Uitwerking Lambda Calculus (week 6, 18.12.2013)

Exercise 1

1. De codes van $2 = s(sz)$, $3 = s(s(sz))$ zijn gedefinieerd door

   $\ulcorner 2 \urcorner = \ulcorner s(sz) \urcorner = \lambda e.e\mathsf{U}_2^2 \ulcorner sz \urcorner e$

   $\ulcorner sz \urcorner = \lambda f.f\mathsf{U}_2^2 \ulcorner z \urcorner f$

   $\ulcorner z \urcorner = \lambda g.g\mathsf{U}_1^2 g$ en

   $\ulcorner 3 \urcorner = \ulcorner s(s(sz)) \urcorner = \lambda e.e\mathsf{U}_2^2 \ulcorner s(sz) \urcorner e$

   Dit invullen geeft de gevraagde codes precies:

   $\ulcorner 2 \urcorner = \lambda e.e\mathsf{U}_2^2(\lambda f.f\mathsf{U}_2^2(\lambda g.g\mathsf{U}_1^2 g)f)e$

   $\ulcorner 3 \urcorner = \lambda h.h\mathsf{U}_2^2(\lambda e.e\mathsf{U}_2^2(\lambda f.f\mathsf{U}_2^2(\lambda g.g\mathsf{U}_1^2 g)f)e)h.$

2. We willen

   $$P(\ulcorner z \urcorner) = \ulcorner 0 \urcorner = A_1 P$$
   $$P(\ulcorner sn \urcorner) = \ulcorner n \urcorner = A_2 \ulcorner n \urcorner P$$

   Dit is zo als $A_1 = K\ulcorner 0 \urcorner$ en $A_2 = K$.
   Kies $B_1 = \lambda z.A_1\langle z\rangle$ en $B_2 = \lambda tz.A_2 t\langle z\rangle$, dan voldoet

   $P = \langle\langle B_1, B_2\rangle\rangle = \langle\langle \lambda z.\mathsf{K}\ulcorner 0 \urcorner z, \lambda tz.\mathsf{K}t\langle z\rangle\rangle\rangle = \langle\langle \lambda z.\ulcorner 0 \urcorner, \lambda tz.t\rangle\rangle = \langle\langle \mathsf{K}\ulcorner 0 \urcorner, \mathsf{K}\rangle\rangle.$

3. $$\begin{aligned} P\ulcorner 3 \urcorner &= \langle\langle \lambda xy.\ulcorner 0 \urcorner, \mathsf{K}\rangle\rangle \ulcorner s(s(sz)) \urcorner &&= \ulcorner s(s(sz)) \urcorner \langle \lambda xy.\ulcorner 0 \urcorner, \mathsf{K}\rangle \\ &= \langle \lambda xy.\ulcorner 0 \urcorner, \mathsf{K}\rangle \mathsf{U}_2^2 \ulcorner s(sz) \urcorner \langle \lambda xy.\ulcorner 0 \urcorner, \mathsf{K}\rangle &&= \ulcorner s(sz) \urcorner \\ &= \ulcorner 2 \urcorner. \end{aligned}$$

Exercise 2

1. $$\begin{aligned} \ulcorner t_1 \urcorner &= \ulcorner p(pll)l \urcorner = \lambda e_1.e_1\mathsf{U}_2^2 \ulcorner pll \urcorner \ulcorner l \urcorner e_1 \\ \ulcorner pll \urcorner &= \lambda e_2.e_2\mathsf{U}_2^2 \ulcorner l \urcorner \ulcorner l \urcorner e_2 \\ \ulcorner l \urcorner &= \lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3 \\ \ulcorner t_2 \urcorner &= \ulcorner pl(pll) \urcorner = \lambda e_1.e_1\mathsf{U}_2^2 \ulcorner l \urcorner \ulcorner pll \urcorner e_1. \end{aligned}$$

   Dit invullen geeft

   $\ulcorner t_1 \urcorner = \lambda e_1.e_1\mathsf{U}_2^2(\lambda e_2.e_2\mathsf{U}_2^2(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)e_2)(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)e_1$

   $\ulcorner t_2 \urcorner = \lambda e_1.e_1\mathsf{U}_2^2(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)((\lambda e_2.e_2\mathsf{U}_2^2(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)(\lambda e_3.e_3\mathsf{U}_1^2 e_3)e_2))e_1.$

2. We zoeken een F met

$$F\ulcorner l\urcorner = \ulcorner l\urcorner$$
$$F\ulcorner pts\urcorner = \ulcorner pt(pts)\urcorner$$

Bij de BPG-codering proberen we $F \triangleq \langle\langle D_1, D_2\rangle\rangle$. We willen $D_1\langle D_1, D_2\rangle = \ulcorner l\urcorner$. Dit krijgen we als $D_1 = \lambda x.\ulcorner l\urcorner$.
Verder willen we

$$\begin{aligned} D_2\ulcorner t\urcorner\ulcorner s\urcorner\langle D_1, D_2\rangle &= \ulcorner pt(pts)\urcorner \\ &\equiv \lambda e.e\mathsf{U}_2^2\ulcorner t\urcorner\ulcorner pts\urcorner e \\ &\equiv \lambda e.e\mathsf{U}_2^2\ulcorner t\urcorner(\lambda f.f\mathsf{U}_2^2\ulcorner t\urcorner\ulcorner s\urcorner f)e. \end{aligned}$$

Dit krijgen we als we nemen $D_2 = \lambda xyz.\lambda e.e\mathsf{U}_2^2 x(\lambda f.f\mathsf{U}_2^2 xyf)e$.

3. Nu geldt dat
$$\begin{aligned} F\ulcorner pl(pll)\urcorner &= \ulcorner pl(pll)\urcorner\langle D_1, D_2\rangle \\ &= D_2\ulcorner l\urcorner\ulcorner pll\urcorner\langle D_1, D_2\rangle \\ &= \lambda e.e\mathsf{U}_2^2\ulcorner l\urcorner(\lambda f.f\mathsf{U}_2^2\ulcorner l\urcorner\ulcorner pll\urcorner f)e \\ &= \lambda e.e\mathsf{U}_2^2\ulcorner l\urcorner e\mathsf{U}_2^2\ulcorner l\urcorner\ulcorner pll\urcorner e \\ &= \lambda e.e\mathsf{U}_2^2\ulcorner l\urcorner\ulcorner pl(pll)\urcorner e \\ &= \ulcorner pl(pl(pll))\urcorner. \end{aligned}$$

Exercise 3

$\mathsf{E} = \langle\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle\rangle$, met $\mathsf{C} \equiv \lambda xyz.xzy$. Dus we krijgen we het volgende.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\ulcorner\lambda x.M\urcorner &= \mathsf{E}\,(\mathsf{Abs}(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)) \\ &= \mathsf{E}\,(\lambda e.e\mathsf{U}_3^3(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)e) \\ &= \langle\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle\rangle(\lambda e.e\mathsf{U}_3^3(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)e) \\ &= (\lambda e.e\mathsf{U}_3^3(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)e)\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle\mathsf{U}_3^3(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \mathsf{C}(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \lambda z.(\lambda x.\ulcorner M\urcorner)z\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \lambda z.(\ulcorner M\urcorner[x := z])\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \lambda x.\ulcorner M\urcorner\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle \\ &= \lambda x.\langle\langle \mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{C}\rangle\rangle\ulcorner M\urcorner \\ &= \lambda x.\mathsf{E}\ulcorner M\urcorner \\ &= \lambda x.M. \end{aligned}$$