

Exercises Lambda Calculus (week 8, 15.01.2014)

Proeftentamen 1.

1. Los op (vindt steeds een term F zodat voor alle termen X, Y, Z geldt):

- (a) $FX = X \backslash X$.
- (b) $FXY = YFX$.
- (c) Laat zien dat er een term F is zodat voor all termen X geldt

$$FX = X \ulcorner F \urcorner.$$

[Hint. Vind een H zodat $HF = \lambda x.xF$ en pas de tweede fixed point stelling toe op H .]

2. (a) Vorige week hadden we een V geconstrueerd zodat

$$\begin{aligned} V \ulcorner x \urcorner &= \mathbf{true} \\ V \ulcorner PQ \urcorner &= V \ulcorner P \urcorner \\ V \ulcorner \lambda x.P \urcorner &= \mathbf{false}. \end{aligned}$$

Evenzo kunnen we een N construeren zodat

$$\begin{aligned} N \ulcorner x \urcorner &= \mathbf{true} \\ N \ulcorner PQ \urcorner &= F_{\text{and}}(V \ulcorner P \urcorner)(F_{\text{and}}(N \ulcorner P \urcorner)(N \ulcorner Q \urcorner)) \\ N \ulcorner \lambda x.P \urcorner &= N \ulcorner P \urcorner. \end{aligned}$$

de term F_{and} is verleden week ingevoerd op het werkcollege.

Bepaal hiermee $N \ulcorner \lambda x.x \urcorner$ en $N \ulcorner \lambda x.lx \urcorner$.

- (b) Bonus opgave. Schrijf N uit.
3. (a) Toon aan dat er een term E is zodat

$$\begin{aligned} E \ulcorner 2n \urcorner &= \mathbf{true}; \\ E \ulcorner 2n + 1 \urcorner &= \mathbf{false}. \end{aligned}$$

[Hint. Zorg dat $E \ulcorner 0 \urcorner = \mathbf{true}$ en $E \ulcorner n + 1 \urcorner = F_{\text{neg}}(E \ulcorner n \urcorner)$, waarbij F_{neg} verleden week ingevoerd is op het werkcollege.]

- (b) Toon aan dat er een term H is zodat

$$\begin{aligned} H \ulcorner 2n \urcorner &= \ulcorner n \urcorner \\ H \ulcorner 2n + 1 \urcorner &= \ulcorner n \urcorner \end{aligned}$$

[Hint. Zorg dat $H \ulcorner 0 \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner$ en

$$\begin{aligned} H \ulcorner n + 1 \urcorner &= H \ulcorner n \urcorner, & \text{als } E \ulcorner n \urcorner &= \mathbf{true} \\ H \ulcorner n + 1 \urcorner &= H \ulcorner n \urcorner + 1, & \text{als } E \ulcorner n \urcorner &= \mathbf{false}. \end{aligned}$$

Dat is zo als $H \ulcorner n + 1 \urcorner = E \ulcorner n \urcorner(H \ulcorner n \urcorner)(H \ulcorner n \urcorner + 1)$ ($= A \ulcorner n \urcorner H$, voor zekere A); hoe kun je “+1” op de $\ulcorner n \urcorner$ krijgen?]