deze vraag werd beantwoord door de Nederlandse wiskundige N.G. de Bruijn [1970], die aangaf hoe je door een computer een formalisatie efficiënt kon laten verifiëren. Het benodigde programma is daarbij zeer klein, in essentie een goede beschrijving van de regels van de logica, welke De Bruijn op een handigere manier had weergegeven dan Frege. De meeste wiskundigen hielden zich echter verre van het formaliseren: het was moeizaam, onbegrijpelijk voor mensen, en de geveri-

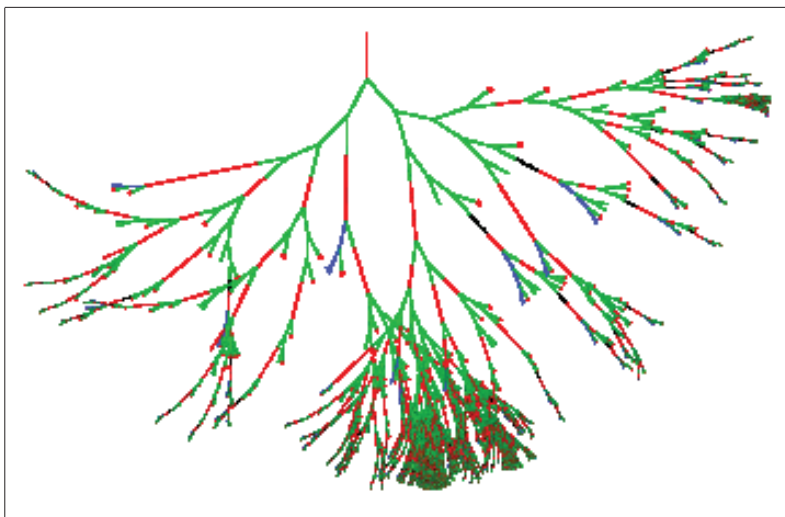
⁶Over de axiomatische methode dacht men in de Griekse oudheid als volgt: primitieve begrippen zijn zo duidelijk, dat ze geen definitie behoeven; evenzo vond men de axioma's zo wáár, dat er geen bewijs voor nodig was. Deze zienswijze is ruim 2000 jaar later verbeterd door Hilbert, die een elegante interpretatie van de axiomatische methode gaf. Hij beschouwde de axioma's als een *impliciete definitie* van de primitieve begrippen. Het kon hem niet schelen wat het wezen van een punt en een lijn is, als het maar zo is dat er precies één lijn gaat door twee verschillende punten (één van de axioma's van de Euclidische meetkunde).

⁷Gödel toonde in 1930 aan dat Frege daar inderdaad in geslaagd was.

⁸Zijn uitgever wilde daar echter niets van weten en het werk werd toch gepubliceerd.

⁹*Principia Mathematica* was bovendien minder precies geformuleerd dan het werk van Frege.

fieerde stellingen waren niet geavanceerd¹⁰. Een formele versie het bewijs van de stelling dat er oneindig veel priemgetallen bestaan, wordt weergegeven als ‘boom’ met circa 71.000 knopen¹¹ in Fig. 1.



Figuur 1: Formeel bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. (Formalisatie: Freek Wiedijk; afbeelding: Joerg Endrullis.)

Om tot een grotere diepgang te komen in de formele wiskunde waren nieuwe ideeën nodig. Die kwamen uit onverwachte hoeken: (i) gebruikmaking van computeralgebrasystemen; (ii) het bewijs van de onvolledigheidsstelling van Gödel.

Ad (i). Computeralgebrasystemen zijn groot, zeer krachtig, maar net niet altijd betrouwbaar. Door ze in te zetten met sceptis, vergelijkbaar met de rol van de intuïtie welke later geverifieerd wordt, kunnen volledig betrouwbare resultaten verkregen worden. Dit werd voorgesteld in een artikel met Arjeh Cohen [2001].

¹⁰Zo was het in de begin van de jaren 90 uit de vorige eeuw nog bewerkelijk om de volgende uitspraken formeel te bewijzen:

- 17 is een priemgetal;
- $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ geldt voor alle reële getallen;
- $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ is een continu differentieerbare functie in $x \in \mathbb{R}$.

¹¹Dit lijkt veel: het intuïtieve bewijs is kort en het formele is lang. We moeten daarbij bedenken dat voor het realiseren van een eenvoudig uit te voeren handeling, zoals het aanraken van het topje van onze neus met de wijsvinger, zeer veel neuronen en synapsen gebruikt zullen worden.

Deze techniek heeft uiteindelijk geleid tot de certificatie van priemgetallen van honderden cijfers¹².

Ad (ii). Als een van de weinigen die *Principia Mathematica* wél doorgrond had toonde Gödel [1931] aan dat er uitspraken zijn, welke noch bewezen noch weerlegd kunnen worden¹³. Deze zogenaamde onvolledigheidsstelling lijkt een pleidooi tegen het formaliseren te zijn. De betekenis is echter dat de axiomatische methode zijn beperking heeft, onafhankelijk ervan of de bewijzen formeel of intuïtief zijn¹⁴. Gödel toonde dit aan door wiskundige concepten en eigenschappen tot getal te coderen, waardoor de rekenkunde indirect uitspraken kan doen over zichzelf. Het toepassen van de wetten van de logica blijkt dan een berekenbare operatie te zijn, welke eveneens binnen de axiomatische rekenkunde gerepresenteerd kan worden. Deze zogenaamde ‘reflectie’ is in een artikel met Erik Barendsen [2002] benut om formele bewijzen te genereren op grond van de syntactische eigenschappen van de uitspraken¹⁵.

Formele bewijzen kunnen gezien worden als sleutels, welke dozen openen met daarin uitgekristaliseerd wiskundig inzicht; dat laatste kan benut worden voor de constructie van nieuwe meer complexe sleutels. Er zijn ook ‘dynamische sleutels’, welke zich tijdens het gebruik kunnen ontvouwen tot de juiste vorm. Deze komen overeen met bewijzen die gebruik maken van berekeningen. In het systeem HOL <[en.wikipedia.org/wiki/HOL_\(proof_assistant\)](http://en.wikipedia.org/wiki/HOL_(proof_assistant))> voor formele wiskunde moeten de dynamische sleutels eerst uitgevouwen worden, voordat verificatie mogelijk is. In andere systemen, zoals Coq <coq.inria.fr>, hoeft dat niet altijd, omdat deze tevens een berekeningsmodel voor een programmeertaal bevatten, waarover men kan redeneren en van te voren bewijzen dat een uitgevouwen sleutel zijn werk zal doen. Dat is dan een *efficiënte dynamische bewijssleutel*¹⁶.

¹²Eerst hebben Caprotti en Oostdijk [2001] voor getallen tot 100 cijfers kunnen bepalen met een formeel bewijs of ze priem zijn op grond van de kleine stelling van Fermat (Pocklington criterium). Daarna is de methode uitgebreid tot getallen met 300 cijfers op grond van een beslissingsmethode die gebruik maakt van elliptische krommen, Théry *et al.* [2007].

¹³Tenzij de gebruikte axioma’s tot tegenstrijdigheden aanleiding geven, zoals bij Frege.

¹⁴De axiomatische methode is echter zeer sterk, ondanks de onvolledigheidsstelling. Bovendien hebben we niets beters: er is geen algoritme dat uitmaakt of een uitspraak geldig is of niet. Dit werd bewezen door Turing [1937] met als bij-oogst het ontwerp van de programmeerbare computer, welke de meeste van u bij zich dragen in de vorm van een smartphone met *apps*.

¹⁵In dit artikel wordt geschetst hoe voor willekeurige vermenigvuldigingen van polynomen $p(\vec{x})q(\vec{x}) = r(\vec{x})$ formele bewijzen gegenereerd kunnen worden. Door Cruz-Filipe [2003] is reflectie gebruikt om bewijzen te generen voor de continuïteit, differentieerbaarheid en de berekening van de afgeleide van bekende reële functies.

¹⁶Zo bestaan er in Coq geparametriseerde bewijzen $p(x)$ en kan er aangetoond worden dat voor alle natuurlijke getallen n de expressie $p(n)$ een bewijs is van een bepaalde eigenschap $E(n)$, zonder dat $p(n)$ uitgevouwen hoeft te worden. De reeds genoemde de Bruijn heeft de lambda calculus van een nieuwe typering voorzien om zulke bewijzen te kunnen representeren. Na uitbreiding met operatoren voor hogere orde primitieve recursie, geïntroduceerd in Gödel

Een van de eerste succesvolle combinaties van een logisch systeem met externe rekenkracht is het systeem T uit een artikel van Gödel [1958], waarbij een operator R voor hogere orde primitieve recursie wordt geïntroduceerd.

Reflectie tezamen met efficiënt uitvouwbare bewijssleutels zijn in het grondslagen onderzoek in Nijmegen toegepast voor het verkrijgen van formele bewijzen, onder andere in de wiskundige analyse¹⁷. Door Georges Gonthier, een van de sprekers vanmorgen op het symposium, werd deze methode als een belangrijk hulpmiddel toegepast bij zijn indrukwekkende formalisering van de vierkleurenstelling uit de combinatoriek [2008] en de stelling van Feit-Thompson [2014] uit de groepentheorie. Door Hales *et al.* [2015] is een andere krachttoer volbracht, zowel intellectueel als organisatorisch¹⁸: de formalisering van Hales' bewijs van het vermoeden van Kepler over de beste ruimtebesparende bolstapelning. De afdeling Grondslagen kan er trots op zijn dat Hales een sabbatical in Nijmegen heeft doorgebracht en dat twee toenmalige collega's van de afdeling coauteur zijn van het grensverleggende artikel. Met recht kan gezegd worden dat het formaliseren van bewijzen mogelijk is voor wat met een *understatement* heet 'niet-triviale resultaten'. Wel met veel moeite: volgens een schatting van Freek Wiedijk kost het construeren van een formalisatie van een bewijs gemiddeld ongeveer tien keer zo veel tijd als het opschrijven van de informele versie.

1.3. Een vergelijk

Van vele wiskundigen was de eerste reactie op geformaliseerde bewijzen afkeurend. Omdat bewijzen zich doorgaans in hun bewustzijn ontwikkelen, beschouwde men formele bewijzen, die meestal te groot zijn om geheel te kunnen worden overzien, als verraad tegen de geest van de wiskunde. Een dergelijke houding is er ongetwijfeld ook geweest in de beginjaren van de cellulaire biologie. Terwijl een beoefenaar van 'natuurlijke historie' eerst romantisch op pad ging om planten en dieren te vangen en bestuderen, werd daarna biologisch onderzoek uitgevoerd met behulp van microscopen.

Door deze tegenzin tegen formalisatie werd de machinale verificatie van bewijzen in de wiskunde dan ook voorafgegaan door die van correctheidsbewijzen van eerst hardware¹⁹ en later software. Hiervoor werden interactieve systemen

[1958], zijn efficiënte dynamische bewijssleutels mogelijk geworden.

¹⁷Constructieve bewijzen van de hoofdstelling van de algebra (Geuvers *et al.* [2002]) en van de analyse (Cruz-Filipe [2003]). In O'Connor [2008] worden gecertificeerde bewijzen gegeven van efficiënte algoritmes voor exacte berekeningen met reële getallen.

¹⁸Omdat vele mensen geholpen hebben bij de formalisatie, met name een groep studenten in Vietnam, waarbij aan een aantal van hen een promotieplaats aan de University of Pittsburgh, waar Hales werkt, is aangeboden.

¹⁹Het bedrijf Intel heeft 400M US\$ moeten reserveren voor schadeclaims, omdat zij in 1994 een Pentium chip op de markt hadden gebracht waarin een fout zat. Dat gaf een impuls aan

gebouwd, de *bewijsassistenten*, welke behulpzaam zijn bij de constructie van formele bewijzen binnen de IT. Deze applicaties zijn instrumenteel geweest bij de opkomst van de formele wiskunde.

Mijn doel tijdens de bezetting van de leerstoel Grondslagen was om de formele wiskunde meer gangbaar te maken. Daarbij was mijn verwachting dat door gestaag te werken aan de formalisering van de onderwerpen uit de master Wiskunde op een gegeven moment voldoende, zeg >50 procent, geverifieerd zou zijn, waarna er belangstelling zou ontstaan bij collega-wiskundigen. Het verliep echter anders. Ondanks dat slechts een zeer klein percentage van genoemd curriculum geformaliseerd is, gebruiken tegenwoordig zelfs Fields Medal-winnaars (V. Voevodsky <arxiv.org/abs/1401.0053>) machinaal geverifieerde bewijzen, omdat ook voor hen de gebruikte argumenten zo complex kunnen worden, dat daar behoefte aan is. Wat daarbij als meest geschikte logica gebruikt kan worden is nog geen uitgemaakte zaak. Genoemde feiten hebben de grondslagen een centrale plaats gegeven in het onderzoek en de toepassingen van de wiskunde.

De precisie van de geformaliseerde bewijzen legt naar mijn mening uit waarom wiskunde zo betrouwbaar is. Dat informele bewijzen dit zeer redelijk benaderen is een bijzondere eigenschap van het menselijke denken. Ik verwacht dat een samenwerking tussen menselijke intuïtie en machinale verificatie op grote schaal en op een intellectueel boeiende wijze zowel de wiskunde als de informatica tot een nieuw niveau zal tillen. Een belangrijke uitdaging daarbij is het meer gebruiksvriendelijk maken van het formaliseren, dat nu nog zeer tijdrovend is. Bij het aanbieden van een artikel ter publicatie wordt tegenwoordig al wel af en toe een formalisatie bijgesloten. Een menselijke referee zal nog steeds nodig zijn, om te bepalen of de uitspraak goed formeel weergegeven is en of het resultaat interessant is, bijvoorbeeld doordat het met andere werk in verband gebracht kan worden.

2. Twee sleutels tot de mystiek

Mystiek wordt vaak verward met mystificatie. Dit komt omdat mystieke ervaring lastig onder woorden te brengen is. Daardoor wordt de mystiek wel gezien als irrationeel. Soms wordt ze zelfs beschouwd als anti-rationeel, omdat er benadrukt wordt dat het rationele denken de bedoelde ervaring niet kan opwekken en meestal ook in de weg zit. De filosoof Frits Staal is daar nuchterder over. Hij beschrijft in zijn boek *Exploring mysticism* [1975] dat mystiek voorkomt in vrijwel alle culturen, maar op verschillende manieren onderbouwd wordt. Bovendien, zo stelt Staal, is mystiek noch rationeel, noch irrationeel: het is een ervaring, en deze kan als zodanig rationeel onderzocht worden.

machinale verificatie van bewijzen dat een ontwerp aan een bepaalde specificatie voldoet.

2.1. Persoonlijk

Inductie

We geven een beschrijving van één van de mogelijk persoonlijke sleutels tot mystieke ervaring: inzichtmeditatie uit het Boeddhisme. Eerst een paar begrippen rondom het verschijnsel bewustzijn. Het heeft twee aspecten. 1. Bewustzijn is gericht op een onderwerp, het *object*, dat opgebouwd wordt uit gegevens die binnenkomen via de fysieke zintuigen, bijvoorbeeld oog of oor, of vanuit de geest, bijvoorbeeld het geheugen. 2. Daarnaast is er een geestelijke houding, ook wel *toestand* genoemd, die aan het bewustzijn een zekere 'kleur' geeft. De toestand bepaalt hoe het object verwerkt wordt en tot welke acties het aanleiding geeft. Tijdens de meditatie worden met vriendelijke discipline de binnenkomende objecten zoveel mogelijk beperkt: men zit stil op een rustige plaats en sluit de ogen. Om ook de input vanuit de geest in toom te houden, kan men de aandacht op de bewegingen van het lichaam veroorzaakt door de ademhaling richten. Desondanks zal men toch nog afgeleid kunnen worden en in een gedachtenpatroon verzinken, mede afhankelijk van onze *lifestyle*. Zodra men dat merkt, brengt men rustig de aandacht terug naar de ademhaling. Door dit oefenschema herhaald uit te voeren (en buiten de meditatie onze *lifestyle* aan te passen), kan er een zekere rust ontstaan, waarbij men beter in staat is de aandacht te blijven richten. Zelfs dan kunnen er hindernissen optreden doordat bewustzijnstoestanden kunnen opkomen, zoals verlangen, afkeer, slaperigheid of rusteloosheid. Elk van deze hindernissen gaat gepaard met een neiging om het oefenschema los te laten. Door desalniettemin systematisch door te mediteren ("O, er is pijn.", of "O, er is rusteloosheid."), kan het gebeuren dat men een bewustzijnstoestand betreedt, waarin tijdelijk alle genoemde hindernissen afwezig zijn. Dat is het begin van bepaalde vormen van mystieke ervaring.

De verschijnselen

De bijbehorende verschijnselen worden vaak beschreven in bejubelende termen en zijn bekend in vele culturen, van monotheïstische religies zoals het christendom, poly- of a-theïstische religies zoals het hindoeïsme en boeddhisme, tot sjamanistische culturen. We beperken ons tot de soms onderkoelde beschrijving in het klassieke boeddhisme.

De zogenaamde *jhāna's* behoren tot wat genoemd kan worden de boeddhistische mystieke ervaring. Tijdens de eerste *jhāna* bevat de bewustzijnstoestand van de beoefenaar de volgende deeltoestanden: doorlopende aandacht, verrukking, vreugde en concentratie. De doorlopende aandacht kost energie en kan na verloop van tijd losgelaten worden, waarbij men in de hogere tweede *jhāna* komt. De extase, welke een zekere onrust geeft, kan daarna losgelaten worden, en dan komt men

in de derde jhāna met alleen vreugde en concentratie. Door de vreugde los te laten blijft alleen gelijkmoedige concentratie over in de vierde jhāna. De beschrijving van de verschillende vormen van jhāna's met verrukking of alleen gelijkmoedigheid is vergelijkbaar met de diversiteit aan beschrijvingen van de mystieke ervaring in andere religies, denk aan Theresia van Ávilla vergeleken met Meister Eckhart.

In ieder geval is de ervaring in al zijn varianten rustgevend en heilzaam voor lichaam en geest. Bekend is verder dat door stressvermindering het immuun systeem beter gaat werken. Het onderzoek naar meditatie en haar effecten heeft mede hierdoor internationaal een grote vlucht genomen.

2.2. Bovenpersoonlijk

Er zijn aanwijzingen dat een deel van de fenomenen tijdens mystieke ervaring verklaard kunnen worden uit de verhoogde concentratie van neuromodulators in het brein, zie bijvoorbeeld Veening en Barendregt [2015]. Met name β -endorfine heeft een globale rustgevendende en pijnstillende werking op lichaam en geest. Dat heeft ermee te maken dat β -endorfine als sleutel op dezelfde neuroreceptoren past als morfine, het actieve bestanddeel van opium.

Dus wat ervaren kan worden door persoonlijke oefeningen in de meditatie, lijkt te maken te hebben met de zuiver neurofysiologische werking van een groep moleculen, die we kunnen zien als bovenpersoonlijke sleutels.

2.3. Verdieping

Maar wacht even. Van Karl Marx is bekend de uitspraak: "Religie is het opium van het volk." Dit middel kan volgens hem ingezet worden door een heersende despoot om zijn onderdanen zoet te houden, zodat hij aan de macht kan blijven. Door de net gegeven verklaring van de werking van innerlijke rust door endogene opiaten, lijkt Marx letterlijk gelijk te krijgen. Er valt echter meer te zeggen.

Ook in de inzichtmeditatie wordt de mystieke ervaring als een afleiding gezien: het gaat niet om het bereiken van tijdelijke extase en onderdrukking van datgene wat onprettig is, maar om het grondvesten van duurzame gelijkmoedigheid. De belangrijke Spaanse mysticus Johannes van het Kruis, wiens weg door Meadow and Culligan [1987] nauwgezet vergeleken wordt met die van de inzichtmeditatie, heeft geschreven dat "De weg ... bestaat niet uit plezier, ervaringen en spirituele gevoelens." De tijdelijke extatische ervaringen kunnen werken als een verslavende valkuil. Ze houden ons af van een heilzame verandering in onze persoonlijkheid.

Conditionering (persoonlijk)

Aan wat voor verandering moeten we dan denken? Alle levende organismen zijn 'geconditioneerd'. Eencelligen zijn dat al: in de buurt van voeding zoeken ze

toenadering, en bij gif verwijdering. Dat is een adaptief mechanisme van een primitieve vorm van verlangen en afkeer. Vele insecten zijn als volgt geconditioneerd: zij vliegen met een vaste hoek ten opzichte van een heldere lichtbron. Wanneer die lichtbron oneindig ver weg staat, zoals de zon of de maan, zal het vliegtraject een rechte lijn worden, hetgeen nuttig is om efficiënt rond te vliegen. Deze adaptieve conditionering werd echter gevaarlijk op het moment dat *homo sapiens* het vuur leerde beheersen, zodat lichtbronnen niet meer oneindig veraf kwamen te staan. De insecten vliegen dan met een boog in de vlam van bijvoorbeeld een kaars. Ook wij mensen zijn geconditioneerd en niet altijd op een adaptieve manier. Wij kennen allemaal wel iemand die dingen doet die deze persoon beter niet kan doen en dat ook weet, maar het toch niet laten kan. En als we eerlijk zijn moeten we bekennen dat wij dat zelf soms ook doen. Kortom, we zijn niet vrij.

Deconditionering (persoonlijk en bovenpersoonlijk)

Bepaalde soorten insecten zijn geëvolueerd en hebben geleerd niet in een vlam te vliegen. Deze aanpassing vindt plaats op een tijdsschaal van de evolutie, gedurende vele generaties. *Homo sapiens* heeft echter een troef waarmee deze binnen één leven kan deconditioneren. Dit gebeurt in drie fases.

1. Met behulp van sterke concentratie, verkregen bijvoorbeeld door genoemde meditatieoefeningen, verbetert de resolutie waarmee interne verschijnselen kunnen worden waargenomen. Op een gegeven moment kan dan ervaren worden dat de stroom van het bewustzijn niet op continue wijze voortschrijdt, maar in pulsen, als een onpersoonlijk mechanisme. Onze intenties zijn daarbij niet relevant: deze zijn er wel, maar ook die volgen het patroon van de pulserende machine. Er is geen vast 'zelf' te vinden dat aan de touwtjes trekt. Deze ervaring wordt wel 'de leegte' genoemd. Het zelf bestaat wel, maar als proces opgebouwd uit gecoördineerde modules. Het vergt een zekere hoeveelheid energie om deze coördinatie in stand te houden. Is die energie er niet, bijvoorbeeld tijdens ziekte of periodes van stress, dan kan de coördinatie tijdelijk uiteenvallen en wordt de leegte ervaren.

2. Men wil deze ervaring van de leegte vermijden en vasthouden aan de illusie van het zelf. Maar na duidelijke waarneming van de leegte is het beeld zó in ons gegrift, dat we er niet meer omheen kunnen. Het innerlijke verzet tegen genoemd inzicht doet ons lijden en wordt in navolging van Johannes van het Kruis wel omschreven als 'de donkere nacht van de ziel'. Met behulp van systematische concentratie en opmerkzaamheid kan men leren het verzet op te geven, in eerste instantie tijdelijk. Men komt dan in de zogenaamde 'fase van gelijkmoedigheid'.

3. Uiteindelijk ziet men in waar het verzet vandaan komt: vanuit de 'verkeerde visie' waarbij we denken in het midden van het universum te staan en aan de knoppen te draaien. Om het verzet los te laten is nieuwsgierigheid en milde overgave nodig. Daardoor zal ons bewustzijn en bijgevolg handelen meer flexibel worden.

Het is bijna paradoxaal dat onze geconditioneerdheid verminderd wordt door in te zien dat we totaal geconditioneerd zijn! Dat kan zo begrepen worden. Omdat we niet willen weten dat wij geconditioneerd zijn, wringen we ons meestal in allerlei bochten van verlangens en afkeer om de schijn hoog te houden dat we onafhankelijk zijn²⁰. Het beëindigen van het dwangmatig genereren van deze verspilde moeite geeft rust en nieuwe mogelijkheden om ons leven in te richten.

Naar een wetenschappelijke verklaring (bovenpersoonlijk)

In de cognitieve neurowetenschap weet men goed dat alle activiteit in het brein ontstaat op grond van input en wat er neurofysiologisch eerder is gebeurd. Ook is er evidentie dat waarneming niet continu verloopt maar ‘pulseert’²¹. Minder bekend is dat deze feiten persoonlijk ervaren kunnen worden en dat dit moeilijk te verkroppen is omdat het indruist tegen de verkeerde visie op onszelf. Omdat deze ervaring voortdurend op de loer ligt in iedere vorm van bewustzijn, is er een natuurlijke neiging om de illusie van een voortdurend vaststaand zelfbeeld in stand te houden. Daarbij vervalt men meestal tot oude zelf-bevestigende gewoontes. Een eenvoudige verklarende hypothese is dat het uitvoeren van deze gewoontes steeds een dosis endogene opiaten oplevert, die de leegte onderdrukken. Deze zijn verslavend en daarom is het zo lastig om oude gewoontes los te laten. Veel neigingen hebben de vorm van ‘het vervangen van de angst voor niets door de angst voor iets’, zoals de psycholoog R. May [1950] het verwoordt. Men heeft het ervoor over om het milieu te vervuilen of om oorlog te voeren; maar ook om irrationele angsten en gedachten te koesteren. Genoemde verslaving verklaart waarom de politiek er steeds maar niet in slaagt om op dit precaire moment in de geschiedenis van de mensheid de noodzakelijke besluiten te nemen, waar iedereen vanzelfsprekend baat bij heeft.

Tot zover de oorzaak van het leed. Maar nu de bovengenoemde oplossing ervan, is deze ook plausibel? Verschillende auteurs, onder anderen Zylberberg, Dehaene *et al.* [2011], modelleren het brein als een hybride Turing machine: pulserend volgens vaste patronen, waarbij de tussenstappen steeds bepaald worden door een neurale net. Dit past bij de meditatie-ervaring van de deterministisch pulserende stroom van het bewustzijn. In een artikel met Antonino Raffone [2013] wordt het model uitgebreid met de mogelijkheid de eigen interne toestanden waar te nemen. Dat is de essentie van *mindfulness*. Daarmee wordt een extra zintuig ontwikkeld, een soort radar voor onze automatische piloot, waarmee geïnternaliseerde programma’s bijgestuurd kunnen worden. Dat is een afdoende verklaring voor de mogelijkheid

²⁰In de tabaksreclame maakte men daar slinks gebruik van: “Be an original, smoke our cigarettes.”

²¹EEG microstates, Pascual-Marqui *et al.* [1995], Continuous Wagon Wheel illusion, VanRullen *et al.* [2008].

om hardnekkige gewoontes, waaronder de verkeerde visie, los te laten.

Het huidige bloeiende meditatieonderzoek zal hopelijk niet te lang op zich laten wachten met resultaten in deze richting. Daarbij kan de meditatie-ervaring werken zoals de intuïtie dat doet in de wiskunde, als bron voor hypotheses die later op andere wijze geverifieerd worden. Voor het zover is, bevindt de mensheid zich collectief in de donkere nacht van de ziel. Maar er is vertrouwen op licht aan het einde van de tunnel. Er worden nu een aantal strofen uit het gedicht van Johannes van het Kruis *Cantar del alma* uitgevoerd, die dit vertrouwen uitspreken; ze zijn in 2006 indringend op muziek gezet door de Italiaanse componist Sergio Militello.

3. Dankwoord

Tenslotte wil ik mijn dank uitspreken, allereerst aan de sprekers en musici voor hun uitstekende bijdrage vandaag.

De Radboud Universiteit heeft mij goed ingebed en van middelen voorzien. Door in mijn tweede carrière met collega's van andere afdelingen of faculteiten samen te werken heb ik de rijkdom van intellectuele expertise en stimulans aan deze mooie universiteit mogen ervaren. Ik denk aan de afdelingen biofysica met Stan Gielen; de cellulaire biologie met Eric Roubos, de psychiatrie met Anne Speckens; het Donders Institute for Brain, Cognition and Behaviour met Ole Jensen, de emeritus hersenanatoom Ruud Nieuwenhuys, de werkgroep spiritualiteit met Cees Waaijman. Inzichtmeditatie onderwijzen samen met Marij Geurts op het Han Fortmann Centrum hoorde ook tot mijn bezigheden op de Radboud-campus en maakte mede mogelijk het onderzoek naar de effecten van meditatie.

Daarnaast hebben de volgende instellingen voor mij goede condities geschapen voor onderzoek: NWO met haar Spinozapremie. Het NIAS (*Netherlands Institute of Advanced Study*) met haar *Distinguished Lorentz Fellowship*.

Dirk van Dalen, als de dag van gisteren herinner ik me jouw mooie colleges grondslagen van de wiskunde, nu bijna een halve eeuw geleden. Logica is een echt vak en dat heb je altijd uitgedragen. Jan Willem Klop, wij blijven ons verbazen over de veelzijdigheid van de lambda calculus; en met Rinus Plasmeijer over de toepassingen daarvan. Wil Dekkers, wij hebben met Rick Statman lang samengewerkt als hoofdauteurs aan een boek over getypeerde lambda calculus. Het boek was nog niet voltooid toen wij met pensioen gingen. We bleven er hard aan werken. Het is er nu en mag er zijn. Herman Geuvers, je bent begonnen als student en bent nu proximus. Jij hebt met Freek Wiedijk en de vele andere leden van de afdeling Grondslagen de droom van Aristoteles en De Bruijn weer een stap verder gerealiseerd; moge dit zo doorgaan. Fabio Giommi, wij zijn vooral geïnteresseerd in de mogelijkheden om meditatie in te zetten, zowel bij het verminderen van leed als bij het begrijpen van de werking van het bewustzijn. En Nicole Messink, met

je bescheiden doorzettingsvermogen ben jij belangrijk geweest voor het draaiend houden van de afdeling. Promovendi en ook studenten kwamen regelmatig met onverwachte bijdragen. Aan alle genoemde en ongenoemde personen heel veel dank.

Lieve Lidia, wij hebben vanaf 1989 meer dan een kwart eeuw samengeleefd; dank je voor de fijne tijd en je inspiratie als muze. En tenslotte, mijn lieve moeder, zonder jou stond ik hier niet; en je hebt bovendien een belangrijke invloed gehad op mijn levensvreugde.

Ik heb gezegd.

4. Literatuur

Aristoteles [350 v.c.]

Organon: Analytica posteriora.

Barendregt, H en E Barendsen [2002]

Autarkic computations in formal proofs *Journal of Automated Reasoning*, 28(3), 321–336.

Barendregt, H and A Cohen [2001]

Electronic Communication of Mathematics and the Interaction of Computer Algebras Systems and Proof Assistants, *J. Symbolic Computation*, 32, 3-22.

Barendregt, H and A Raffone [2013]

Conscious cognition as a discrete, deterministic, and universal Turing Machine process. In: *The Selected works of A.M. Turing*. Eds B Cooper and J van Leeuwen. Elsevier, 92-97.

de Bruijn, NG [1970]

The mathematical language AUTOMATH, its usage, and some of its extensions. In: *Symposium on Automatic Demonstration* (Versailles, 1968), pages 29-61. Lecture Notes in Mathematics, 125. Springer, Berlin.

Caprotti, O en M Oostdijk [2001]

Formal and efficient primality proofs by use of computer algebra oracles *Journal of Symbolic Computation*, 32(1), 55-70.

Cruz-Filipe, L [2003]

A Constructive Formalization of the Fundamental Theorem of Calculus, in: Geuvers, H and F Wiedijk, Types 2002, Proceedings of the workshop Types for Proof and Programs, Springer LNCS 2646, 108-126.

Frege, G [1879]

Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen

Denkens. L Nebert Verlag, Halle. Engelse vertaling in: Jean Van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press.

Frege, G [1893, 1903]

Grundgesetze der Arithmetik, Band I, II. Verlag Hermann Pohle, Jena.

Geuvers, H, F Wiedijk and J Zwanenburg [2002]

A Constructive Proof of the Fundamental Theorem of Algebra without Using the Rationals, In: Selected papers from the International Workshop on Types for Proofs and Programs TYPES'00, Springer, 96-111.

Gödel, K [1930]

Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik*, 37 (1), 349-360. doi: 10.1007/BF01696781. Engelse vertaling in: Jean Van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press.

Gödel, K [1931]

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Engelse vertaling: On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I, in Solomon Feferman, ed. 1986: *Kurt Gödel Collected works*, Vol. I. Oxford University Press: 144-195. The original German with a facing English translation, preceded by a very illuminating introductory note by Kleene.

Gödel, K [1958]

Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica*. 280-287.

Gonthier, G [2008]

Formal proof: the four-color theorem, *Notices of the AMS*, 55(11), 1382-1393.

www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf.

Gonthier, G, A Asperti, J Avigad, Y Bertot, C Cohen, F Garillot, S Le Roux, A Mahboubi, R OConnor, S Ould Biha, I Pasca, L Rideau, A Solovyev, E Tassi, L Thry [2014]

A Machine-Checked Proof of the Odd Order Theorem, in: *Interactive Theorem Proving*, Lecture Notes in Computer Science, 7998, 163-179.

Hadamard, J [1945]

An essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press.

Hales, T, M Adams, G Bauer, TD Dang, J Harrison, LT Hoang, C Kaliszyk, V Magron, S McLaughlin, TT Nguyen, QT Nguyen, T Nipkow, S Obua, J Pleso, J Rute, A Solovyev, THA Ta, NT Tran, TD Trieu, J Urban, KK Vu, R Zumkeller [2015]

- A formal proof of the kepler conjecture, <arxiv.org/pdf/1501.02155.pdf>.
- Marx, K [1844]
 Einleitung zu *Zur Kritik der Hegelschen Rechtsphilosophie*, in: *Deutsch-Französische Jahrbücher 1844*, Herdruk: Karl Marx/ Friedrich Engels - Werke. (Karl) Dietz Verlag, Berlin. Band 1. Berlin/DDR. 1976. S. 378.
- May, R [1950]
The meaning of anxiety, W.W. Norton, New York.
- Meadow, MJ and K Culligan [1987],
 Congruent spiritual paths: christian carmelite and theravadan buddhist vipassana, *The Journal of Transpersonal Psychology*, 19(2), 181-196.
- Pascual-Marqui RD, CM Michel, and D Lehmann [1995]
 Segmentation of brain electrical activity into microstates: model estimation and validation. *IEEE Trans Bio-Med Eng*, 42:658-665.
- O'Connor, R [2008]
 Certified Exact Transcendental Real Number Computation in Coq, in: *Theorem Proving in Higher Order Logics*, LNCS 5170, Springer, 246-261.
- Poincaré, H [1908],
Science et Méthode. Paris: Flammarion, 1920. Herdruk: Kimé, Paris 1999.
- Théry, L and G Hanrot [2007]
 Primality Proving with Elliptic Curves. *Theorem Proving in Higher Order Logics 2007*, Eds K Schneider and J Brandt, Springer-Verlag, LNCS 4732, 319-333.
- Turing, A [1937]
 On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 42, 230-265.
- VanRullen R, A Pascual-Leone and L Battelli [2008]
 The Continuous Wagon Wheel Illusion and the ‘When’ Pathway of the Right Parietal Lobe: A Repetitive Transcranial Magnetic Stimulation Study. *PLoS ONE*, 3(8): e2911. doi: 10.1371/journal.pone.0002911.
- Veening, JG and HP Barendregt [2015]
 The effects of Beta-Endorphin: state change modification, *Fluids and Barriers of the CNS*, 12:3, doi: 10.1186/2045-8118-12-3.
- Whitehead, AN and B Russell [1910, 1912, 1913]
Principia mathematica 1, 2, 3, Cambridge University Press.
- Zylberberg, A, S Dehaene, PR Roelfsema and M Sigman [2011]
 The human Turing machine: a neural framework for mental programs. *Trends Cognitive Science*, 15(7), 293-300. doi: 10.1016/j.tics.2011.05.007.

Programma afscheidscollege

Tijdens opkomst van corona

<i>Pavane Mélancolique</i> (2010)	K. Schoonenbeek (1947)	Lidia van der Vegt Appelona Klarenbeek Heleen Venekamp	Hobo Fluit Harp
--------------------------------------	----------------------------------	--	-----------------------

Aan het begin van de afscheidrede

<i>Introitus</i> ²² (1965)	I. Strawinsky (1882-1971)	Wouter van Haaften Heleen Venekamp Rik Helmes Anne Wiersum Jacinta Molijn Luís Cruz-Filipe Emil Hoefnagel Ruurd Lof Jan-Jetze Zijlstra Matteo Sammartino Jacques van der Smissen Bernd Souvigner Jozef Steenbrink Henk Barendregt Walter van Suijlekom Toine Schreurs Pieter Lamers	Directie Harp Piano Altviool Contrabas Tenor Tenor Tenor Tenor Bas Bas Bas Bas Pauken Pauken Tam-tam Tam-tam
--	-------------------------------------	---	--

Afscheidrede

Henk Barendregt

Aan het einde van de afscheidrede

<i>Cantar del Alma</i> ²² (2006)	S. Militello (1968)	Emil Hoefnagel Lidia van der Vegt Appelona Klarenbeek Heleen Venekamp	Tenor Hobo Fluit Harp
--	-------------------------------	--	--------------------------------

²²Tekst volgende bladzijde.

Introitus (In Memoriam T.S. Eliot)

Requiem æternam dona ei, Domine.
 Et lux perpetua luceat ei.
 Te decet hymnus, Deus, in Sion,
 Et tibi reddetur votum in Jerusalem
 Exaudi orationem meam
 Ad te omnis caro veniet.
 Requiem æternam dona ei, Domine.
 Et lux perpetua luceat ei.

Geef hem eeuwige rust, O Heer.
 En laat het eeuwig licht op hem schijnen.
 U komt een lofzang toe, O God op de Zion,
 Een gelofte zal U betaald worden in Jeruzalem.
 Verhoor mijn gebed.
 Alle vlees zal voor U komen.
 Geef hem eeuwige rust, O Heer.
 En laat het eeuwig licht op hem schijnen.

Cantar del alma que se huelga de conocer a Dios por fe

Juan de la Cruz (1542-1591)

Ritornello:

*Que bien sé yo la fonte que mana y corre:
 aunque es de noche.*

1. *Aquella eterna fonte está escondida,
 que bien sé yo dó tiene su manida,
 aunque es de noche.*
2. *Su origen no lo sé, pues no le tiene,
 mas sé que todo origen de ella viene,
 aunque es de noche.*

Ritornello

3. *Sé que no puede ser cosa tan bella,
 y que cielos y tierra beben de ella,
 aunque es de noche.*
4. *El corriente que nace de esta fuente
 bien sé que es tan capaz y omnipotente,
 aunque es de noche.*

Ritornello

5. *Aquí se está, llorando a las criaturas,
 y de esta agua se hartan,
 aunque a oscuras, porque es de noche.*
6. *Bien sé que suelo en ella no se halla,
 y que ninguno puede vadealla,
 aunque es de noche.*

Lied van de ziel die zich verheugt God te kennen door geloof

Johannes van het Kruis (1542-1591)

Refrein:

Hoe goed ken ik de bron die welt en stroomt,
 ook al is het nacht.

1. Die eeuwige bron is verborgen,
 hoe goed weet ik waar ze zich bevindt,
 ook al is het nacht.
2. Haar oorsprong weet ik niet, want die
 heeft zij niet, wel weet ik dat al het ontstaan
 uit haar voort komt, ook al is het nacht.

Refrein

3. Ik weet dat er niets zo prachtig kan zijn
 en dat hemel en aarde van haar drinken,
 ook al is het nacht.
4. De stroom, die ontspruit uit deze bron,
 goed weet ik dat zij zo bedreven en almachtig
 is, ook al is het nacht.

Refrein

5. 'Hier is het', roept zij de schepselen,
 en met dit water verzadigen zij zich
 ook in het duister, want het is nacht.
6. Goed weet ik dat zij grondeloos is
 en dat niemand haar doorwaden kan,
 ook al is het nacht.



AFSCHEIDSCOLLEGE
HENK BARENDREGT



Henk Barendregt bespreekt zijn twee belangrijkste wetenschappelijke interesses: wiskunde en meditatiefenomenen.

Wiskundige uitspraken zijn gebaseerd op bewijzen en berekeningen. Voor deze was tot voor kort een intuïtief oordeel nodig om in te zien dat ze correct en toepasbaar zijn. Na een zoektocht van vele generaties logici en wiskundigen is het nu gelukt dit oordeel te objectiveren en machinaal op correctheid te testen. Hoewel dit de wiskundige intuïtie overbodig lijkt te maken, blijft deze een belangrijke rol spelen bij het vinden van nieuwe resultaten.

De menselijke geest is in staat procedures aan te leren via mentale programma's. Ook is er de mogelijkheid om bepaalde reacties (tijdelijk) af te leren via metabewustzijn (mindfulness). Daarmee wordt een verhoogde resolutie van waarneming mogelijk, die laat zien dat onze acties totaal gedetermineerd zijn. We willen dit niet erkennen en verbergen het met onheilzame beslissingsmechanismen die aanvoelen als vrije wil. Door het gedetermineerd zijn te aanvaarden, wordt de keuzeruimte van ons gedrag wezenlijk vergroot. Er is immers geen reden meer om het determinisme symptomatisch te verbloemen.

De menselijke geest is in staat procedures aan te leren via mentale programma's. Ook is er de mogelijkheid om bepaalde reacties (tijdelijk) af te leren via metabewustzijn (mindfulness). Daarmee wordt een verhoogde resolutie van waarneming mogelijk, die laat zien dat onze acties totaal gedetermineerd zijn. We willen dit niet erkennen en verbergen het met onheilzame beslissingsmechanismen die aanvoelen als vrije wil. Door het gedetermineerd zijn te aanvaarden, wordt de keuzeruimte van ons gedrag wezenlijk vergroot. Er is immers geen reden meer om het determinisme symptomatisch te verbloemen.

Henk Barendregt, Amsterdam 1947, studeerde Mathematische logica bij Dirk van Dalen aan de Universiteit Utrecht, waar hij promoveerde op de λ -calculus, een taal om wiskundige berekeningen en bewijzen compact op te schrijven.

Van 1986 tot 2015 was hij hoogleraar Grondslagen van de wiskunde en informatica aan de Radboud Universiteit.

Radboud Universiteit

