Regels voor Natuurlijke Deductie (naar [1])

regel	Coq commando
$$\frac{}{\Sigma, \alpha \vdash \alpha}\text{hyp}$$	`assumption.` `exact H.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \to \beta \qquad \Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \beta}{\to}E \ (\textit{modus ponens})$$	`imp_e` α`.`
$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \to \beta}{\to}I$$	`imp_i H.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \qquad \Sigma \vdash \neg\alpha}{\Sigma \vdash \beta}\neg E \ (\textit{inconsistentie})$$	`neg_e` α`.`
$$\frac{\Sigma, \neg\beta \vdash \alpha \qquad \Sigma, \neg\beta \vdash \neg\alpha}{\Sigma \vdash \beta}\neg E{*} \ (\textit{bewijs uit het ongerijmde})$$	`neg_e'` α `H.`
$$\frac{\Sigma, \beta \vdash \alpha \qquad \Sigma, \beta \vdash \neg\alpha}{\Sigma \vdash \neg\beta}\neg I \ (\textit{weerlegging})$$	`neg_i` α `H.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \alpha}\wedge 1E$$	`con_e1` β`.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \beta}\wedge 2E$$	`con_e2` α`.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \qquad \Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}\wedge I$$	`con_i.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta \qquad \Sigma, \alpha \vdash \gamma \qquad \Sigma, \beta \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\vee E \ (\textit{gevalsonderscheiding})$$	`dis_e (`α `\/` β`) G H.`
$$\frac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta}\vee 1I$$	`dis_i1.`
$$\frac{\Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta}\vee 2I$$	`dis_i2.`

[1] J.F.A.K. van Benthem, H.P. van Ditmarsch, J. Ketting, J.S. Lodder, W.P.M. Meyer-Viol. *Logica voor informatica, derde editie.* Pearson Education. ISBN 90-430-0722-6. maart 2003.

$\dfrac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x{:=}t]} \forall E$ *(instantiatie)*	`all_e (forall x, α) t.` term t is een zeker speciaal geval vrije variabelen in t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x{:=}\ t]$
$\dfrac{\Sigma \vdash \alpha[x{:=}y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha} \forall I$ *(generalisatie)*	`all_i y.` y is vrij in $\alpha[x{:=}y]$ y is niet vrij in Σ noch in $\forall x, \alpha$
$\dfrac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x{:=}y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma} \exists E$	`exi_e (exists x, α) y H.` y is vrij in $\alpha[x{:=}y]$ y is niet vrij in γ noch in Σ noch in $\exists x, \alpha$
$\dfrac{\Sigma \vdash \alpha[x{:=}t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha} \exists I$ *(abstractie)*	`exi_i t.` term t is een zeker speciaal geval vrije variabelen in t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x{:=}\ t]$
$\dfrac{}{\Sigma \vdash \alpha \vee \neg\alpha}$ LEM *(law of excluded middle)*	`LEM.`

Verklaring notatie

Σ	een verzameling beweringen
α, β, γ	beweringen
x, y	variabelen
t	term
G, H	namen voor nieuwe aannames

Een verzameling aannames schrijven we als α, β, γ. De verzameling aannames Σ, α wordt gevormd door Σ uit te breiden met α.

De bewering $\alpha[x{:=}t]$ ontstaat uit de bewering α door daarin alle vrije voorkomens van x te vervangen door t.

Voorbeeld: $P\ x\ \wedge\ \neg P\ x \to (\forall x, P\ x)[x{:=}t1{+}d]$ staat voor
$P\ (t1{+}d) \wedge \neg P\ (t1{+}d) \to (\forall x, P\ x)$.

Let op de analogieën tussen $\wedge$ en $\forall$ en tussen $\vee$ en $\exists$ en op de dualiteiten tussen $\wedge$ en $\vee$ en tussen $\forall$ en $\exists$.