

Uitwerkingen college reflectie: Combinatoren (04.12.2013)

1. (1) Zij $P_1 = \text{SI}(\text{K}x)$, dan $P_1y = \text{SI}(\text{K}x)y = \text{I}y(\text{K}xy) = y(x) = yx$.
Er is geen term met minder variabelen, want x komt voor in xy en niet in y , want $x \neq y$.
- (2) Als nu $Pxy = yx$, dan zoek ik P_2 zodanig dat $P_2x = P_1$, want dan $P_2xy = P_1y = yx$. Met het algoritme uit het hoorcollege vinden we:

$$P_2 = \text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})\text{I})$$

$$\text{Controle: } \text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})\text{I})x = \text{S}(\text{KS})(\text{KI})x((\text{S}(\text{KK})\text{I})x) =$$

$$\text{KS}x(\text{KI}x)(\text{KK}x(\text{I}x)) = \text{SI}(\text{K}x) = P_1$$

- (3) $P_3xy = y = \text{I}y$, dus ik zoek P_3 met $P_3x = \text{I}$.
Zij $P_3 = \text{KI}$, dan $P_3xy = \text{KI}xy = \text{I}y = y$.
 - (4) $P_4x = x(xx)$. Dit is al van de vorm $P_4x = P$, waarbij $P = x(xx)$.
Met het algoritme vinden we: $P_4 = \text{SI}(\text{SII})$
 - (5) $P_5xy = xxx$. We vinden P_5 in twee stappen. Eerst bepaal ik Q die y niet bevat, zodat $Qy = xxx$. Daarna bepaal ik P_5 met $P_5x = Q$, want dan $P_5xy = Qy = xxx$.
 $Q = \text{S}(\text{S}(\text{K}x)(\text{K}x))(\text{K}x)$. Let hierbij op dat $xxx = (xx)x$.
Dit geeft $P_5 = \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{KK})\text{I}))(\text{S}(\text{KK})\text{I}))(\text{S}(\text{KK})\text{I})$
 - (6) Dezelfde 'truc' werkt hier. We bepalen Q zodat $Qy = xyy$ en P_6 zodat $P_6x = Q$.
 $Q = \text{S}(\text{S}(\text{K}x)\text{I})\text{I}$, dan $P_6 = \text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{KK})\text{I}))(\text{KI}))) (\text{KI})$
 - (7) We bepalen weer Q zodat $Qy = x(yy)$ en P_7 zodat $P_7x = Q$. Zij $Q = \text{S}(\text{K}x)(\text{SII})$, dan $P_7 = \text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{KK})\text{I}))(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{KI}))$
- Ook P_2 tot en met P_7 hebben zo min mogelijk variabelen, namelijk geen.

2. (8) $Q = QK$, dan is Q een vast punt (fixed point) van $[x]x\text{K}$. Dit de functie P met $Px = xK$: $PQ = QK = Q$. We bepalen dus eerst de functie P en daarbij wordt het vaste punt gegeven door de stelling uit het hoorcollege.
 $P = \text{SI}(\text{KK})$ het vaste punt is WW , waarbij $W = [x]P(xx)$.
Er geldt: $W = \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})(\text{KK}))) (\text{SII})$, dus

$$Q = \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})(\text{KK}))) (\text{SII}) \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})(\text{KK}))) (\text{SII})$$

- (9) Zij Q het vaste punt van de functie P_2 met $P_2qx = xq$, want dan $P_2Q = Q$ en dus $Qx = P_2Qx = xQ$.
We zagen al: $P_2 = \text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})\text{I})$. Dus $Q = WW$ waarbij

$$W = \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{KK})(\text{KS}))) (\text{S}(\text{KK})(\text{KI})))) (\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{KK})(\text{KK}))) (\text{KI}))) (\text{SII})$$

- (10) Als geldt $Px = x\text{II}$, dan is Q een vast punt van P . $P = \text{S}(\text{SI}(\text{KI}))(\text{KI})$.
Zij $Q = WW$, waarbij $W = [x]P(xx)$;

$$W = \text{S}(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{S}(\text{S}(\text{KS})(\text{KI}))(\text{S}(\text{KK})(\text{KI})))) (\text{S}(\text{KK})(\text{KI}))) (\text{SII})$$

- (11) Als Q het vaste punt is van de functie P_6 met $P_6qx = qxx$ zijn we er. Inderdaad, als $Q = P_6Q$, dan $Qx = P_6Qx = Qxx$. We hebben P_6 al bepaald, daaruit kunnen we Q halen.

3. (a) Stel $I = K$, dan

$$y = Klxy = IKxy = Kxy = x.$$

Stel $I = S$, dan

$$y = SKxy = IKxy = Kxy = x.$$

Stel $K = S$, dan $I = SKK = KKK = K$ en we zijn terug in het eerste geval.

- (b) Stel $K = KK$, dan

$$x = lx = Klxy = KKlxy = Kyx = y.$$

Dus $K = KK \vdash x = y$, maar ook $\not\vdash x = y$, dus $K \neq KK$.

- (c) Stel er is een F zodanig dat $F(xy) = x$ voor alle x . Dan geldt $Kx = F(Kxy) = Fx = F(lx) = 1$ en dus $x = Kxy = ly = y$, tegenspraak, omdat we ervan uitgaan dat $\not\vdash x = y$.
Stel er is een G zodanig dat $G(xy) = y$ voor alle y . Dan geldt $K = G(KK) = G(1(KK)) = KK$, in tegenspraak met (b).