

①

$$x : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$y : \beta$$

$$z : \alpha$$

$$y : \beta$$

$$\lambda z : \alpha. y : \alpha \rightarrow \beta$$

$$x(\lambda z : \alpha. y) : \beta \rightarrow \alpha$$

$$x(\lambda z : \alpha. y) y : \alpha$$

$$\lambda y : \beta. x(\lambda z : \alpha. y) y : \beta \rightarrow \alpha$$

$$\lambda x : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow \alpha. \lambda y : \beta. x(\lambda z : \alpha. y) y :$$

$$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \rightarrow \alpha.$$

②

$$x : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$y : \alpha$$

$$z : \alpha$$

$$y : \alpha$$

$$\lambda z : \alpha. y : \alpha \rightarrow \alpha$$

$$x(\lambda z : \alpha. y) : \alpha$$

$$\lambda y : \alpha. x(\lambda z : \alpha. y) : \alpha \rightarrow \alpha$$

$$x(\lambda y : \alpha. x(\lambda z : \alpha. y)) : \alpha$$

$$\lambda x : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha. x(\lambda y : \alpha. x(\lambda z : \alpha. y)) :$$

$$((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

3

$$\lambda x^A \lambda y^B. \frac{\overbrace{x(\lambda z^C. y)}^D}{E} : A \rightarrow B \rightarrow E$$

Equations: $\begin{cases} A = (C \rightarrow B) \rightarrow D \\ D = B \rightarrow E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (C \rightarrow B) \rightarrow B \rightarrow E \\ D = B \rightarrow E \end{cases}$

So principal type is $((C \rightarrow B) \rightarrow B \rightarrow E) \rightarrow B \rightarrow E$

$$\lambda x^A \lambda y^B. \frac{\overbrace{x(\lambda z^C. x)}^D}{E} : A \rightarrow B \rightarrow E$$

Equations: $\begin{cases} A = (C \rightarrow A) \rightarrow D \\ D = B \rightarrow E \end{cases} \rightarrow \text{fail}$

So: no principal type exists.

4

$$y: \perp$$

$$x: \perp \rightarrow \perp$$

$$xy: \perp$$

$$xy: \perp \rightarrow \perp$$

$$xyx: \perp$$

$$xyx: (\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$$

$$z: \perp$$

$$z: \perp \rightarrow \perp \rightarrow \perp$$

$$zx: \perp \rightarrow \perp$$

$$zxz: \perp$$

$$\lambda z. zxz: \perp \rightarrow \perp$$

$$xy (\lambda z. zxz): \perp$$

$$\lambda y. xyx (\lambda z. zxz): \perp \rightarrow \perp$$

$$\perp = \forall \alpha: \ast. \alpha$$

$$T = \forall \alpha: \ast. \alpha \rightarrow \alpha$$

⑤ a) $\text{join} = \lambda t_1, t_2, t_3 : T. \lambda \alpha : \kappa. \lambda l : \alpha. \lambda j : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha.$
 $j(t_1 \alpha l j)(t_2 \alpha l j)(t_3 \alpha l j)$

~~⑥ a) $t_0 = \text{join leaf leaf leaf leaf leaf}$~~

⑥ b) $t_0 = \text{join leaf (join leaf leaf leaf) leaf}$

Alt $t_0 = \lambda \alpha : \kappa. \lambda l : \alpha. \lambda j : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha. j l (j l l l) l.$

⑥ c) $f := \lambda t : T. t T (\text{join leaf leaf leaf}) \text{join}$

Alt $f := \lambda t : T. \lambda \alpha : \kappa. \lambda l : \alpha. \lambda j : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha. t \alpha (j l l l) j$

⑥ a)

$x : A$

$r : \prod x y : A. R x y \rightarrow R x (f y)$

$r (f c) (f x) : R (f c) (f x) \rightarrow R (f c) (f (f x))$

$h : \prod x y : A. R x y \rightarrow R (f x) (f y)$

$h c x : R c x \rightarrow R (f c) (f x)$

$k : \prod x : A. R c x$

$k x : R c x$

$h c x (k x) : R (f c) (f x)$

$r (f c) (f x) (h c x (k x)) : R (f c) (f (f x))$

$\lambda x : A. r (f c) (f x) (h c x (k x)) : \prod x : A. R (f c) (f (f x))$

66

$x, y: A$

$g: R(fx) y$

$h: \prod x, y: A. Rxy \rightarrow R(fx) (fy)$

$h(fx) y: R(fx) y \rightarrow R(f(fx)) (fy)$

$h(fx) y g: R(f(fx)) (fy)$

$r: \prod x, y: A. Rxy \rightarrow R(x) (fy)$

$r(f(fx)) (fy): R(f(fx)) (fy) \rightarrow R(f(fx)) (f(fy))$

$r(f(fx)) (fy) (h(fx) y g): R(f(fx)) (f(fy))$

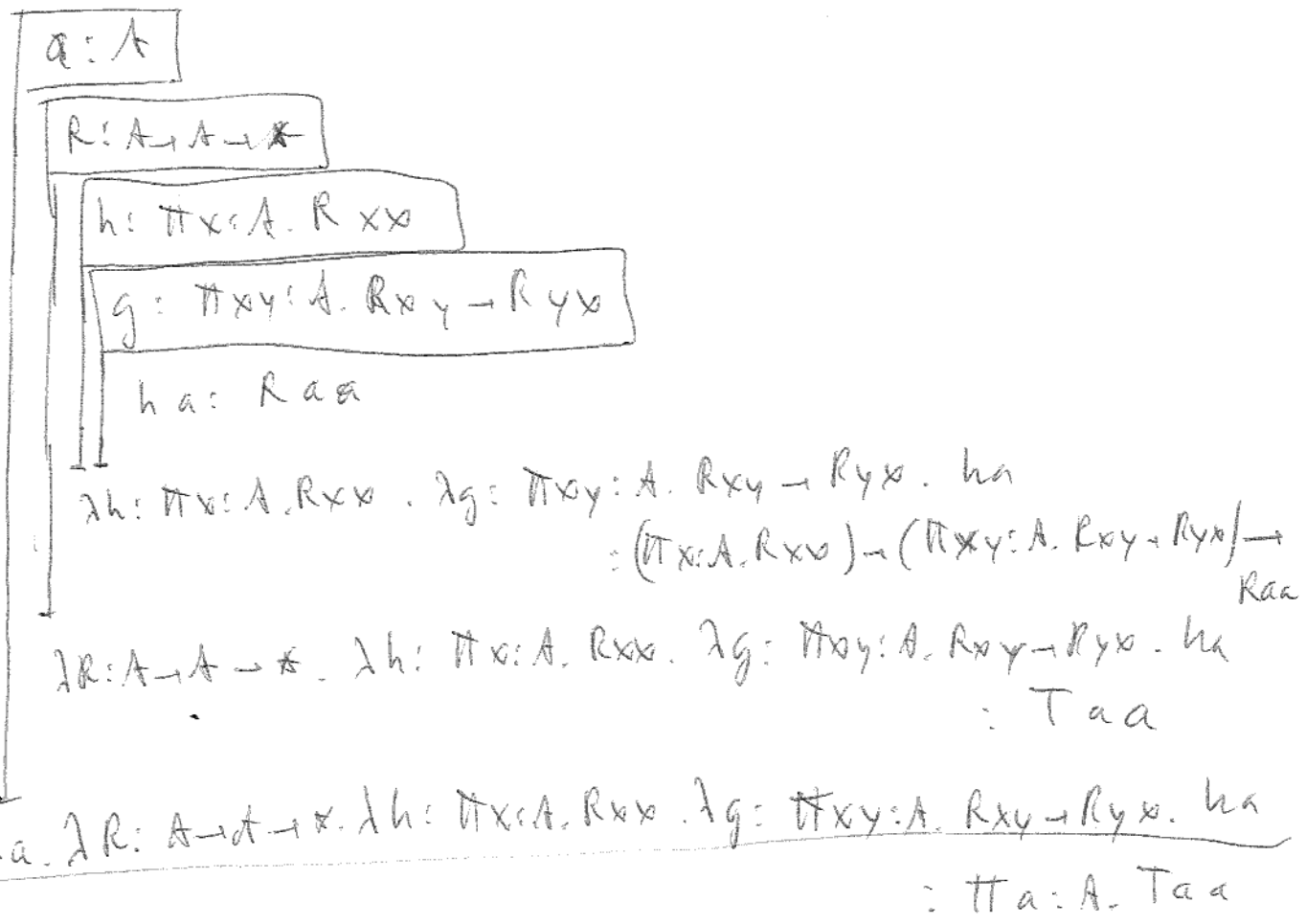
$\lambda g: R(fx) y. r(f(fx)) (fy) (h(fx) y g):$

$R(fx) y \rightarrow R(f(fx)) (f(fy))$

$\prod x, y: A. \lambda g: R(fx) y. r(f(fx)) (fy) (h(fx) y g):$

$\prod x, y: A. R(fx) y \rightarrow R(f(fx)) (f(fy))$

7a



7b

