Uitwerking Opgaven Lambda Calculus (15.01.2014)

1. Los op (vindt steeds een term F zodat voor alle termen X, Y, Z geldt):

   (a) $FX = X\mathsf{I}X$.

   (b) $FXY = YFX$.

   (c) $FX = X\ulcorner F \urcorner$.
   [Hint. Vind een H zodat $HF = \lambda x.xF$ en pas de tweede fixed point stelling toe op H.]

   Uitwerking.

   (a) Zij $F = \lambda x.x\mathsf{I}x$, dan $FX = X\mathsf{I}X$

   (b) $FXY = YFX$ dan en slechts dan als $F = \lambda xy.yFx$, dus $F = (\lambda f.(\lambda xy.yfx))F$. Neem hiervoor $P = \lambda f.(\lambda xy.yfx)$, dan willen we een F met $PF = F$. Zo'n F is een fixed point van P. We weten hoe we die kunnen vinden: $F = WW$ met $W = \lambda c.P(cc)$.

   (c) Definieer $H = \lambda yx.xy$, dan $HF = \lambda x.xF$. Volgens de tweede fixed point stelling is er een F zodat $H\ulcorner F \urcorner = F$. Dan geldt

   $$FX = H\ulcorner F \urcorner X = (\lambda x.x\ulcorner F \urcorner)X = X\ulcorner F \urcorner.$$

2. Vorige week hadden we een V geconstrueerd zodat

   $$\begin{aligned} V\ulcorner x \urcorner &= \mathbf{true} \\ V\ulcorner PQ \urcorner &= V\ulcorner P \urcorner \\ V\ulcorner \lambda x.P \urcorner &= \mathbf{false}. \end{aligned}$$

   Evenzo kunnen we een N construeren zodat

   $$\begin{aligned} N\ulcorner x \urcorner &= \mathbf{true} \\ N\ulcorner PQ \urcorner &= F_{\text{and}}(V\ulcorner P \urcorner)(F_{\text{and}}(N\ulcorner P \urcorner)(N\ulcorner Q \urcorner)) \\ N\ulcorner \lambda x.P \urcorner &= N\ulcorner P \urcorner. \end{aligned}$$

   de term F_{and} is verleden week ingevoerd op het werkcollege.

   Opgaven.

   (a) Reduceer $N\ulcorner \lambda x.x \urcorner$ en $N\ulcorner \lambda x.\mathsf{I}x \urcorner$ tot normaalvorm.

   (b) Bonus opgave. Schrijf N uit.

   Uitwerking.

   (a) i. $N\ulcorner \lambda x.x \urcorner = N\ulcorner x \urcorner = \mathbf{true}$
   Aangezien $\mathsf{I} = \lambda x.x$ geldt $N\ulcorner \mathsf{I} \urcorner = \mathbf{true}$ en $V\ulcorner \mathsf{I} \urcorner = \mathbf{false}$; dus

   $$\begin{aligned} N\ulcorner \lambda x.\mathsf{I}x \urcorner &= N\ulcorner \mathsf{I}x \urcorner \\ &= F_{and}(V\ulcorner \mathsf{I} \urcorner, F_{and}(N\ulcorner \mathsf{I} \urcorner)(N\ulcorner x \urcorner)) \\ &= F_{and}(\mathbf{false}, F_{and}(\mathbf{true}, \mathbf{true})) \\ &= \mathbf{false}. \end{aligned}$$

ii. We nemen weer $N = \langle\langle B_1, B_2, B_3\rangle\rangle$ met
$B_1 = \lambda xy.\mathbf{true}$,
$B_2 = \lambda xyz.F_{and}(Vx, F_{and}(\langle z\rangle x, \langle z\rangle y))$,
$B_3 = \lambda xy.\langle y\rangle x$,
want dan

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}l} N\ulcorner x\urcorner &=& B_1 x\langle B_1, B_2, B_3\rangle &=& \mathbf{true}, \text{ als } B_1 = \lambda xy.\mathbf{true}, \\ N\ulcorner PQ\urcorner &=& B_2\ulcorner P\urcorner\ulcorner Q\urcorner\langle B_1, B_2, B_3\rangle &=& F_{and}(V\ulcorner P\urcorner, F_{and}(N\ulcorner P\urcorner, N\ulcorner Q\urcorner)), \\ N\ulcorner \lambda x.P\urcorner &=& B_3(\lambda x.\ulcorner P\urcorner)\langle B_1, B_2, B_3\rangle &=& \langle\langle B_1 \ldots B_3\rangle\rangle\ulcorner P\urcorner = N\ulcorner P\urcorner. \end{array}$$

3. (a) Toon aan dat er een term E is zodat

$$\begin{array}{rcl} E\ulcorner 2n\urcorner &=& \mathbf{true}; \\ E\ulcorner 2n+1\urcorner &=& \mathbf{false}. \end{array}$$

[Hint. Zorg dat $E\ulcorner 0\urcorner = \mathbf{true}$ en $E\ulcorner n+1\urcorner = F_{\mathrm{neg}}(E\ulcorner n\urcorner)$, waarbij F_{neg} verleden week ingevoerd is op het werkcollege.]

(b) Toon aan dat er een term H is zodat

$$\begin{array}{rcl} H\ulcorner 2n\urcorner &=& \ulcorner n\urcorner \\ H\ulcorner 2n+1\urcorner &=& \ulcorner n\urcorner \end{array}$$

[Hint. Zorg dat $H\ulcorner 0\urcorner = \ulcorner 0\urcorner$ en

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}l} H\ulcorner n+1\urcorner &=& H\ulcorner n\urcorner, & \text{als } E\ulcorner n\urcorner = \mathbf{true} \\ H\ulcorner n+1\urcorner &=& H\ulcorner n\urcorner + 1, & \text{als } E\ulcorner n\urcorner = \mathbf{false}. \end{array}$$

Dat is zo als $H\ulcorner n+1\urcorner = E\ulcorner n\urcorner(H\ulcorner n\urcorner)(H\ulcorner n\urcorner + 1)$ ($= A\ulcorner n\urcorner H$, voor zekere A); hoe kun je "+1" op de $\ulcorner n\urcorner$ krijgen?]

Oplossing.

(a) We willen $E\ulcorner 0\urcorner = \mathbf{true}$ en $E\ulcorner n+1\urcorner = F_{neg}(E\ulcorner n\urcorner)$. Om de methode van BGP toe te passen kiezen we $A_1 = \lambda x.\mathbf{true}$ en $A_2 = \lambda xy.F_{neg}(yx)$. Dan is er een E met

$E\ulcorner 0\urcorner = A_1 E = \mathbf{true}$

$E\ulcorner n+1\urcorner = A_2\ulcorner n\urcorner E = F_{neg}(E\ulcorner n\urcorner)$.
Inderdaad, met $E \triangleq \langle\langle B_1, B_2\rangle\rangle$ met $B_1 = \lambda z.A_1\langle z\rangle$ en $B_2 = \lambda tz.A_2 t\langle z\rangle$. Dit werkt. Dus $E =$ $\langle\langle \lambda z.(\lambda x.\mathbf{true})z, \lambda tz.(\lambda xy.F_{neg}(yx))tz\rangle\rangle = \langle\langle \lambda z.\mathbf{true}, \lambda tz.F_{neg}(zt)\rangle\rangle$.

(b) $H\ulcorner 0\urcorner = \ulcorner 0\urcorner = A_1 H$, dus $A_1 = \lambda x.\ulcorner 0\urcorner$.
$H\ulcorner n+1\urcorner = E\ulcorner n\urcorner(H\ulcorner n\urcorner)(H\ulcorner n\urcorner + 1) = A_2\ulcorner n\urcorner H$
Dus $A_2 = \lambda xy.Ex(yx)(G(yx))$, waarbij G de functie is zodat $Gn = \lambda e.e\mathsf{U}_2^2 ne$: dan geldt $G\ulcorner n\urcorner = \ulcorner n+1\urcorner$ in de BGP codering. Wederom: neem $B_1 = \lambda z.A_1\langle z\rangle$ en

$B_2 = \lambda tz.A_2 t\langle z\rangle$, dan voldoet
$E = \langle\langle B_1, B_2\rangle\rangle = \langle\langle \lambda z.(\lambda x.\ulcorner 0\urcorner)z, \lambda tz.(\lambda xy.Ex(yx)(G(yx)))tz\rangle\rangle =$
$\langle\langle \lambda z.\ulcorner 0\urcorner, \lambda tz.Et(zt)(G(zt))\rangle\rangle$.