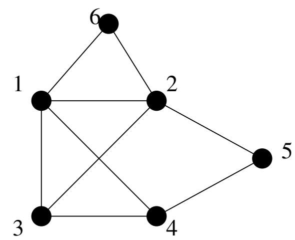
Toets Formeel denken, **Combinatoriek**

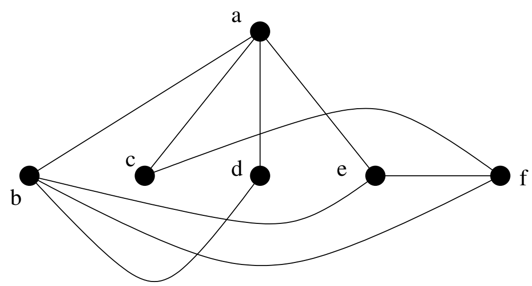
14 november 2003

Vermeld naam en studentnummer.
Puntentelling: voor ieder onderdeel staat in de kantlijn het aantal punten dat maximaal behaald kan worden.

1. Bekijk de volgende twee graphen G1 en G2:



G1



G2

(1) (a) Is G1 planair?

(1) (b) Is er een Eulerpad in G1?

(1) (c) Is er een Eulercircuit in G2?

(1) (d) Is er een Hamiltonpad in G2?

(1) (e) Zijn G1 en G2 isomorf?

2. Bekijk de driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1 \\
\vdots&&&&\vdots&&&&&&\vdots&&&&\vdots
\end{array}$$

(1) (a) Laat zien dat de som van de getallen op niveau $n+1$ altijd $2\times$ de som van de getallen op niveau n is. (Hint: Denk aan de definitie van de eerste driehoel van Pascal.)

(1) (b) Bewijs dat voor alle n in $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (1)$$

(Hint: gebruik onderdeel a.)

Z.O.Z.

3. We bekijken een variant van de Fibonacci-rij.
We hebben een konijnensoort die zich als volgt voortplant: zodra een konijn 2 weken oud is krijgt het (gemiddeld) iedere week 2 jongen. (Dus deze konijnen krijgen gemiddeld 2× zoveel jongen als die uit het voorbeeld op het college.)
We beginnen in week 1 met 3 jonge konijnen, dus als k_n het aantal konijnen in week n is hebben we

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \\ k_2 &= 3 \end{aligned}$$

(1) (a) Schrijf een recursieve betrekking op voor het aantal konijnen dat je hebt in een week. (Dus: schrijf k_{n+2} als een formule van k_{n+1} en k_n.)

(2) (b) Bewijs (met inductie) dat

$$k_n = 2^n + (-1)^{n+1}$$

(Je mag gebruik maken van $(-1)^{n+2} + 2 \times (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$.)