Radboud Universiteit Nijmegen
FNWI

Examenonderdeel **Semantiek van Logisch Programmeren** woensdag 19 januari 2011, 13:30 – 15:30 uur in Hg00.071
Het maximaal aantal punten dat per opgave behaald kan worden staat in de kantlijn. (Maximaal 100 punten in totaal.)

1. Beschouw de volgende zinnen in eerste orde predicaten logica.

   (a) $\forall x(A(x) \to \exists y((B(y) \vee C(y)) \wedge D(x,y)))$
   (b) $E \to \forall x((B(x) \wedge \neg F(x)) \to G(x))$
   (c) $H \to \forall x(C(x) \to G(x))$
   (d) $\forall x \forall y((A(x) \wedge D(x,y) \wedge G(y)) \to \neg I(x))$

   Bewijs $(E \wedge H) \to \forall x((A(x) \wedge I(x)) \to \exists y(F(y) \wedge D(x,y)))$ uit 1-4 met resolutie . (20)

   (Hint: $\Gamma \vdash G$ desda $\Gamma, \neg G \vdash \bot$)

   Zet eerst iedere formule om naar een clausule. (30)
   (Hint: Prenex normaal vorm, Skolem en CNF).

(a) $\forall x(A(x) \to \exists y((B(y) \vee C(y)) \wedge D(x,y)))$
$A(x) \to \exists y((B(y) \vee C(y)) \wedge D(x,y))$
$\exists y A(x) \to ((B(y) \vee C(y)) \wedge D(x,y))$
$A(x) \to ((B(f(x)) \vee C(f(x))) \wedge D(x, f(x))$ (introduceer een nieuwe Skolem functie f)
Dit levert twee clausules:
1a. $B(f(x)), C(f(x)) \leftarrow A(x)$
1b. $D(x, f(x)) \leftarrow A(x)$

(b) $E \to \forall x((B(x) \wedge \neg F(x)) \to G(x))$
$\forall x E \to ((B(x) \wedge \neg F(x)) \to G(x))$
$(E \wedge B(x) \wedge \neg F(x)) \to G(x))$
Als clausule:
2. $F(x), G(x) \leftarrow E, B(x)$

(c) $H \rightarrow \forall x(C(x) \rightarrow G(x))$
Als clausule:
3. $G(x) \leftarrow H, C(x)$

(d) $\forall x \forall y(A(x) \wedge D(x,y) \wedge G(y) \rightarrow \neg I(x))$
Als clausule:
4. $\leftarrow A(x), D(x,y), G(y), I(x))$

Ten slotte de negatie van de goal:
$\neg((E \wedge H) \rightarrow \forall x(A(x) \wedge I(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge D(x,y))))$
$(E \wedge H) \wedge \neg\forall x(A(x) \wedge I(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge D(x,y)))$
$(E \wedge H) \wedge \exists x(A(x) \wedge I(x) \wedge \forall y(\neg F(y) \vee \neg D(x,y)))$
Introduceer een nieuwe Skolem constante a:
$E \wedge H \wedge A(a) \wedge I(a) \wedge \forall y(\neg F(y) \vee \neg D(a,y)))$
Als clausules:
5a. $E \leftarrow$
5b. $H \leftarrow$
5c. $A(a) \leftarrow$
5d. $I(a) \leftarrow$
5e. $\leftarrow F(y), D(a,y)$

Alles op een rij:
1a. $B(f(x)), C(f(x)) \leftarrow A(x)$
1b. $D(x, f(x)) \leftarrow A(x)$
2. $F(x), G(x) \leftarrow E, B(x)$
3. $G(x) \leftarrow H, C(x)$
4. $\leftarrow A(x), D(x,y), G(y), I(x))$
5a. $E \leftarrow$
5b. $H \leftarrow$
5c. $A(a) \leftarrow$
5d. $I(a) \leftarrow$
5e. $\leftarrow F(y), D(a,y)$

Hier uit leiden we af:
6. $\leftarrow A(a), D(a,y), G(y)$ [4,5d]
7. $\leftarrow D(a,y), G(y)$ [6,5c]
8. $\leftarrow A(a), G(f(a))$ [7,1b]
9. $\leftarrow G(f(a))$ [8,5c]
10. $G(x) \leftarrow C(x)$ [3,5b]
11. $\leftarrow C(f(a))$ [9,10]
12. $B(f(a)) \leftarrow A(a)$ [1a,11]
13. $B(f(a)) \leftarrow$ [12,5c]
14. $F(f(a)), G(f(a)) \leftarrow E$ [2,13]

15. $F(f(a)), G(f(a)) \leftarrow$ [5a,14]
16. $F(f(a)) \leftarrow$ [15,9]
17. $\leftarrow D(a, f(a))$ [16,5e]
18. $\leftarrow A(a)$ [17,1b]
19. $\leftarrow$ [18,5c]

2. Bekijk het volgende logische programma (0 en ∞ zijn constanten, s is een functie symbool):

$$L(0,x) \quad \leftarrow \tag{1}$$
$$L(sx,\infty) \quad \leftarrow L(x,\infty) \tag{2}$$
$$L(sx,sy) \quad \leftarrow L(x,y) \tag{3}$$

(a) Geef de SLD-boom voor de goal $\leftarrow L(x, ss0)$ en beschrijf alle mogelijke antwoord-substituties voor x. (10)

(b) Geef een concrete bijectie tussen het Herbrand universum en twee copieën van de natuurlijke getallen. (5)

(c) Geef een concrete beschrijving van het kleinste Herbrand model (motiveer je antwoord). (10)

[Als je niet uit deze opgave komt. Probeer het dan (voor 15pt) zonder regel 2. Wat is in dit geval het Herbrand universum?]

(a) We kunnen meteen regel 1 toepassen. De antwoord substitutie is dan $[0/x]$.
We kunnen eerst 3 en dan 1 toepassen. De antwoord substitutie is dan $[s0/x]$.
We kunnen eerst twee keer 3 en dan 1 toepassen. De antwoord substitutie is dan $[ss0/x]$.

(b) Het Herbrand universum is

$$\{0, s0, s^2 0, \ldots, \infty, s\infty, s^2\infty, \ldots\} = N_0 + N_\infty.$$

De verzameling N_0 van alle termen met een 0 is bijectief met de natuurlijke getallen. Net zo voor de verzameling N_∞ van alle termen met een ∞.

(c) Bekijk het Herbrand model M waar de interpretatie van $L(n,m)$ waar is als $n, m \in N_0$ en $n \leq m$ of $n \in N_0$ en $m \in N_\infty$ en $m \leq n$. Claim: Dit is het kleinste Herbrand model. Het is makkelijk te controleren dat het een Herbrand model is. We bewijzen: Als $M \models L(n,m)$, dan is $L(n,m)$ met SLD-resolutie af te leiden. Er zijn twee gevallen

i. $n, m \in N_0$: Pas $m - n$ keer regel 3 toe en daarna regel 1.

ii. $n \in N_0$ en $m \in N_\infty$ en $m \leq n$: Pas eerst m keer regel 3 toe. Dan $n - m$ keer regel 2 en uiteindelijk regel 1.

3. Stel dat σ de mgu is van de termen t_1, t_2 en t_3 is en dat ϱ de mgu van t_1 en t_2 is. Is σ dan een instantie van ϱ? Dwz. is er een τ zodat $\sigma{=}\tau\varrho$? Motiveer je antwoord, ihb geef de definitie van mgu. (10)

De meest algemene unificatie is de unificatie waarvan alle andere unificaties speciale gevallen zijn. Een unificatie van t_1, t_2 en t_3 is ihb. een unificatie van t_1 en t_2 en dus een instantie ϱ. Dwz. zo'n τ bestaat.

4. Bestaat er een Turing machine zodat: (15)

$$M(\ulcorner\varphi\urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{desda } PA \vdash \varphi \\ 0 & \text{desda } PA \vdash \neg\varphi \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Motiveer je antwoord.

Ja, want de verzameling van stellingen in PA is opsombaar. Dus er bestaat een machine M' zodat

$$M'(\ulcorner\varphi\urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{desda } PA \vdash \varphi \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat M' nu beurtelings werken op de invoer $\ulcorner\varphi\urcorner$ en invoer $\ulcorner\neg\varphi\urcorner$. Als M' op de eerste uitvoer termineert, return 1. Als M' op de eerste uitvoer termineert, return 0.