①

Exam PwCA (2IMF15) 2019

1) $\lambda f : ((\alpha \to \beta \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta).\ f\,(\lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . y)\,(\lambda v : \gamma .\ \lambda w : \beta . v)$

$: ((\alpha \to \beta \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta)) \to \delta$

$\cancel{f : ((\alpha \to \beta) \to \beta}$

$\boxed{f : (\alpha \to \beta \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta}$

$\boxed{x : \alpha}$

$\boxed{y : \beta}$

$y : \beta$

$\lambda y : \beta . y : \beta \to \beta$

$\lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . y : \alpha \to \beta \to \beta$

$\boxed{v : \gamma}$

$\boxed{w : \beta}$

$v : \gamma$

$\lambda w : \beta . v : \beta \to \gamma$

$\lambda v : \gamma . \lambda w : \beta . v : \gamma \to \beta \to \gamma$

$f\,(\lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . y) : (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta$

$f\,(\lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . y)\,(\lambda v : \gamma . \lambda w : \beta . v) : \delta$

$\lambda f : (\alpha \to \beta \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta .\ f\,(\lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . y)\,(\lambda v : \gamma . \lambda w : \beta . v)$

$: ((\alpha \to \beta \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \gamma) \to \delta) \to \delta$

Exam PwCA 2019

$\boxed{x : ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta}$

$\boxed{y : \alpha}$

$\boxed{z : \alpha \to \beta}$

$z\,y : \beta$

$\lambda z : \alpha \to \beta.\ z y : (\alpha \to \beta) \to \beta$

$x\,(\lambda z : \alpha \to \beta.\ z y) : \beta$

$\lambda y : \alpha.\ x\,(\lambda z : \alpha \to \beta.\ z y) \ : \ \alpha \to \beta$

$\lambda x : ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta.\ \lambda y : \alpha.\ x\,(\lambda z : \alpha \to \beta.\ z y) :$

$(((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta) \to \alpha \to \beta$

Exa PwCA 2019

(3) $\lambda x^A\, \lambda y^B\, \underbrace{x^A(\lambda z^C. \underbrace{\underbrace{x^A\, z^C}_{D}\, y^B}_{E})}_{F} \;:\; A \to B \to F$

$$\begin{cases} A = C \to D \\ D = B \to E \\ A = (C \to E) \to F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \to D \\ D = B \to E \\ C \to D = (C \to E) \to F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \to D \\ D = B \to E \\ C = C \to E \\ D = F \end{cases}$$

FAIL

not typable

$\lambda x^A\, \lambda y^B .\, \underbrace{x^A(\lambda z^C. \underbrace{\underbrace{x^A\, y^B}_{D}\, z^C}_{E})}_{F} \;:\; A \to B \to F$

$$\begin{cases} A = B \to D \\ D = C \to E \\ A = (C \to E) \to F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \to D \\ D = C \to E \\ B \to D = (C \to E) \to F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \to D \\ D = C \to E \\ B = C \to E \\ D = F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \to C \to E \\ D = C \to E \\ B = C \to E \\ F = C \to E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (C \to E) \to C \to E \\ D = C \to E \\ B = C \to E \\ F = C \to E \end{cases}$$

pt is $((C \to E) \to C \to E) \to (C \to E) \to C \to E$

Exam PwCA 2019

4)

$\boxed{x : T}$

$\boxed{\lambda y : T}$

$y : T \to T$

$yy : T$

$\lambda y . yy : T \to T$

$x : (T \to T) \to T \to T$

$x(\lambda y . yy) : T \to T$

$x(\lambda y . yy)\, x : T$

A

Exam PwCA 2019

5(a) $\text{join} := \lambda t_1, t_2 : \mathbb{T}.\ \lambda \alpha : *.\ \lambda \ell : \mathbb{N} \to \alpha.\ \lambda j : \alpha \to \alpha \to \alpha.$

$j\,(t_1\, \alpha\, n\, \ell)\,(t_2\, \alpha\, n\, \ell)$

(b) $\text{leftmost}\ (\text{leaf}\ n) = n$
$\text{leftmost}\ (\text{join}\ t_1 t_2) = \text{leftmost}\ t_1$

Iterative Scheme: $f(\text{leaf}\ n) = g\,n$
$f(\text{join}\ t_1 t_2) = h\,(f t_1)(f t_2)$ (eq)

with $g : \mathbb{N} \to \tau$
$h : \tau \to \tau \to \tau$

Then $f := \lambda t : \mathbb{T}.\ t\, \tau\, g\, h : \mathbb{T} \to \tau$ satisfies (eq)

So $\text{leftmost} = \lambda t : \mathbb{T}.\ t\, \mathbb{N}\, (\lambda x : \mathbb{N}.\ x)\, (\lambda y, z : \mathbb{N}.\ y)$

Alt: $\text{leftmost} = \lambda t : \mathbb{T}.\ \lambda \alpha : *.\ \lambda \ell : \mathbb{N} \to \alpha.\ \lambda j : \alpha \to \alpha \to \alpha.$
$t\, \alpha\, \ell\, (\lambda y, z : \alpha.\ y)$

(c) $F\ 0 = \text{join}\ (\text{leaf}\ 0)\ (\text{leaf}\ 0) = c$
$F(S n) = \text{join}\ (\text{leaf}\ 0)\ (F n) = g\,(F n)$

with $c : \mathbb{T}$, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, following Iterative Scheme for $\mathbb{N}$

So $F := \lambda n : \mathbb{N}.\ n\, \mathbb{T}\, (\text{join}\ (\text{leaf}\ 0)(\text{leaf}\ 0))\, (\lambda t.\ \text{join}\ (\text{leaf}\ 0)\ t))$

Alt: $F := \lambda n : \mathbb{N}.\ \lambda \alpha : *.\ \lambda \ell : \mathbb{N} \to \alpha.\ \lambda j : \alpha \to \alpha \to \alpha.$
$n\, \alpha\, (j\,(\ell 0)\,(\ell 0))\, (\lambda x : \alpha.\ j\,(\ell 0)\, x)$

(6)

Exam PwCA 2019

6 $\Gamma =$

$A : *$

$R : A \to A \to *$

$f : A \to A$

$s : \Pi x y : A.\ R x (f y) \to R (f y) x$

$t : \Pi x y z : A.\ R x y \to R y z \to R x (f z)$

In Γ:

$x : A$

$y : A$

$h : R x (f y)$

$s x y h : R (f y) x$

$t x (f y) x : R x (f y) \to R (f y) x \to R x (f x)$

$t x (f y) x h : R (f y) x \to R x (f x)$

$t x (f y) x h (s x y h) : R x (f x)$

$\lambda h : R x (f y).\ t x (f y) x h (s x y h) : R x (f y) \to R x (f x)$

$\lambda x, y : A.\ \lambda h : R x (f y).\ t x (f y) x h (s x y h) :$

$\Pi x y : A.\ R x (f y) \to R x (f x)$

(7)

7 Exa PaCA 2019

(a)

$P : A \to *$

$h : P(f\,a)$

$k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y$

$k\,a : P(f\,a) \to P\,a$

$k\,a\,h : P\,a$

$\lambda h : P(f\,a) .\, \lambda k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y .\, k\,a\,h :$

$P(f\,a) \to (\Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y) \to P\,a$

$\lambda P : A \to * .\, \lambda h : P(f\,a) .\, \lambda k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y .\, k\,a\,h \; : \; Q\,a$

(b)

$z : A$

$g : Q(f\,z) = \Pi P : A \to * .\, P(f\,a) \to (\Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y) \to P(f\,z)$

$P : A \to *$

$h : P(f\,a)$

$k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y$

$g\,P\,h\,k : P(f\,z)$

$k\,z\,(g\,P\,h\,k) : P\,z$

$\lambda h : P(f\,a) .\, \lambda k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y .\, k\,z\,(g\,P\,h\,k) :$

$P(f\,a) \to (\Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y) \to P\,z$

$\underbrace{\lambda P : A \to * .\, \lambda h : P(f\,a) .\, \lambda k : \Pi y : A .\, P(f\,y) \to P\,y .\, k\,z\,(g\,P\,h\,k)}_{G} : Q\,z$

$\lambda z : A .\, \lambda g : Q(f\,z) .\, G \; : \; \Pi z : A .\, Q(f\,z) \to Q\,z .$