KATHOLIEKE UNIVERSITEIT NIJMEGEN

Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen **Formeel Denken Schakelcursus - UITWERKINGEN**
Woensdag 19 jan 2004, 10.30 – 12.30, HG00.304
Het maximaal aantal punten dat per opgave behaald kan worden staat in de kantlijn. (Maximaal 50 punten in totaal.) **Aan deze uitwerkingen kunne geen rechten worden ontleend**

---

1. (**Propositielogica**) We introduceren een nieuw voegteken, $\uparrow$ met de volgende waarheidstabel.

a	b	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(5) (a) Geef een propositie die logisch equivalent is met $a \uparrow b$ en die alleen de voegtekens $\wedge$ en $\neg$ bevat.

Antwoord $\neg(a \wedge b)$ en dan mbv een waarheidstabel laten zien dat het klopt.

(5) (b) Geef een propositie die logisch equivalent is met $\neg a$ en die alleen het voegteken $\uparrow$ bevat.

Antwoord $a \uparrow a$ en dan mbv een waarheidstabel laten zien dat het klopt.

(5) (c) Ga na of $a \to b \equiv a \uparrow (a \uparrow b)$.

Antwoord Ja, laat zien dat ze dezelfde waarheidstabel hebben.

(5) (d) Laat zien dat het volgende geldt: Als $\models f$ en $\models f \uparrow g$, dan $\models \neg g$ (voor alle proposities f en g).

Antwoord Stel $\models f$ en $\models f \uparrow g$. $\models f \uparrow g$ wil dat zeggen dat in de waarheidstabel van $f \uparrow g$ alleen 1-en voorkomen. Dat beteken dat er in de kolom van f en g nooit tegelijk een 1 staat. Maar, in de kolom van f staan alleen 1-en, want $\models f$, dus staan in de kolom van g alleen 0-en. Dus $\models \neg g$.

2. (**Predicatenlogica**) Bekijk het volgende woordenbooek

M	verzameling van alle mensen
t	Truus $\in M$
$H(x,y)$	x houdt van y
$G(x,y)$	x gaat uit met y

(5) (a) Formaliseer de zin “Truus gaat alleen uit met mensen van wie ze houdt.”

Antwoord $\forall x(G(t,x) \to H(t,x))$

(5) (b) Formaliseer de zin “Behalve van zichzelf, houdt een mens maar van hooguit één persoon.”

Antwoord $\forall x(H(x,x) \wedge \forall y,z,v(H(x,y) \wedge H(x,z) \wedge H(x,v) \to y = z \vee y = v))$

Antwoord (ook goed) $\forall x(H(x,x) \wedge \forall y,z(H(x,y) \wedge H(x,z) \to y = x \vee y = z))$

(5) (c) Formaliseer de zin “Als je van iemand houdt, houd je ook van jezelf.”

Antwoord $\forall x(\exists y(H(x,y)) \to H(x,x))$

3. (**Talen**) Laat $\Sigma = \{a, b\}$.

(5) (a) Geef een reguliere expressie voor de volgende taal L_1.

$$L_1 := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ bevat hooguit twee } a'\text{s}\}.$$

Antwoord $b^*(a \cup \lambda)b^*(a \cup \lambda)b^*$

(5) (b) Geef een contextvrije grammatica voor de volgende taal L_2.

$$L_2 := \{a^p b^n a^n b^p \mid n, p \in \mathbb{N}\}.$$

Antwoord

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid A \\ A & \to & bAa \mid \lambda \end{array}$$

(5) (c) Beschouw de volgende grammatica G_1:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aAaSb \mid b \\ A & \to & Aaa \mid aa \end{array}$$

Laat zien (m.b.v. een invariant) dat $aaabb \notin \mathcal{L}(G_1)$. **Antwoord** Als invariant nemen we “$P(w) := \#a$ in w is even”. Deze eigenschap geldt voor $w = S$ en blijft behouden onder de productieregels:

$$\begin{array}{lcl} \dots S \dots & \to & \dots aAaSb \dots \\ \dots S \dots & \to & \dots b \dots \\ \dots A \dots & \to & \dots Aaa \dots \\ \dots A \dots & \to & \dots aa \dots \end{array}$$

In ieder van deze 4 gevallen is het zo dat als er links een even aantal a’s staat, dan rechts ook. Dus P is een invariant, dus als w in de $L(G_1)$ zit dan geldt $P(w)$, dus $w \notin L(G_1)$.

(**Einde**)