FLGA - exercises lecture 4

4.2.1 Stel dat L_1 regulier is. Dan kan ik het pomplemma toepassen op L_1, d.w.z:

Er is een getal $k \geq 1$, zodat voor elk woord $w \in L$ met $|w| \geq k$ geldt:

Er zijn woorden x, y en z met:

- $w = xyz$
- $|y| \geq 1$
- $|xy| \leq k$
- Voor elke $n \in \mathbb{N}$: $xy^n z \in L$

Bekijk het woord $w' = a^k b^{k+1}$.

Dan: $w' \in L_1$ en $|w'| \geq k$, dus volgens het pomplemma: er zijn woorden x, y en z met

$a^k b^{k+1} = xyz$, met $|y| \geq 1$, $|xy| \leq k$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$: $xy^n z \in L_1$

$|xy| \leq k$ dus ik weet dat x en y alleen uit a'tjes bestaan, zeg $x = a^i$ en $y = a^j$ met $i+j \leq k$, $j > 0$. Dan $w' = \underbrace{a^i}_{x} \underbrace{a^j}_{y} \underbrace{a^{k-i-j} b^{k+1}}_{z}$ en dan $a^i (a^j)^n a^{k-i-j} b^{k+1} \in L_1$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dus ook

voor $n = 2$: $a^i (a^j)^2 a^{k-i-j} b^{k+1} = a^{i+2j+k-i-j} b^{k+1}$

$= a^{k+j} b^{k+1} \in L_1$

Maar $k+j \geq k+1$, want $j \geq 1$, dus $a^{k+j} b^{k+1} \notin L_1$

Tegenspraak!

De aanname "L_1 is regulier" is dus onjuist, conclusie: L_1 is niet regulier.

4.2.2. Stel $L_2 := \{a^p b^n \mid p > n\}$ is regulier.
Dan is er een DFA M voor de taal L_2.
Maak M' door alle a's in b's te veranderen en alle b's in a's. Dan is de taal van M': $L_2' := \{b^p a^n \mid p > n\}$, dus L_2' is regulier.
Maar dan is $L_2'^R$ ook regulier, en dat is $L_2'^R = \{b^p a^n \mid p > n\}^R = \{a^n b^p \mid p > n\} = L_1$.
Dus L_1 is regulier. Maar bij 4.2.1 hebben we bewezen: L_1 is niet regulier. Tegenspraak!
L_2 is dus niet regulier.