Opdrachten college reflectie: Combinatoren (04.12.2013)

In de opgaven staat $=$ voor $=_{\mathsf{CL}}$.

1. Construeer in ieder item een term P van CL met zo min mogelijk verabelen zodat geldt:

$$\begin{aligned} Py &= yx && (1)\\ Pxy &= yx && (2)\\ Pxy &= y && (3)\\ Px &= x(xx) && (4)\\ Pxy &= xxx && (5)\\ Pxy &= xyy && (6)\\ Pxy &= x(yy). && (7) \end{aligned}$$

2. Construeer in ieder item een term Q zonder variabelen zodat geldt:

$$\begin{aligned} Q &= Q\mathbf{K} && (8)\\ Qx &= xQ && (9)\\ Q &= Q\mathbf{II} && (10)\\ Qx &= Qxx. && (11) \end{aligned}$$

3.* Indien we aan CL het axioma $P = Q$ toevegen en kunnen bewijzen $U = V$, dan schrijven we $P = Q \vdash U = V$. Laat zien

   (a) $\mathbf{I} = \mathbf{K} \vdash x = y$
   $\mathbf{I} = \mathbf{S} \vdash x = y$
   $\mathbf{K} = \mathbf{S} \vdash x = y.$

   (b) We nemen aan dat $\nvdash x = y$, of in andere notatie $x \neq_{\mathsf{CL}} y$. Dit is juist maar bewijzen we niet. Hieruit volgt meteen met (a) dat

$$\mathbf{I} \neq \mathbf{K},\ \mathbf{I} \neq \mathbf{S},\ \mathbf{K} \neq \mathbf{S}.$$

   Toon aan $\mathbf{KK} \neq \mathbf{K}$.

   (c) Toon aan dat er geen termen F, G zonder variabelen zijn zodat

$$F(xy) = x,\ G(xy) = y.$$

   [Hint. Aan een uitkomst van een berekening FA kun je niet zien wat het argument is noch welke functie je hebt gebruikt. Bijvoorbeeld $0 \times 1 = 0 \times 2$ en $2^2 = \sqrt{16}$.]