Rekenen

noodzakelijke voorkennis voor alle β-studenten

Jaarlijks belanden honderden eerstejaars β-studenten in het riool als gevolg van gebrekkige rekenvaardigheid. Zij voldoen niet — of niet meer — aan de norm waar veel docenten hun cursussen stilzwijgend op baseren: niveau 7+ van eindexamen vwo. En na twee maanden studie komt de onvermijdelijke uitnodiging van je studiecoördinator voor een gesprekje over een andere invulling van het leven. Met dit pamflet wil ik eventuele lacunes in vwo-rekentechniek repareren als voorbereiding op een van de studies

wiskunde
natuurkunde
informatica
informatiekunde
natuurwetenschappen
scheikunde
moleculaire levenswetenschappen
biologie
kunstmatige intelligentie

Ook hbo-instromers (jarenlang geen wiskunde meer gezien) en buitenlandse studenten (zoet gehouden met andere wiskunde) worden van harte uitgenodigd hun rekentechniek op peil te brengen, om te voorkomen dat ze in de hektiek van het eerste jaar de draad definitief kwijtraken

Je hebt bij deze cursus geen rekenmachine nodig. Sterker nog: het gebruik van zo'n tuig is streng verboden, wie zich ervan afhankelijk maakt zal in paniek raken zodra er een symbool x of andere gruwel tussen de concrete getalletjes opduikt. Maar wees gerust, na afloop mag je je tuigje weer liefdevol omhelzen, je zult zijn dagelijkse werkzaamheden dan beter begrijpen en waarderen

Wim Gielen
Akkerlaan 17
6533 BK Nijmegen
06-13176520
Huygensgebouw 03.715
024-3652296
w.gielen@math.ru.nl

1. Natuurlijke getallen

De natuurlijke getallen zijn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	······

Optellen. De som van twee kleine natuurlijke getalletjes vind je in de tabel (of ergens in je hoofd):

optelling

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Grotere getallen optellen is de mensheid een beetje verleerd, verwend door supersnelle rekenmachientjes. Het werkt zó:

$$\begin{array}{r} 87654 \\ +\;\; 63283 \\ \hline 150937 \end{array}$$

Begin rechts: $4+3=7$. Daarna $5+8=13$, die 3 noteer je en de 1 onthoud je nog even. Volgende stap: $6+2=8$, en met die 1 uit je geheugen erbij is dat 9. Zo ga je verder

Zo kun je ook meer getallen ineens optellen, ik bereken $639+1257+718$ als volgt:

$$\begin{array}{r} 639 \\ 1257 \\ +\;\; 718 \\ \hline 2614 \end{array}$$

Begin rechts: $9+7+8=24$ (4 opschrijven en 2 onthouden). Vervolgens $3+5+1=9$ plus de onthouden 2 is 11 (1 opschrijven, 1 onthouden). En zo verder

Aftrekken. Met $23-15=8$ bedoel ik $23=8+15$. Het verschil van grote getallen bereken je zó:

$$\begin{array}{r} 87654 \\ -\;\; 63283 \\ \hline 24371 \end{array}$$

Rechts: $4-3=1$. Daarna $5-8=$ paniek, ik leen een eentje: $15-8=7$. Vervolgens $6-2=4$, en nu geef ik het geleende eentje terug: 3. Zo ga je verder

Rekenregeltjes. De volgende wetmatigheden zullen je niet verbazen:

$$\begin{array}{rl} x+y=y+x & \text{(optellen is commutatief)} \\ (x+y)+z=x+(y+z) & \text{(optellen is associatief)} \\ \text{als } x+y=x+z \text{ dan } y=z & \text{(dat heet de schrapwet)} \\ x+0=x & \qquad x-(y+z)=x-y-z \\ x-x=0 & \qquad x-(y-z)=x-y+z \end{array}$$

Vermenigvuldigen. Het product van kleine getallen lees je af uit de tabel (die je van buiten kent):

vermenigvuldiging

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

In plaats van $6 \times 7 = 42$ schrijft men ook wel $6 \cdot 7 = 42$. Vermenigvuldiging met een groter getal gaat zó:

$$\begin{array}{r} 397 \\ 6 \\ \times \quad \overline{2382} \end{array}$$

Begin rechts: $6 \times 7 = 42$, je noteert 2 en onthoudt 4. Dan $6 \times 9 = 54$, plus die 4 maakt 58, je noteert 8 en onthoudt 5. Tenslorue $6 \times 3 = 18$, plus die 5 levert 23

en als je het product van twee grote getallen moet berekenen zonder rekenmachientje:

$$\begin{array}{r} 397 \\ 86 \\ \times \quad \overline{\;\;2382} \\ 3176\; \\ + \quad \overline{34142} \end{array}$$

Eerst bereken je $6 \times 397 = 2382$, daarna $8 \times 397 = 3176$. Die resultaten tel je op waarbij je die 3176 een plaatsje naar links schuift, de berekening komt dus in feite neer op $2382 + 31760 = 34142$

Rekenregeltjes. (ik kort $x \cdot y$ soms af tot xy)

$$\begin{array}{lll} xy = yx & 0 \cdot x = 0 & 1 \cdot x = x \\ x(y+z) = xy + xz & (\times \text{ is distributief over } +) & \\ x(y-z) = xy - xz & (\times \text{ is distributief over } -) & \\ xy = 0 \iff x = 0 \text{ of } y = 0 & & \end{array}$$

Deze regeltjes zul je vast wel begrijpen. Hoe kun je bijvoorbeeld inzien dat $3(b+k) = 3b + 3k$? Wel, als je ontbijt bestond uit drie broodjes kaas, dan heb je drie broodjes en drie plakjes kaas gegeten

Delen. Met een beetje geluk kun je een getal door een ander getal delen:

$$\begin{array}{rl} 3\,/\,174\,\backslash & 58 \\ -\ \underline{15}\;\; & \\ 24 & \\ -\ \underline{24} & \\ 0 & \end{array}$$

17 levert 5 porties van 3 met restant 2. Ik kopieer de 4. In 24 gaat precies 8 keer 3

Deze ontdekking noteer ik als $174 : 3 = 58$ of als $174/3 = 58$ of als $\frac{174}{3} = 58$

Delen met rest. Soms houd je nog wat over:

$$\begin{array}{r@{\,}l}
29 \,/\, 743 & \backslash\, 25 \\
-\;\underline{58} & \\
163 & \\
-\;\underline{145} & \\
18 &
\end{array}$$

Ik noteer dit als $743 : 29 = 25$ rest 18

Andere notatie: $\frac{743}{29} = 25\frac{18}{29}$

Kwadraat, derdemacht, ... We voeren enkele handige afkortingen in:

x^2	(spreek uit: x kwadraat)	betekent	$x \cdot x$	bijvoorbeeld $7^2 = 49$
x^3	(spreek uit: x tot de derde)	betekent	$x \cdot x \cdot x$	bijvoorbeeld $7^3 = 343$
x^4	(spreek uit: x tot de vierde)	betekent	$x \cdot x \cdot x \cdot x$	bijvoorbeeld $7^4 = 2401$

Enzovoorts enzovoorts. Voor de volledigheid spreken we ook nog af dat $x^0 = 1$, bijvoorbeeld $7^0 = 1$

Rekenregels. Deze afkortingen voldoen aan:

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m &= x^{n+m} \qquad & (xy)^n &= x^n y^n \\ x^n : x^m &= x^{n-m} \qquad & (x^n)^m &= x^{nm} \end{aligned}$$

Ik hoop dat je deze regeltjes niet alleen van buiten leert maar ook begrijpt. Waarom is bijvoorbeeld $p^2 \cdot p^3 = p^5$? Wel, een rijtje van twee poesjes gevolgd door een rijtje van drie poesjes, dat is een rijtje van vijf poesjes:

$$p^2 \cdot p^3 = (p \cdot p) \cdot (p \cdot p \cdot p) = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p^5$$

En waarom is $\left(p^2\right)^3 = p^6$? Omdat een rijtje van drie poesduo's niks anders is dan een rijtje van zes poesjes. Als je dus bijvoorbeeld 7^8 wilt uitrekenen, mag je dat zo doen:

$$7^8 = (7^4)^2 = 2401^2 = 5764801$$

$$\begin{array}{r}
2401 \\
\times\;\underline{2401} \\
2401 \\
9604 \\
+\;\underline{4802} \\
5764801
\end{array}$$

Gehele getallen. De gehele getallen zijn

$$\cdots\cdots \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad \cdots\cdots$$

Het rekenen met gehele getallen wordt gedirigeerd door de reeds behandelde rekenregels, aangevuld met

$$\begin{aligned} -(-x) &= x \\ 0 - x &= -x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + (-y) &= x - y \\ x \cdot (-y) &= -xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -(x+y) &= -x - y \\ -(x-y) &= y - x \end{aligned}$$

De verzameling van alle natuurlijke getallen heet $\mathbb{N}$, de verzameling van alle gehele getallen $\mathbb{Z}$:

notatie	spreek uit	betekenis
$x \in \mathbb{N}$	x is een element van $\mathbb{N}$	x is een natuurlijk getal
$x \in \mathbb{Z}$	x is een element van $\mathbb{Z}$	x is een geheel getal

Opgaven hoofdstuk 1

Opgave 1. Bereken $283 + 1729$

Opgave 2. Los x op uit $729 + x = 1000$

Opgave 3. Schrijf $y(x + 2) - (x + 3)(y - 1)$ een beetje eenvoudiger

Opgave 4. Bereken $635 \times 728 - 208 \times 728$

Opgave 5. Is $+$ distributief over $\times$?

Opgave 6. Hoe vaak kan ik met 850 euro naar mijn favo prostituée (zij rekent 36,95 euro per bezoekje)?

Opgave 7. Is delen associatief?

Opgave 8. Bewijs één van de volgende rekenregels (naar keuze) en leer de andere twee van buiten:

$$\boxed{\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x+y)(x-y) &= x^2 - y^2 \end{aligned}}$$

Opgave 9. Geef je mening over de volgende rekenregels (maar leer ze asjeblief niet van buiten), en vertel er ook even bij waarom jouw mening de juiste is

$x^3 + x^4 = x^7$ $\qquad$ $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\qquad$ $x - (y - z) = x - y - z$ $\qquad$ $x^3 + y^3 = (x + y)^3$

Opgave 10. Vereenvoudig de uitdrukking $(a + 3)^2 - (a - 3)^2$

Opgave 11. Bereken $9^{27} : 3^{50}$

Opgave 12. Verzin een formule voor $(x + y)^3$

Opgave 13. Bereken $(378^2 - 1) : 377$

Opgave 14. Bepaal alle gehele getallen x die voldoen aan $x^3 = 25x$

Opgave 15. Voor welke gehele getallen x is $(x - 5)(x + 3)$ groter dan x^2 ?

Opgave 16. Wat is meer, 2^{30} of 3^{20} ?

Opgave 17. Schrijf $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$ zo eenvoudig mogelijk

Oplossingen

Opgave 1. Ik vind $283 + 1729 = 2012$ als volgt:

$$\begin{array}{r} 283 \\ + \underline{1729} \\ 2012 \end{array}$$

Opgave 2. $x = 1000 - 729 = 271$, die laatste stap gaat zo:

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - \underline{729} \\ 271 \end{array}$$

Opgave 3. Ik werk $y(x + 2)$ en $(x + 3)(y - 1)$ elk apart uit en neem daarna het verschil:

- $y(x + 2) = yx + 2y$
- $(x + 3)(y - 1) = x(y - 1) + 3(y - 1) = xy - x + 3y - 3$
- dus $y(x + 2) - (x + 3)(y - 1) = (yx + 2y) - (xy - x + 3y - 3) = yx + 2y - xy + x - 3y + 3 = x - y + 3$

Opgave 4. Hopelijk heeft iemand je ooit verteld dat $\times$ voorrang heeft op $+$ en $-$, anders bij deze. Ik bedoelde dus $(635 \times 728) - (208 \times 728)$, wat volgens onze rekenregeltjes hetzelfde is als $(635 - 208) \times 728$. De berekening vergt dus twee rekenstapjes:

Stap 1:
$$\begin{array}{r} 635 \\ - \underline{208} \\ 427 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

Stap 2:
$$\begin{array}{r} 427 \\ \times \underline{728} \\ 3416 \\ 854 \\ + \underline{2989} \\ 310856 \end{array}$$

Opgave 5. Met deze vraag bedoel ik: geldt $x + yz = (x + y)(x + z)$ altijd? Het antwoord is natuurlijk nee, vul maar eens wat concrete getalletjes in, bijvoorbeeld

$$3 + 2 \cdot 5 = 13 \quad \text{maar} \quad (3 + 2)(3 + 5) = 40$$

Opgave 6. Als rekeneenheid neem ik de eurocent:

$$\begin{array}{r} 3695 \,/\, 85000 \,\backslash\, 23 \\ - \underline{7390} \\ 11100 \\ - \underline{11085} \\ 15 \end{array}$$

Ik mag dus 23 keer en houd dan nog 15 eurocent over

Opgave 7. Nee, want $(8 : 4) : 2$ is iets héél anders dan $8 : (4 : 2)$ (het eerste is 1, het tweede 4)

Opgave 8. Ik heb geen flauw idee op welke van deze prachtige formules je keuze is gevallen, dus ik bewijs ze maar alle drie:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x(x+y)+y(x+y) = (x^2+xy)+(yx+y^2) = x^2+2xy+y^2 \\
(x-y)^2 &= (x-y)(x-y) = x(x-y)-y(x-y) = (x^2-xy)-(yx-y^2) = x^2-2xy+y^2 \\
(x+y)(x-y) &= x(x-y)+y(x-y) = (x^2-xy)+(yx-y^2) = x^2-y^2
\end{aligned}
$$

Opgave 9. Allemaal fout. Dat zie je bijvoorbeeld al als je voor x, y en z alle drie het getal 1 invult, dan klopt er niks van

Opgave 10. $(a+3)^2-(a-3)^2 = (a^2+6a+9)-(a^2-6a+9) = a^2+6a+9-a^2+6a-9 = 12a$

Opgave 11. $9^{27}:3^{50} = (3^2)^{27}:3^{50} = 3^{54}:3^{50} = 3^4 = 81$

Opgave 12. Je kunt $(x+y)^3$ schrijven als $(x+y)(x+y)^2$ en dit is $(x+y)(x^2+2xy+y^2)$, wat je weer verder kunt uitwerken. Zo vind je

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$$

Opgave 13. Je hebt de prettige keuze tussen lekker lomp rekenen:

$$
\begin{array}{rr}
 & 378 \\
\times & 378 \\ \hline
 & 3024 \\
 & 2646 \\
 & 1134 \\ \hline
+ & 142884
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
377\,/\,142883\,\backslash\,379 \\
\quad -\ \underline{1131} \\
\qquad\ \ 2978 \\
\qquad -\ \underline{2639} \\
\qquad\quad\ \ 3393 \\
\qquad\quad -\ \underline{3393} \\
\qquad\qquad\quad\ 0
\end{array}
$$

en handig omspringen met rekenregels: $(378^2-1):377 = (378+1)(378-1):377 = 379\cdot 377:377 = 379$

Opgave 14. Dat zijn de getallen 0, 5 en -5. Die vind je bijvoorbeeld als volgt:

$$
\begin{aligned}
x^3 = 25x &\iff x^3-25x=0 \\
&\iff x(x^2-25)=0 \\
&\iff x(x+5)(x-5)=0 \\
&\iff x=0 \text{ of } x+5=0 \text{ of } x-5=0 \\
&\iff x=0 \text{ of } x=-5 \text{ of } x=5
\end{aligned}
$$

Opgave 15. $(x-5)(x+3) = x(x+3)-5(x+3) = x^2+3x-5x-15 = x^2-2x-15$, dus de 'ongelijkheid' die we moeten oplossen is

$$x^2-2x-15 > x^2 \iff -2x-15>0 \iff -2x>15 \implies 2x<-15$$

en de oplossingen zijn dus de getallen

$$\boxed{\cdots\cdots \quad -17 \quad -16 \quad -15 \quad -14 \quad -13 \quad -12 \quad -11 \quad -10 \quad -9 \quad -8}$$

Opgave 16. $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ en $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, dus 3^{20} is groter dan 2^{30}

Opgave 17. Ik gebruik de formule uit opgave 12 waarbij ik voor y achtereenvolgens 1 en -1 neem:

$$(x+1)^3-(x-1)^3 = (x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1) = 6x^2+2$$

2. Rationale getallen

Rationale getallen (ook wel quotiënten of breuken genoemd) zijn getallen van het type $\frac{x}{y}$ waarbij x (de teller) en y (de noemer) gehele getallen zijn, en y niet nul is. Bijvoorbeeld

$$\frac{7}{4} \qquad \frac{-288}{41} \qquad \frac{126}{168}$$

Bij het rekenen met breuken gelden alle rekenregels uit hoofdstuk 1, en bovendien

$$\frac{x}{1} = x \qquad \frac{ax}{ay} = \frac{x}{y} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x+y}{a}$$

(dit alles uiteraard onder de restrictie dat de noemers niet nul zijn)

Andere notaties. We gebruiken ook wel eens andere notaties voor rationale getallen, zoals

$7:4$	in plaats van	$\frac{7}{4}$
$82/25$	in plaats van	$\frac{82}{25}$
$3\frac{5}{7}$	in plaats van	$3+\frac{5}{7}$
0.3	in plaats van	$\frac{3}{10}$
3.28	in plaats van	$3+\frac{2}{10}+\frac{8}{100}$

Vereenvoudigen van breuken. Dat lukt soms met de rekenregel $\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y}$, bijvoorbeeld

$$\frac{126}{168} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 84} = \frac{63}{84} = \frac{3 \cdot 21}{3 \cdot 28} = \frac{21}{28} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Optellen van breuken. Ik heb geen rekenregel voor $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ gegeven. Hoe tel je twee breuken toch op?

1. maak de noemers gelijk met behulp van de rekenregel $\frac{x}{y} = \frac{ax}{ay}$
2. en pas dan de rekenregel $\frac{p}{r} + \frac{q}{r} = \frac{p+q}{r}$ toe

Als je bijvoorbeeld $\frac{7}{12}$ en $\frac{13}{42}$ wilt optellen, doe je dat zo:

$$\frac{7}{12} + \frac{13}{42} = \frac{7 \cdot 7}{12 \cdot 7} + \frac{13 \cdot 2}{42 \cdot 2} = \frac{49}{84} + \frac{26}{84} = \frac{49+26}{84} = \frac{75}{84} = \frac{3 \cdot 25}{3 \cdot 28} = \frac{25}{28}$$

(als je deze werkwijze te lastig vindt, moet je helaas de vreselijke formule uit opgave 3 van buiten leren)

Quotiënt van breuken. Je kunt twee breuken ook door elkaar delen, bijvoorbeeld:

$$\frac{\frac{16}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \frac{16}{3}}{5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5 \cdot 16}{3 \cdot 2} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

Misschien vind je het handiger om deze werkwijze in een rekenregel te vatten:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$ (delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde)

De bovenstaande berekening wordt dan

$$\frac{\frac{16}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{16 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

Gelijkheid van breuken. Uit de rekenregels volgt een handige manier om te testen of twee breuken gelijk zijn:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad ad = bc$$

(deze truc heet 'kruiselings vermenigvuldigen')

Decimale notatie. Sommige breuken hebben een eindige decimale notatie (bijvoorbeeld $\frac{82}{25} = 3.28$) maar meestal is de decimale ontwikkeling oneindig, laat ik maar eens $\frac{3604}{495}$ proberen:

```
495 / 3604          \ 7.280808······
    − 3465
        1390
      −  990
         4000
       − 3960
           4000
         − 3960
             4000
           − 3960
                enz
```

Je vindt $\frac{3604}{495} = 7.28080808080808080808080808080808080808080808080808\cdots$ en je begrijpt wel waarom de decimale ontwikkeling van een rationaal getal altijd met een dergelijke periodieke staart eindigt: bij de staartdeling zijn maar eindig veel resten mogelijk. Rekenmachines jokken meestal iets als $\frac{3604}{495} = 7.280808081$ in de hoop dat je hen deze geringe onnauwkeurigheid niet euvel duidt

Machten van breuken. Een handige extra rekenregel:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Deze volgt overigens al uit eerdere rekenregels. Ook gebruiken we negatieve exponenten met als afspraak:

$$\boxed{x^{-n} \quad \text{betekent} \quad \frac{1}{x^n}}$$

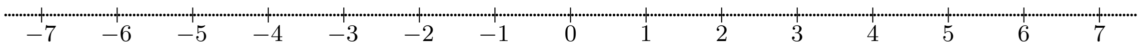
Bijvoorbeeld

$$5^{-3} = \frac{1}{125} \qquad\qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$$

De verzameling van alle rationale getallen. Deze wordt $\mathbb{Q}$ genoemd:

notatie	spreek uit	betekenis
$x \in \mathbb{Q}$	x is een element van $\mathbb{Q}$	x is een rationaal getal

Je kunt aan de hand van zijn decimale notatie ieder rationaal getal een plaatsje geven op een (naar beide kanten oneindig lange) lijn met schaalverdeling:



Begrippen als $>$ en $\leq$ zeggen iets over de relatieve posities van getallen op deze getallenlijn, bijvoorbeeld:

x is positief	betekent	x ligt rechts van 0
x is negatief	betekent	x ligt links van 0
x is kleiner dan y	betekent	x ligt links van y
x is groter dan y	betekent	x ligt rechts van y

Opgaven hoofdstuk 2

Opgave 1. Geef je mening over de 'rekenregel' $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{a}{x+y}$

Opgave 2. Vereenvoudig de breuk $\frac{117}{819}$

Opgave 3. Verzin zelf een regenregel voor $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

Opgave 4. Bereken $\frac{41}{75} - \frac{9}{20}$

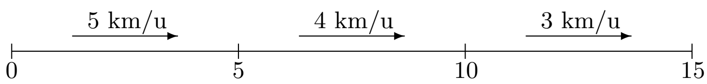
Opgave 5. Schrijf $\frac{146}{125}$ in decimale notatie

Opgave 6. Bereken $\frac{7}{25} \times \frac{3}{14} : 0.09$

Opgave 7. Los x op uit $\frac{x+3}{x+7} = \frac{x-1}{x+1}$

Opgave 8. Als $x = 3\frac{1}{2}$ en $y = 2\frac{4}{5}$, hoeveel is dan $\frac{x+y}{x-y}$?

Opgave 9. Ik maak een wandeling van 15 kilometer. Aanvankelijk is mijn wandelsnelheid 5 km/uur, maar na 5 km word ik een beetje moe en verlaag ik mijn snelheid tot 4 km/uur. In het laatste stuk van het traject, vanaf kilometer 10, strompel ik met slechts 3 km/uur naar de finish. Bereken mijn gemiddelde snelheid



Opgave 10. Het verband tussen de grootheden α en β wordt gegeven door

$$\beta = \frac{3\alpha + 2}{5\alpha - 1}$$

Druk α uit in β

Opgave 11. Bepaal de decimale ontwikkeling van $\frac{3}{7}$

Opgave 12. De omzetting van Fahrenheit naar graden Celsius gaat volgens

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Bepaal hieruit een omzettingsformule van Celsius naar Fahrenheit

Opgave 13. Zijn de onderstaande getallen alle drie verschillend?

$$(-0.5)^{-2} \qquad\qquad -0.5^{-2} \qquad\qquad 0.5^2$$

Opgave 14. Vereenvoudig de uitdrukking $\dfrac{x^{-3}}{(3x^2)^{-2}}$

Opgave 15.

a) Geef een formule voor de omzetting van m/sec naar km/u

b) Als mijn snelheid 2 m/sec is, wandel ik dan snel of langzaam?

Opgave 16. Ik heb $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{x^2-1}$ euro op zak, loont het de moeite mij te beroven?

Oplossingen

Opgave 1. Deze 'rekenregel' is fout. Als je bijvoorbeeld $a = 12$ en $x = 2$ en $y = 4$ invult staat er opeens $6 + 3 = 2$

Opgave 2. Probeer gemeenschappelijke factoren in teller en noemer te vinden en te schrappen:

$$\frac{117}{819} = \frac{3 \cdot 39}{3 \cdot 273} = \frac{39}{273} = \frac{3 \cdot 13}{3 \cdot 91} = \frac{13}{91} = \frac{13}{7 \cdot 13} = \frac{1}{7}$$

Opgave 3. Via de methode $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ ontdek je de rekenregel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Opgave 4. Twee breuken van elkaar aftrekken gaat net zo als optellen:

$$\frac{41}{75} - \frac{9}{20} = \frac{41 \cdot 4}{75 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 15}{20 \cdot 15} = \frac{164}{300} - \frac{135}{300} = \frac{164 - 135}{300} = \frac{29}{300}$$

Opgave 5. Dat kan naar keuze met een staartdeling

$$\boxed{\begin{array}{rl} 125 \,/\, 146 & \backslash\, 1.168 \\ -\underline{125} & \\ 210 & \\ -\underline{125} & \\ 850 & \\ -\underline{750} & \\ 1000 & \\ -\underline{1000} & \\ 0 & \end{array}}$$

of met een truc: $\dfrac{146}{125} = \dfrac{8 \cdot 146}{8 \cdot 125} = \dfrac{1168}{1000} = 1.168$

Opgave 6. $\dfrac{7}{25} \times \dfrac{3}{14} : 0.09 = \dfrac{7 \times 3}{25 \times 14} : \dfrac{9}{100} = \dfrac{3}{50} : \dfrac{9}{100} = \dfrac{3}{50} \times \dfrac{100}{9} = \dfrac{3 \times 100}{50 \times 9} = \dfrac{3 \times 2}{9} = \dfrac{2}{3}$

Opgave 7. Ik doe kruiselings vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+7} = \frac{x-1}{x+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad (x+3)(x+1) = (x+7)(x-1) \\ & \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = x^2 + 6x - 7 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x = -10 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5 \end{aligned}$$

Opgave 8. Je begint de berekening bijvoorbeeld als volgt:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{5}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{14}{5}}{\frac{7}{2} - \frac{14}{5}}$$

en vermenigvuldigt vervolgens teller en noemer met $2 \cdot 5$:

$$\cdots = \frac{7 \cdot 5 + 14 \cdot 2}{7 \cdot 5 - 14 \cdot 2} = \frac{35 + 28}{35 - 28} = \frac{63}{7} = 9$$

Opgave 9. Ik hoop dat je vertrouwd bent met het begrip 'snelheid':

$$\boxed{\text{snelheid} = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}} \qquad\qquad \boxed{\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}}$$

Het eerste stuk van het traject loop ik dus in $\frac{5}{5}$ uur, het tweede stuk in $\frac{5}{4}$ uur, het derde stuk in $\frac{5}{3}$ uur. De tijdsduur van de totale wandeling is dus

$$\frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} = \frac{60}{60} + \frac{75}{60} + \frac{100}{60} = \frac{60 + 75 + 100}{60} = \frac{235}{60} \text{ uur}$$

en mijn gemiddelde snelheid is dus

$$\frac{15}{\frac{235}{60}} = \frac{15 \cdot 60}{235} = \frac{3 \cdot 60}{47} = \frac{180}{47} \text{ km/u} \qquad\qquad \text{(dat is minder dan 4 km/u!!)}$$

Opgave 10. Manipuleren met rekenregels:

$$\beta = \frac{3\alpha + 2}{5\alpha - 1} \implies \beta(5\alpha - 1) = 3\alpha + 2 \implies 5\alpha\beta - \beta = 3\alpha + 2$$

$$\implies 5\alpha\beta - 3\alpha = \beta + 2 \implies \alpha(5\beta - 3) = \beta + 2 \implies \alpha = \frac{\beta + 2}{5\beta - 3}$$

Opgave 11. Via een staartdeling vind je de periodieke decimale ontwikkeling

$$\frac{3}{7} = 0.\boxed{428571}\boxed{428571}\boxed{428571}\boxed{428571}\boxed{428571}\boxed{428571}\boxed{428571}\cdots\cdots$$

Opgave 12. Dat lukt als volgt:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \implies \frac{9}{5}C = F - 32 \implies F = 32 + \frac{9}{5}C$$

Opgave 13. Ja want

$$(-0.5)^{-2} = \frac{1}{(-0.5)^2} = \frac{1}{0.25} = 4 \qquad -0.5^{-2} = -\frac{1}{0.5^2} = -\frac{1}{0.25} = -4 \qquad 0.5^2 = 0.25$$

Opgave 14. $\dfrac{x^{-3}}{\left(3x^2\right)^{-2}} = \dfrac{\left(3x^2\right)^2}{x^3} = \dfrac{9x^4}{x^3} = 9x$

Opgave 15.

a) Een uur duurt 3600 seconden. Als ik per seconde 1 meter loop, loop ik in een uur 3600 meter, dus

$$\boxed{x \text{ m/sec is } 3.6\,x \text{ km/u}}$$

b) 7.2 km/u vind ik héél snel

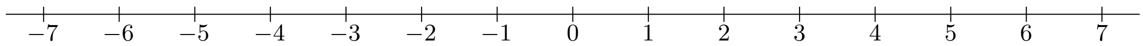
Opgave 16. Schrijf alles met noemer $1 - x^2$, de formule $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$ brengt je op dit idee

$$\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1 + x}{1 - x^2} + \frac{1 - x}{1 - x^2} + \frac{-2}{1 - x^2} = \frac{1 + x + 1 - x - 2}{1 - x^2} = \frac{0}{1 - x^2} = 0$$

De moraal: laat mij met rust

3. Reële getallen

Een reëel getal is een punt van de getallenlijn $\mathbb{R}$:



Reële getallen waarvan de decimale ontwikkeling geen periodieke staart heeft zijn niet rationaal. Veruit de meeste van hen gaan naamloos en roemloos door het leven, slechts een enkeling heeft wegens zijn enorme verdiensten voor de wetenschap een naam gekregen alsmede een plekje op geavanceerd rekentuig:

$$\begin{aligned} e &= 2.71828182845904523536028747135266249775 7\cdots \\ \pi &= 3.14159265358979323846264338327950288419 7\cdots \end{aligned}$$

We kunnen met reële getallen net zo rekenen als met de getallen uit hoofdstuk 1 en 2: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, kwadrateren, ... Ik zal me in dit hoofdstuk beperken tot wat nieuw is

Wortels. Met $\sqrt{7}$ (spreek uit: wortel 7) bedoel ik het positieve reële getal waarvan het kwadraat 7 is. Het is niet gemakkelijk om hier snel een decimale ontwikkeling voor te maken. Natuurlijk zie je wel hoe deze begint:

$$\sqrt{7} \;=\; 2.6\cdots \qquad \text{want 7 ligt tussen } 2.6^{\,2} = 6.76 \text{ en } 2.7^{\,2} = 7.29$$

Er zijn wel trucs in de handel om snel meer decimalen te vinden maar die zal ik je besparen:

$$\sqrt{7} \;=\; 2.645751311\cdots$$

Merk op dat dit niet het enige getal is waarvan het kwadraat 7 is, er is er nóg eentje: $-2.645751311\cdots$
Algemeen: als x een niet-negatief reëel getal is, dan bedoel ik met $\sqrt{x}$ het getal dat voldoet aan

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \qquad\qquad \sqrt{x} \geq 0$$

De wortel uit een negatief getal bestaat niet, want kwadraten zijn nooit negatief. De volgende rekenregels gelden voor positieve x en y:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \qquad\qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad\qquad \sqrt{x^2} = x \qquad\qquad \sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n$$

Manipuleren met wortels. Enkele methoden om uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen:

1. kwadraten buiten de wortel brengen:

   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ want $\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

2. wortels gelijk maken:

   $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}$ want $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

3. noemers uit wortels verwijderen:

   $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$ want $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

4. wortels uit noemers verwijderen:

   $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ want $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

5. som of verschil van wortels uit noemers verwijderen:

   $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$ want $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{10\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)} = \frac{10\sqrt{7}+10\sqrt{2}}{5}$

   deze 'worteltruc' berust op de formule $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

Absolute waarde. Onder de absolute waarde van een getal verstaan we zijn afstand tot 0:

$$|x| \; = \; \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Dus bijvoorbeeld $|7| = 7$ en $|-7| = 7$. Vanzelfsprekend gelden de volgende rekenregels:

$$|xy| = |x| \cdot |y| \qquad |x^n| = |x|^n \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

en voor de afstand tussen twee getallen op de getallenlijn geldt:

$$\text{de afstand van } x \text{ tot } y \text{ is } |x-y|$$

Derdemachtswortel. Met $\sqrt[3]{x}$ (spreek uit: de derdemachts wortel uit x) bedoelen we het reële getal y waarvoor geldt: $y^3 = x$. Voorbeelden:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$

De volgende rekenregels zou je ook zelf wel kunnen verzinnen:

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \qquad \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \qquad \sqrt[3]{x^3} = x \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

Op soortgelijke wijze kunnen we $\sqrt[n]{x}$ ook voor grotere n definiëren:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{x} &= \text{het getal } y \geq 0 \text{ waarvoor } y^4 = x \quad \text{(alleen gedefinieerd als } x \geq 0) \\
\sqrt[5]{x} &= \text{het getal } y \text{ waarvoor } y^5 = x \\
\sqrt[6]{x} &= \text{het getal } y \geq 0 \text{ waarvoor } y^6 = x \quad \text{(alleen gedefinieerd als } x \geq 0) \\
\sqrt[7]{x} &= \text{het getal } y \text{ waarvoor } y^7 = x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Voorbeelden:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \qquad \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \qquad \sqrt[23]{-1} = -1$$

De 'gewone' $\sqrt{x}$ kun je nu ook schrijven als $\sqrt[2]{x}$

Oneigenlijke machten. Voor positieve reële getallen a en willekeurige reële getallen x bestaat ook a^x. Ik zal de strenge wiskundige definitie niet vertellen maar me beperken tot de eigenschappen

$$a^0 = 1 \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

En verder gelden de rekenregels voor gewone machten ook weer voor deze nieuwe a^x

Opgaven hoofdstuk 3

Opgave 1. Bereken de wortel uit je huisnummer in één decimaal nauwkeurig

Opgave 2. Geldt de rekenregel $\sqrt{x^2} = x$ voor alle reële getallen x?

Opgave 3. Bepaal het grootste van de getallen

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}}$$

Opgave 4. Los x op uit

$$\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-1}$$

Opgave 5. Vereenvoudig de getallen

a) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ b) $\dfrac{13}{\sqrt{5}} - \sqrt{20}$ c) $\dfrac{3+5\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ d) $\left(2+\sqrt{3}\right)^3$

Opgave 6. Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan $|x+321| = |x-750|$

Opgave 7. Schrijf de volgende uitdrukkingen, waarin x een positief reëel getal voorstelt, zo eenvoudig mogelijk:

a) $\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{x\sqrt{6}}{\sqrt{3x}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

Opgave 8. Los x op uit $3x = |x-1|$

Opgave 9. Vind een reëel getal x dat voldoet aan $\sqrt{1+x^2} = 7+x$, of bewijs dat dit onmogelijk is

Opgave 10. Bereken

a) $25^{-\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$ c) $2^{\frac{7}{2}}/4$

Opgave 11. Los x op uit

a) $2^{x-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$ b) $8^{4x} = 32$ c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+5} = 125^x$

Opgave 12. Zoek een natuurlijk getal n waarvoor $\sqrt[9]{7^n} = \sqrt[n]{7^4}$

Opgave 13. Malle Miep probeert te bewijzen dat -7 gelijk is aan 7:

$$-7 = (-7)^1 = (-7)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \left((-7)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

Bij welke rekenstap heeft Miep je voor het lapje gehouden?

Oplossingen

Opgave 1. Ik woon met mijn poesjes in de Akkerlaan op nummer 17 en mijn kladblaadje vermeldt

$$\begin{array}{rr} & 4.1 \\ \times & 4.1 \\ \hline & 4\ 1 \\ + & 16\ 4\ \ \\ \hline & 16.8\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4.2 \\ \times & 4.2 \\ \hline & 8\ 4 \\ + & 16\ 8\ \ \\ \hline & 17.6\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4.15 \\ \times & 4.15 \\ \hline & 20\ 75 \\ & 41\ 5\ \ \\ + & 16\ 60\ \ \ \ \\ \hline & 17.22\ 25 \end{array}$$

Omdat $\sqrt{17}$ ergens tussen 4.1 en 4.15 ligt rond ik het af tot 4.1

Opgave 2. Nee, voor negatieve x is deze ‘regel’ fout. Bijvoorbeeld:

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{(-5)\cdot(-5)} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{(en dus niet } -5\text{)}$$

Opgave 3. Hun kwadraten zijn

$$x^2 = \frac{3}{5} \qquad\qquad y^2 = \frac{8}{13}$$

en deze kan ik soepel vergelijken als ik ze met eenzelfde noemer schrijf:

$$x^2 = \frac{39}{65} \qquad\qquad y^2 = \frac{40}{65}$$

Inmiddels is het wel duidelijk geworden dat $x < y$

Opgave 4. Als twee getallen gelijk zijn, dan zijn ook hun kwadraten gelijk:

$$\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-1} \quad\Longrightarrow\quad \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = \left(2\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\quad x+3 = 4(x-1) \quad\Longrightarrow\quad x+3 = 4x-4 \quad\Longrightarrow\quad 7 = 3x \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{7}{3}$$

Opgave 5.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{13}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = \dfrac{13}{5}\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \left(\dfrac{13}{5} - 2\right)\sqrt{5} = \dfrac{3}{5}\sqrt{5}$

c) Zoiets doe ik natuurlijk met de worteltruc:

$$\frac{3+5\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(3+5\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{3-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-10}{1-2} = \frac{2\sqrt{2}-7}{-1} = 7-2\sqrt{2}$$

d) Ik gebruik de formule $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}$$

Opgave 6. $|x+321| = |x-750|$ betekent: de afstand van x tot -321 is gelijk aan de afstand van x tot 750. Of anders gezegd: x ligt precies halverwege tussen -321 en 750, en dus

$$x = \frac{-321+750}{2} = \frac{429}{2}$$

Opgave 7.

a) $\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}} = \dfrac{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}{3+\sqrt{x}} = 3-\sqrt{x}$

b) $\dfrac{x\sqrt{6}}{\sqrt{3x}} = \dfrac{x\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2x}$

c) Ik deel teller en noemer door $\sqrt{x}$ en pas vervolgens de worteltruc toe:

$$\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

d) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}} = -\sqrt{x}$

Opgave 8. Een oplossing x moet voldoen aan $3x = \pm(x-1)$. Ik werk beide mogelijkheden even uit:

$$3x = x-1 \implies 2x = -1 \implies x = -\tfrac{1}{2}$$
$$3x = 1-x \implies 4x = 1 \implies x = \tfrac{1}{4}$$

De eerste is onmogelijk, want als ik $x = -\frac{1}{2}$ invul in de gegeven vergelijking staat er $-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ en dat klopt niet. De andere mogelijkheid blijkt na invulling wel in orde: $x = \frac{1}{4}$

Opgave 9. Ik kwadrateer het linker- en rechterlid van deze vergelijking:

$$\sqrt{1+x^2} = 7+x \implies 1+x^2 = (7+x)^2 = 49+14x+x^2 \implies 14x = -48 \implies x = -\frac{48}{14} = -\frac{24}{7}$$

Opgave 10.

a) $25^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

c) $2^{\frac{7}{2}}/4 = \dfrac{2^{\frac{7}{2}}}{2^2} = 2^{\frac{7}{2}-2} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

Opgave 11.

a) $2^{x-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} \implies 2^{x-2} = 2^{-2x} \implies x-2 = -2x \implies 3x = 2 \implies x = \dfrac{2}{3}$

b) $8^{4x} = 32 \implies \left(2^3\right)^{4x} = 2^5 \implies 2^{12x} = 2^5 \implies 12x = 5 \implies x = \dfrac{5}{12}$

c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+5} = 125^x \implies 5^{-(2x+5)} = 5^{3x} \implies -(2x+5) = 3x \implies -5 = 5x \implies x = -1$

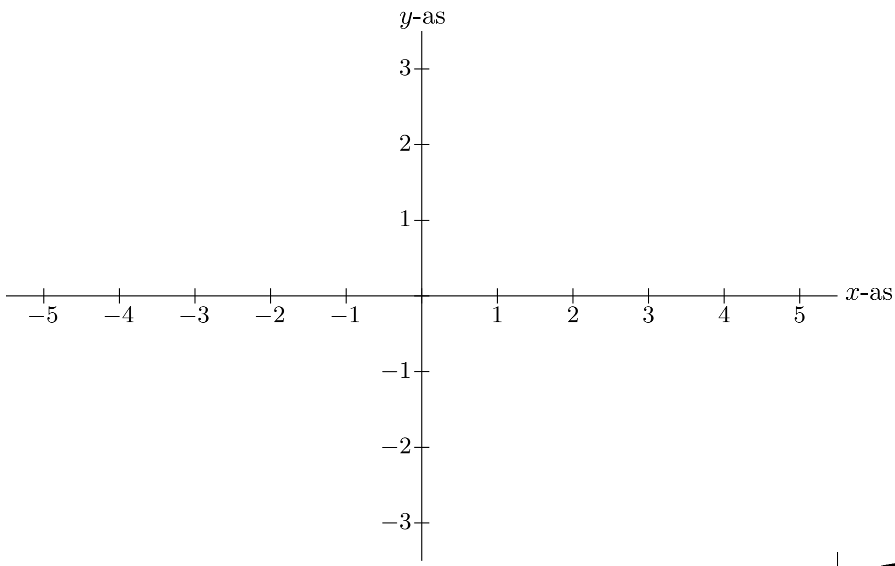
Opgave 12. $\sqrt[9]{7^n} = \sqrt[n]{7^4} \implies 7^{\frac{n}{9}} = 7^{\frac{4}{n}} \implies \dfrac{n}{9} = \dfrac{4}{n} \implies n^2 = 36 \implies n = \pm 6$
Het gezochte natuurlijke getal n is dus 6

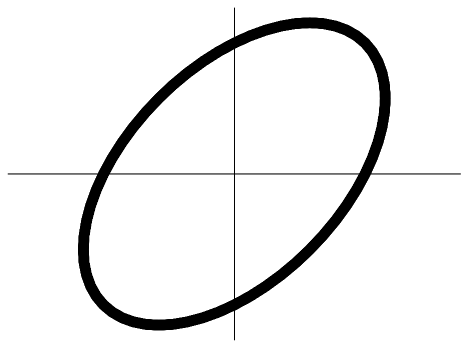
Opgave 13. De oude rekenregels voor machten gelden inderdaad ook voor de nieuwe a^x, maar daar heb ik de voorwaarde $a > 0$ aan verbonden. Die voorwaarde is essentieel bij de rekenregel $(x^n)^m = x^{nm}$, en Miep heeft je inderdaad bedrogen bij haar rekenstap

$$(-7)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \left((-7)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

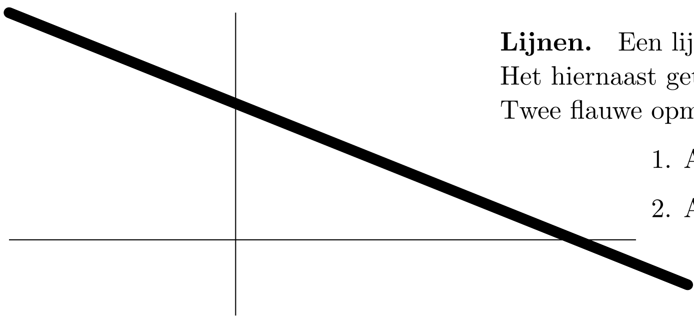
4. Het vlak

Met $\mathbb{R}^2$ bedoel ik de verzameling van alle paren (x, y) van twee reële getallen. Zo'n paar kun je opvatten als een punt in het platte vlak waarin je coördinaatassen en een schaalverdeling hebt aangebracht:





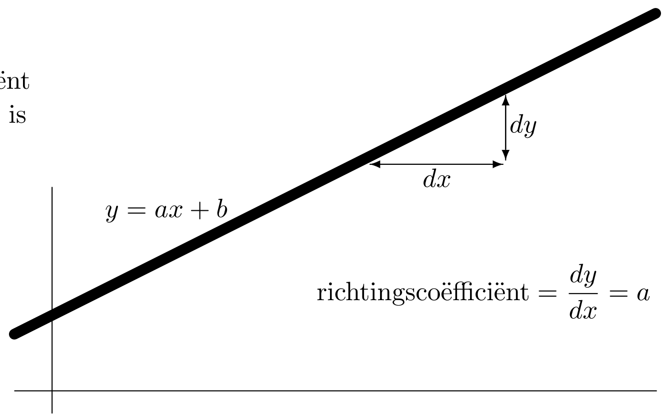
Krommen. Hiernaast heb ik alle punten (x, y) die voldoen aan $x^2 + y^2 = xy + 3$ zwart gemaakt. Zo'n verzameling punten heet een 'kromme' in het vlak. Je zult in je studie allerlei soorten krommen tegenkomen, het nevenstaande exemplaar behoort tot de kategorie 'schuine ellipsen'

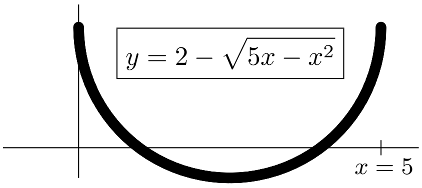


Lijnen. Een lijn in $\mathbb{R}^2$ is een kromme van het type $\alpha x + \beta y = \gamma$. Het hiernaast getekende exemplaar is de lijn $2x + 5y = 9$.
Twee flauwe opmerkingen:

1. Als $\gamma = 0$ dan gaat de lijn door de oorsprong $(0, 0)$
2. Als $\beta \neq 0$ dan kun je de vergelijking door β delen en schrijven in de vorm $y = ax + b$

Richtingscoëfficiënt. Onder de richtingscoëfficiënt van de lijn $y = ax + b$ verstaan we het getal a. Dit is een maat voor de helling: het is de verhouding tussen een x-toename dx en de bijbehorende y-toename dy



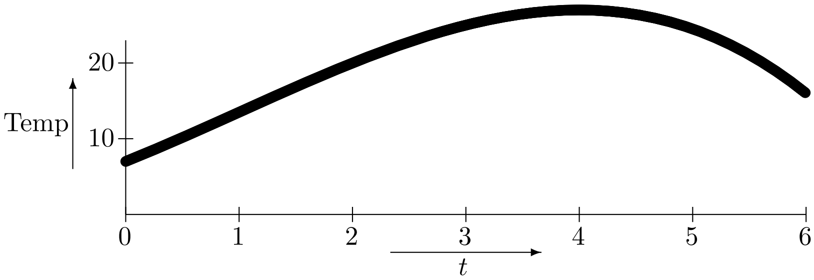


Functies en grafieken. Kijk eens naar deze kromme. Bij iedere x vanaf $x = 0$ tot en met $x = 5$ hoort precies één y waarvoor (x, y) op de kromme ligt. Men zegt ook wel: y is een functie van x op het domein $0 \leq x \leq 5$. De kromme heet dan de grafiek van deze functie, en de vergelijking $y = 2 - \sqrt{5x - x^2}$ is het functievoorschrift

Functies in de praktijk. In het leven van alledag heten de dingen meestal niet x en y. Zo kan

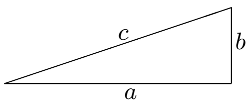
$$\text{Temp} = 7 + 6t + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3$$

een functievoorschrift zijn dat voor elk tijdstip t tussen 0.00 en 6.00 uur de temperatuur in graden Celsius aangeeft:



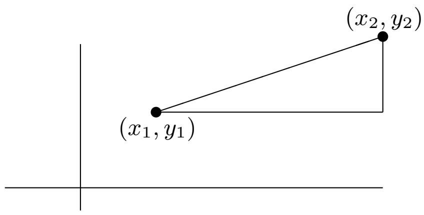
en ook de schaalverdeling op de t-as en de Temp-as hoeven niet dezelfde te zijn. In plaats van Temp schrijft men ook wel Temp (t) om aan te geven dat de temperatuur van t afhangt. En met bijvoorbeeld Temp $(2) = 20$ vertel ik dat het om 2.00 uur precies 20 graden was

Afstand. De afstand van (x_1, y_1) tot (x_2, y_2) is $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Dat volgt uit de Stelling van Pythagoras:



$a^2 + b^2 = c^2$

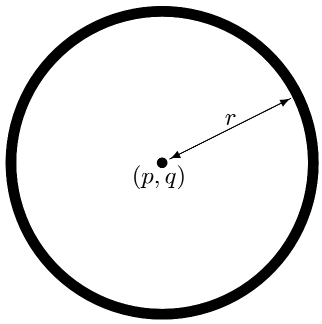
$\Longrightarrow$



$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \text{afstand}^2$

Cirkels. De cirkel met middelpunt (p, q) en straal r bestaat uit alle punten (x, y) die op afstand r van (p, q) liggen. Zijn vergelijking is dus

$$\boxed{(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2}$$



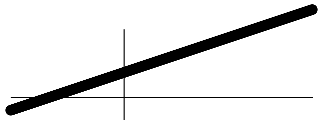
Ik vermeld (zonder bewijs) formules voor zijn omtrek en oppervlakte:

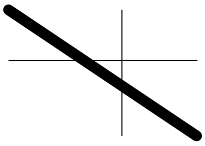
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{omtrek} & = & 2\pi r \\ \text{oppervlakte} & = & \pi r^2 \end{array}}$$

Opgaven hoofdstuk 4

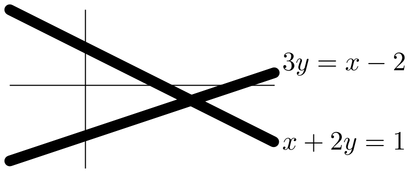
Opgave 1. Teken de kromme $x^2 = 3y^2$

Opgave 2. Bepaal de vergelijking van de lijn door $(-1, 0)$ en $(2, 1)$



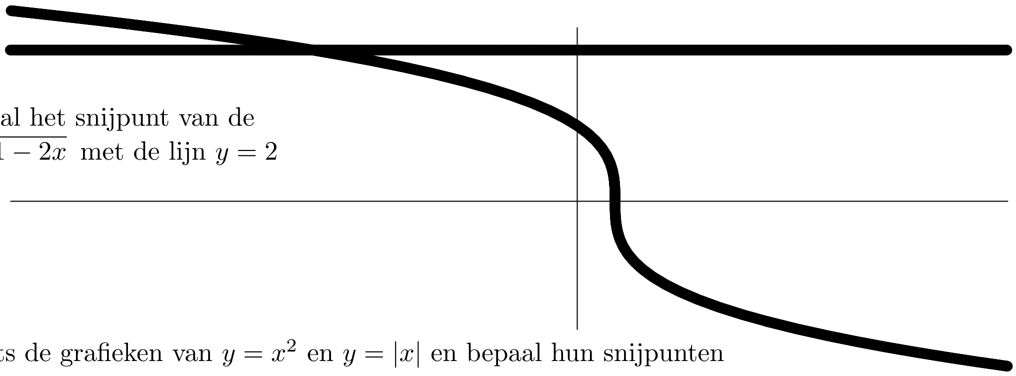


Opgave 3. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn $2x + 3y + 1 = 0$



Opgave 4. Bepaal het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 1$ en $3y = x - 2$

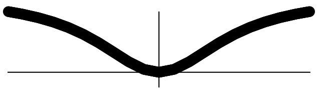
Opgave 5. Schets een stuk van de grafiek van de functie $y = \sqrt{x}$. Wat is het domein van deze functie?



Opgave 6. Bepaal het snijpunt van de grafiek van $y = \sqrt[3]{1 - 2x}$ met de lijn $y = 2$

Opgave 7. Schets de grafieken van $y = x^2$ en $y = |x|$ en bepaal hun snijpunten

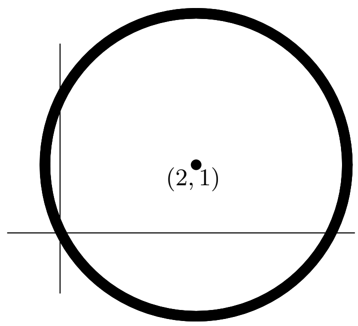
Opgave 8. Schets de grafiek van $y = 2^{x-3}$ en zoek het getal x waarvoor $y = 64$

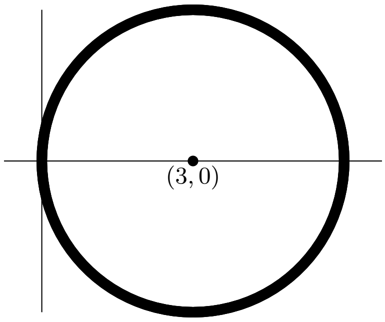


Opgave 9. Deze kromme met vergelijking $y = x^2 - yx^2$ is de grafiek van een functie. Bepaal een functievoorschrift voor deze functie

Opgave 10. Bereken de afstand van $(-6, 3)$ tot $(5, 1)$

Opgave 11. Bereken de oppervlakte van de cirkel met middelpunt $(2, 1)$ die door de oorsprong gaat





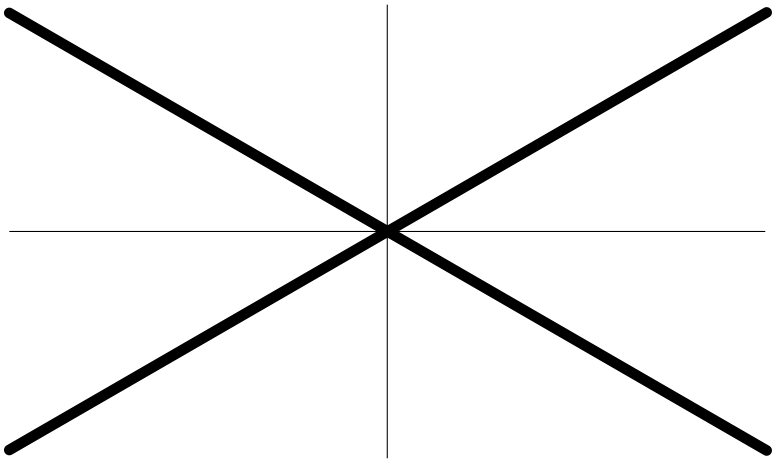
Opgave 12. Deze cirkel heeft omtrek 6π en middelpunt $(3, 0)$

a) Wat is zijn vergelijking?

b) Ligt $(5, 2)$ binnen of buiten de cirkel?

Oplossingen

Opgave 1. Uit $x^2 = 3y^2$ volgt $x = \pm y\sqrt{3}$, de kromme bestaat dus uit de lijnen $x = y\sqrt{3}$ en $x = -y\sqrt{3}$:



Opgave 2. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{1}{3}$, want als je van $(-1, 0)$ naar $(2, 1)$ wandelt is je y-toename $\frac{1}{3}$ keer zo groot als je x-toename. De lijn is dus van het type

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

Je rekent vervolgens b uit door (bijvoorbeeld) het punt $(-1, 0)$ in te vullen:

$$0 = \frac{1}{3} \cdot (-1) + b \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{3}$$

De vergelijking van de lijn is dus $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, wat je nog ietsje mooier kunt schrijven door links en rechts met 3 te vermenigvuldigen: $3y = x + 1$

Opgave 3. Ik breng de vergelijking naar de vorm $y = ax + b$:

$$2x + 3y + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3y = -2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

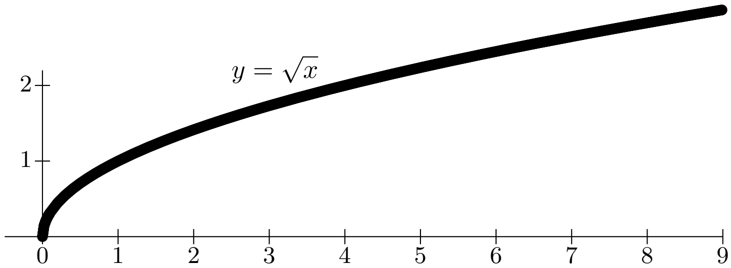
De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{2}{3}$

Opgave 4. Het snijpunt (x, y) moet aan beide vergelijkingen voldoen, dus

$$\left.\begin{array}{lcl} x + 2y = 1 & \Longrightarrow & x = 1 - 2y \\ 3y = x - 2 & \Longrightarrow & x = 3y + 2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad 1 - 2y = 3y + 2 \quad \Longrightarrow \quad 5y = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{5}$$

en dan is het verder eenvoudig: door $y = -\frac{1}{5}$ in een van de vergelijkingen in te vullen vind je $x = \frac{7}{5}$, het snijpunt is dus $(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$

Opgave 5. Het domein van de functie $y = \sqrt{x}$ is $[0, \infty)$, ik bedoel daarmee de verzameling van alle reële getallen ≥ 0

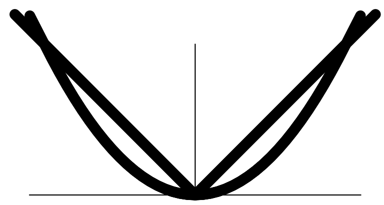


Opgave 6. Voor het snijpunt (x, y) geldt:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt[3]{1-2x} \\ y = 2 \end{array}\right\} \implies \sqrt[3]{1-2x} = 2 \implies 1 - 2x = 8 \implies 2x = -7 \implies x = -\frac{7}{2}$$

Het snijpunt is dus $(-\frac{7}{2}, 2)$

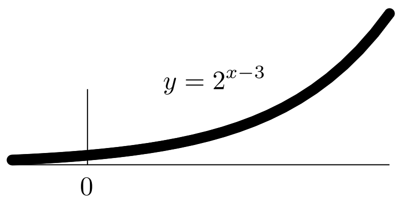
Opgave 7. Ik reken niet graag met absolute waarden, daarom maak ik even onderscheid tussen positieve en negatieve x:



Geval 1: $x \geq 0$. Voor een snijpunt geldt dan $x^2 = x$, dus $x^2 - x = 0$, dus $x(x-1) = 0$, dus $x = 0$ of $x = 1$

Geval 2: $x < 0$. Voor een snijpunt is dan $x^2 = -x$ en dus (door x delen) $x = -1$

Hoera we hebben drie snijpunten gevonden: $(-1, 1)$, $(0, 0)$ en $(1, 1)$



Opgave 8. $2^{x-3} = 64 = 2^6 \implies x - 3 = 6 \implies x = 9$

Opgave 9. Ik probeer y in x uit te drukken:

$$y = x^2 - yx^2 \implies y + yx^2 = x^2 \implies y(1 + x^2) = x^2 \implies \boxed{y = \frac{x^2}{1+x^2}}$$

Opgave 10. De afstand tussen $(-6, 3)$ en $(5, 1)$ is

$$\sqrt{(5-(-6))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Opgave 11. De straal van deze cirkel is de afstand van $(2, 1)$ tot de oorsprong, en die is $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Zijn oppervlakte is dus 5π

Opgave 12.

a) De straal is 3 (want deze is $\frac{1}{2\pi}$ maal de omtrek), dus de vergelijking van de cirkel is

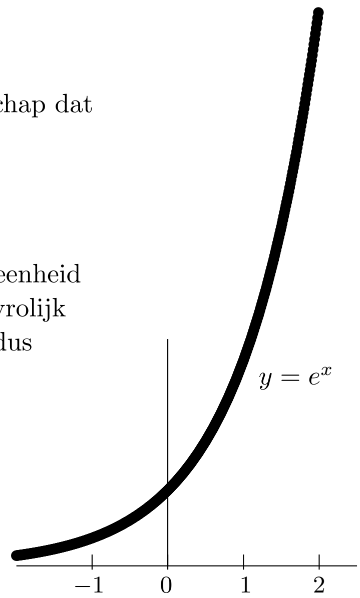
$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 9 \implies x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 \implies \boxed{x^2 - 6x + y^2 = 0}$$

b) De afstand van $(5, 2)$ tot $(3, 0)$ is

$$\sqrt{(5-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Deze is kleiner dan de straal (want $\sqrt{8} < \sqrt{9}$) en dus ligt $(5, 2)$ binnen de cirkel

5. De functies exp, ln en log



Exp. De exponentiële functie $y = e^x$ ontleent zijn belang aan de eigenschap dat zijn richtingscoëfficiënt in elk punt gelijk is aan zijn waarde:

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x$$

In de natuur kom je vaak populaties tegen waarvan de toename per tijdseenheid gelijk is aan (of evenredig is met) het aanwezige aantal. Denk maar aan vrolijk voortplantende konijntjes, of de euro's op mijn spaarrekening. Deze zijn dus goed te beschrijven met e-machten. Deze rekenregels voor e^x ken je al:

$e^0 = 1$ $\qquad$ $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $\qquad$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\qquad$ $(e^x)^y = e^{xy}$

In plaats van e^x schrijft men ook wel eens $\exp(x)$

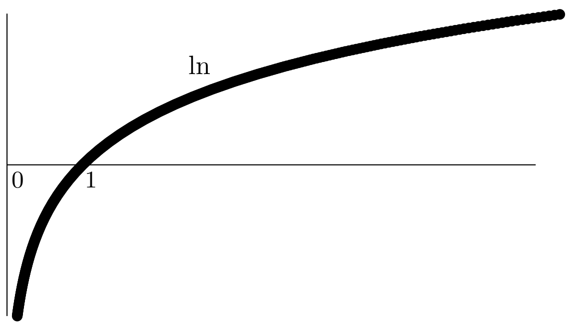
Logaritme. De 'natuurlijke logaritme' (notatie: ln) is de inverse van de functie $y = e^x$, dat wil zeggen

$$\boxed{y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y}$$

Anders gezegd, deze twee functies neutraliseren elkaar:

$$\boxed{\ln(e^x) = x} \qquad \boxed{e^{\ln x} = x}$$

Het domein van de functie ln is de verzameling van alle positieve reële getallen, en de grafiek van ln is het spiegelbeeld van de grafiek van e^x om de lijn $y = x$ (logisch, je moet de rollen van x en y verwisselen)



Rekenregels voor ln:

$\ln 1 = 0$	$\ln x^a = a \ln x$
$\ln xy = \ln x + \ln y$	$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

(deze volgen uit de rekenregels voor e^x)

Trucs met ln. Twee voorbeelden hoe je met ln kunt rekenen:

Opdracht 1. Los x op uit $3^x = 5 \cdot 2^x$

Oplossing. Ik zet er links en rechts ln voor:

$$3^x = 5 \cdot 2^x \implies \ln(3^x) = \ln(5 \cdot 2^x) \implies x \ln 3 = \ln 5 + \ln 2^x \implies x \ln 3 = \ln 5 + x \ln 2$$
$$\implies x \ln 3 - x \ln 2 = \ln 5 \implies x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 5 \implies x = \frac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2}$$

Opdracht 2. Bereken $3^{\ln 2} - 2^{\ln 3}$

Oplossing. Ik gebruik de rekenregel $x = e^{\ln x}$:

$$\left.\begin{aligned} 3^{\ln 2} &= e^{\ln\left(3^{\ln 2}\right)} = e^{\ln 2 \cdot \ln 3} \\ 2^{\ln 3} &= e^{\ln\left(2^{\ln 3}\right)} = e^{\ln 3 \cdot \ln 2} \end{aligned}\right\} \implies 3^{\ln 2} - 2^{\ln 3} = 0$$

Machten uitdrukken in exp. Je kunt nu ook elke macht transformeren in een e-macht met behulp van de formule

$$\boxed{p^q = e^{q\ln p}}$$

Het bewijs van deze formule kun je zelf wel verzinnen:

$$p^q = e^{\ln p^q} = e^{q\ln p}$$

Logaritme met een ander grondtal. Met ${}^a\!\log x$ (gedefinieerd als $a > 0$ en $x > 0$) bedoel ik het reële getal y waarvoor $a^y = x$. Dus:

$$\boxed{y = {}^a\!\log x \quad\Longleftrightarrow\quad a^y = x}$$

De logaritme met grondtal 10 kom je nog wel eens tegen in oude schoolboekjes en op rekenmachientjes (waar hij gewoon log heet), die met grondtal 2 geniet onder informatici nog wel enige populariteit. Voorbeelden:

$${}^2\!\log 8 = 3 \qquad\qquad {}^{10}\!\log 100 = 2$$

Voor ${}^a\!\log x$ gelden soortgelijke rekenregels als voor $\ln x$. Je kunt bij het rekenen ook gebruik maken van het verband tussen ${}^a\!\log$ en ln:

$$\boxed{{}^a\!\log x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

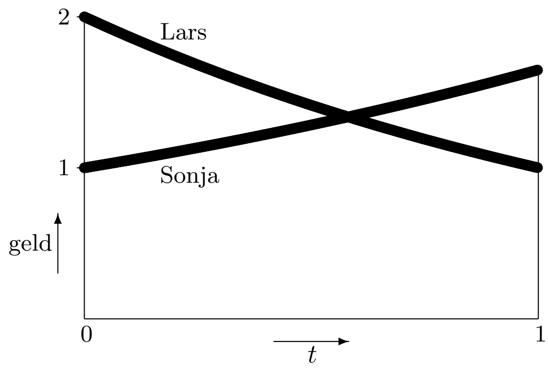
Opgaven hoofdstuk 5

Opgave 1. Schets de grafiek van $y = e^{-x}$ en bereken het snijpunt van deze grafiek met de lijn $y = 0.2$

Opgave 2. (eenheden: jaar, 1000 euro)
Sonja wordt rijker, Lars wordt armer. Hun bezit wordt voor $0 \leq t \leq 1$ gegeven door

Sonja:	$\sqrt{\exp(t)}$
Lars:	2^{1-t}

Op welk moment is Sonja precies even rijk als Lars?



Opgave 3. Schrijf de volgende getallen eenvoudiger:

a) $-\ln\dfrac{1}{7}$ b) $\ln 6 - \ln 3$ c) $\dfrac{\ln 9}{\ln 3}$ d) $\ln 2 + \ln 0.5$

Opgave 4. Bepaal het reële getal x waarvoor $5^{x+1} = 7^{x-1}$

Opgave 5. Bereken 49^t als $t = \dfrac{1}{\ln 7}$

Opgave 6. Schrijf 5^x als e-macht

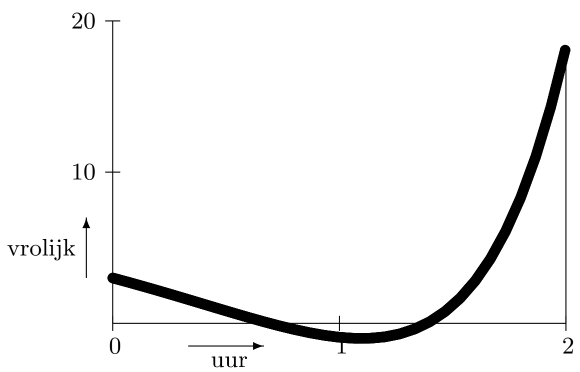
Opgave 7. Bereken $\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 9}$

Opgave 8. Vereenvoudig de uitdrukking $e^{3\ln t}$

Opgave 9. Bereken ${}^{10}\log 0.001$

Opgave 10. Druk ln uit in ${}^{2}\log$

Opgave 11. Los x op uit $\ln 2x = 1 + \ln x^2$

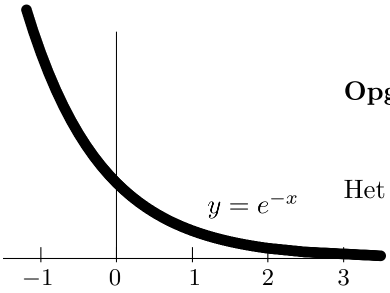


Opgave 12. Tijdens het maken van deze opgave werd je vrolijkheidsindex tussen 0.00 en 2.00 uur gegeven door de formule

$$\boxed{\text{vrolijk}\,(t) = e^{2t} - 6e^t + 8}$$

Op welk moment was je het minst vrolijk?

Oplossingen



Opgave 1. Het gezochte snijpunt (x, y) voldoet aan $e^{-x} = y$ en $y = 0.2$, dus

$$e^{-x} = 0.2 \implies -x = \ln 0.2 \implies x = -\ln 0.2 = \ln 0.2^{-1} = \ln 5$$

Het is dus het punt $(\ln 5\,,\ 0.2)$

Opgave 2. Ik vergelijk de ln-waarden van hun bezit:

$$\ln\left(\sqrt{e^t}\right) = \ln 2^{1-t} \implies \frac{1}{2}\ln e^t = (1-t)\ln 2 \implies \frac{1}{2}t = (1-t)\ln 2 \implies \frac{1}{2}t = \ln 2 - t\ln 2$$

$$\implies \frac{1}{2}t + t\ln 2 = \ln 2 \implies \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)t = \ln 2 \implies t = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{\ln 4}{1 + \ln 4}$$

Opgave 3.

a) $-\ln\frac{1}{7} = \ln\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = \boxed{\ln 7}$

b) $\ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \boxed{\ln 2}$

c) $\frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2\ln 3}{\ln 3} = \boxed{2}$

d) $\ln 2 + \ln 0.5 = \ln(2 \cdot 0.5) = \ln 1 = \boxed{0}$

Opgave 4. Ik zet er links en rechts ln voor:

$$5^{x+1} = 7^{x-1} \implies \ln 5^{x+1} = \ln 7^{x-1} \implies (x+1)\ln 5 = (x-1)\ln 7$$

$$\implies x\ln 7 - x\ln 5 = \ln 7 + \ln 5 \implies x = \frac{\ln 7 + \ln 5}{\ln 7 - \ln 5} = \frac{\ln 35}{\ln 1.4}$$

Opgave 5. $49^t = e^{\ln(49^t)} = e^{t\ln 49} = e^{2t\ln 7} = \boxed{e^2}$

Opgave 6. $5^x = e^{x\ln 5}$

Opgave 7. $\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 9} = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\ln 9} = e^{\frac{1}{2}\ln 9} = e^{\ln 3} = 3$

Opgave 8. $e^{3\ln t} = e^{\ln t^3} = t^3$

Opgave 9. ${}^{10}\log 0.001 = -3$, want $10^{-3} = 0.001$

Opgave 10. Dat kan bijvoorbeeld zo: $\boxed{\ln x = \frac{{}^2\log x}{{}^2\log e}}$

Opgave 11. Ik laat er wat rekenregels op los:

$$\ln 2x = 1 + \ln x^2 \implies \ln 2 + \ln x = 1 + 2\ln x \implies \ln x = \ln 2 - 1$$

$$\implies x = e^{\ln 2 - 1} = e^{\ln 2} \cdot e^{-1} = \tfrac{2}{e}$$

Opgave 12. Je werd opeens vrolijk toen je aan je geliefde rekenregel $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$ dacht:

$$\left(e^t - 3\right)^2 = \left(e^t\right)^2 - 6e^t + 9 = e^{2t} - 6e^t + 9 \implies \text{vrolijk}\,(t) = \left(e^t - 3\right)^2 - 1$$

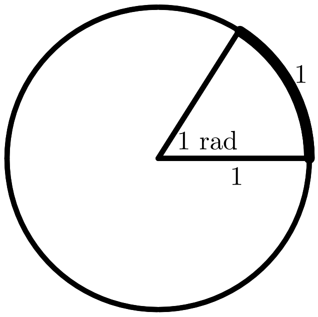
en de minimale waarde hiervan is -1 omdat een kwadraat altijd ≥ 0 is. Het minimum wordt aangenomen als dit kwadraat nul is, dus als

$$e^t - 3 = 0 \implies e^t = 3 \implies \boxed{t = \ln 3}$$

6. De functies sin, cos en tan

Graden en radialen. Hoeken worden soms gemeten in graden (bijvoorbeeld: een rechte hoek is $90°$) en soms in radialen (bijvoorbeeld: een rechte hoek is $\frac{\pi}{2}$ radialen). De definitie van het begrip 'radiaal':

$$\boxed{\text{een radiaal is de grootte van de hoek die behoort bij booglengte 1 op afstand 1}}$$

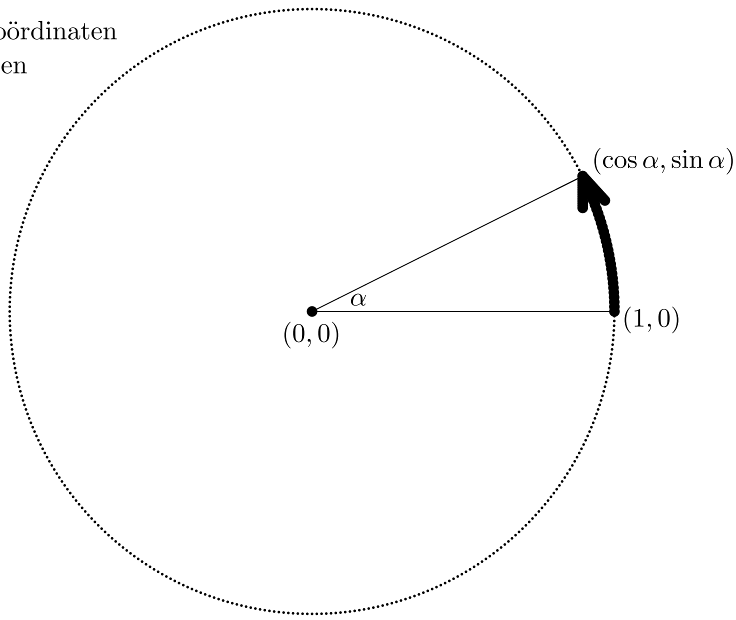


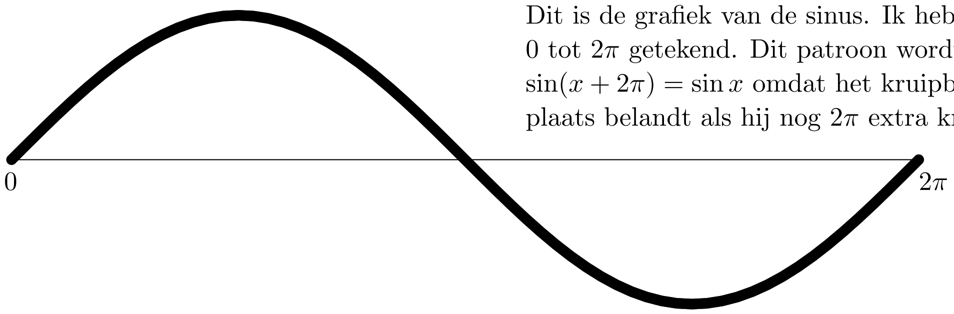
Toelichting. Teken een cirkel met straal 1. Vanuit het middelpunt zie je onder een hoek van 1 radiaal een cirkelboogje van lengte 1. De omtrek van de hele cirkel is 2π, dus $360°$ is 2π radialen en dus

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{1 graad} & = & \frac{\pi}{180} \text{ radialen} \\ \text{1 radiaal} & = & \frac{180}{\pi} \text{ graden} \end{array}}$$

Sinus en cosinus. $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ zijn de coördinaten van het punt op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ waar een kruipbeestje is als het vanuit $(1, 0)$ tegen de wijzers van de klok in een booglengte α kruipt. Of, wat op hetzelfde neerkomt: nadat hij een hoek van α radialen met de oorsprong heeft gemaakt, is het kruipbeestje in $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

Dit geldt ook voor negatieve α, het kruipbeestje kruipt dan met de klok mee. Zo is $\cos(-5\pi) = -1$, want als hij een booglengte 5π achteruit kruipt, belandt hij in $(-1, 0)$





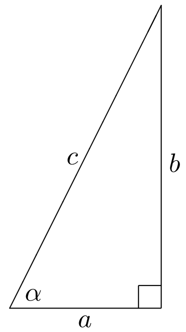
Dit is de grafiek van de sinus. Ik heb alleen het stukje vanaf 0 tot 2π getekend. Dit patroon wordt periodiek voortgezet: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ omdat het kruipbeestje weer op dezelfde plaats belandt als hij nog 2π extra kruipt

Tangens. $\tan x$ is het quotiënt van $\sin x$ en $\cos x$:

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Gekke notatie. Met $\sin^2 x$ bedoelt men $(\sin x)^2$, en met bijvoorbeeld $\tan^3 x$ bedoelt men $(\tan x)^3$

Interpretatie in een rechthoekige driehoek. Voor $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ geldt:

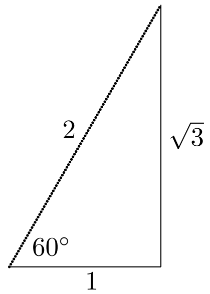


$$\cos\alpha = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{b}{c}$$

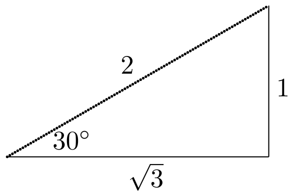
$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{b}{a}$$

Voorbeelden.



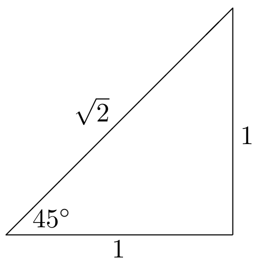
$60°$ is $\frac{\pi}{3}$ radialen, dus

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array}}$$



$30°$ is $\frac{\pi}{6}$ radialen, dus

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}}$$



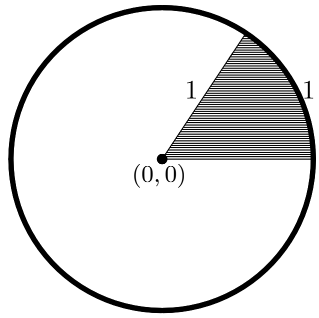
$45°$ is $\frac{\pi}{4}$ radialen, dus

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}}$$

Rekenregels. De belangrijkste rekenregels voor sin en cos:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
\sin(-x) = -\sin x \qquad\qquad \cos(-x) = \cos x \\
\sin n\pi = 0 \ \text{ en } \ \cos n\pi = (-1)^n \quad \text{als } n \text{ een geheel getal is} \\
\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{en} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin 2x = 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{array}}$$

Opgaven hoofdstuk 6



Opgave 1. Bereken de oppervlakte van een sector van de eenheidscirkel met booglengte 1

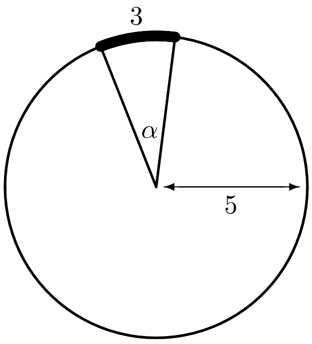
Opgave 2. Vul in:

$$30 \text{ graden} = \cdots \text{ radialen}$$

$$\tfrac{5\pi}{4} \text{ radialen} = \cdots \text{ graden}$$

$$63 \text{ graden} = \cdots \text{ radialen}$$

Opgave 3. Teken de grafiek van $y = \cos x$ op het domein $0 \leq x \leq 2\pi$



Opgave 4. Een mier kruipt over een cirkel met een straal van 5 centimeter. De lengte van het door hem afgelegde cirkelboogje is 3 cm. Bereken de hoek α van dit boogje met het middelpunt

a) in radialen

b) in graden

Opgave 5.

a) Bereken de sinus van 150 graden

b) Bereken de cosinus van $-\frac{37}{4}\pi$ radialen

Opgave 6. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

a) $(\sin t + \cos t)^2 - \sin 2t$

b) $\cos^4 t - \sin^4 t$

c) $\cos 7t \cos 2t - \sin 7t \sin 2t$

Opgave 7. Bereken $\sin \dfrac{\pi}{12}$

Opgave 8. Bewijs de formule

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

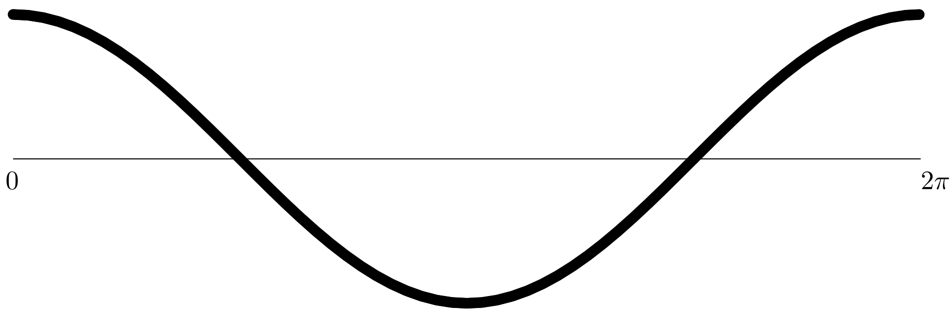
Oplossingen

Opgave 1. Bij booglengte 2π hoort oppervlakte π, dus bij booglengte 1 hoort oppervlakte $\dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$

Opgave 2.

30 graden	$=$	$\frac{\pi}{6}$ radialen
$\frac{5\pi}{4}$ radialen	$=$	225 graden
63 graden	$=$	$\frac{7}{20}\pi$ radialen

Opgave 3.



Opgave 4.

a) Deze hoek α is $\frac{3}{5}$ radialen, want bij een hoek α hoort op afstand r een booglengte αr

b) $\frac{3}{5}$ radialen is $\frac{108}{\pi}$ graden

Opgave 5.

a) $\sin \dfrac{5}{6}\pi = \sin \dfrac{1}{6}\pi = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\left(-\dfrac{37}{4}\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{37}{4}\pi + 10\pi\right) = \cos \dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 6.

a) $(\sin t + \cos t)^2 - \sin 2t = \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t - \sin 2t = 1$

(gebruikte formules: $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ en $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ en $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)

b) $\cos^4 t - \sin^4 t = \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) = \cos 2t$

(gebruikte formules: $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ en $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$)

c) $\cos 7t \cos 2t - \sin 7t \sin 2t = \cos(7t + 2t) = \cos 9t$

(gebruikte formule: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$)

Opgave 7. Dat kan bijvoorbeeld met de formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, toegepast met $x = \frac{\pi}{12}$:

$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 \implies 2\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\implies \sin\frac{\pi}{12} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \implies \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Het kan ook nóg simpeler:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Opgave 8. $1 + \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. Vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen. Een vergelijking van het type

$$\cdots x + \cdots = \cdots x + \cdots$$

verandert niet wezenlijk (ik bedoel: houdt dezelfde oplossingen) onder de volgende manipulaties:

1. het linker- en rechterlid met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen (delen mag ook)
2. een term naar de andere kant van het gelijkteken transporteren en het teken van deze term veranderen van plus in min (of omgekeerd)

Een voorbeeldje, ik wil x oplossen uit $\frac{3}{5}x + \frac{7}{2} = 1 - \frac{1}{4}x$. Dat lukt als volgt:

1. ik ben geen liefhebber van breuken en daarom vermenigvuldig ik alles met 20:

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{2} = 1 - \frac{1}{4}x \quad \Longleftrightarrow \quad 12x + 70 = 20 - 5x$$

2. ik transporteer $-5x$ naar links (wordt $+5x$) en 70 naar rechts (wordt -70), dan wordt het simpel:

$$\Longleftrightarrow \quad 12x + 5x = 20 - 70 \quad \Longleftrightarrow \quad 17x = -50 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{50}{17}$$

Ongelijkheden. Voor ongelijkheden (zoals $-3x + 5 \leq 1 - x$) geldt hetzelfde, maar bij vermenigvuldiging met een negatief getal keert het ongelijkheidsteken om, bijvoorbeeld $\leq$ wordt $\geq$

$$-3x + 5 \leq 1 - x \quad \overset{\text{sorteer}}{\Longleftrightarrow} \quad -3x + x \leq 1 - 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x \leq -4 \quad \overset{\cdot(-\frac{1}{2})}{\Longleftrightarrow} \quad x \geq 2$$

Vergelijkingen in context. De aanpak: zeg wat x betekent en stel een vergelijking voor x op

Probleem. Hoeveel bier (5% alcohol) moet ik bij een halve liter wijn (12% alc) doen om een mixdrank met 10% alcohol te krijgen?

Oplossing. Stel ik doe er x liter bier bij, het alcoholpercentage wordt dan

$$\frac{\text{hoeveelheid alcohol}}{\text{hoeveelheid mixdrank}} \cdot 100\% = \frac{0.05\,x + 0.12 \cdot 0.5}{x + 0.5} \cdot 100\% = \frac{5x + 6}{x + 0.5} \text{ procent}$$

en de op te lossen vergelijking is

$$\frac{5x + 6}{x + 0.5} = 10 \quad \Longrightarrow \quad 5x + 6 = 10(x + 0.5) = 10x + 5 \quad \Longrightarrow \quad -5x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{5}$$

Er moet dus 0.2 liter bier bij de wijn

Kwadratische vergelijkingen. Hiervoor hebben slimme wiskundigen de abc-formule bedacht:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Als $b^2 - 4ac$ negatief is staat hier onzin, de vergelijking heeft dan geen oplossingen. Voorbeeldje:

$$3x^2 - 5x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{37}$$

De oplossingen zijn dus $\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$ en $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}$

Ontbinden in factoren. Soms kun je $ax^2 + bx + c$ schrijven als een product, bijvoorbeeld

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3x - 1)(x + 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 1 = 0 \text{ of } x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \text{ of } x = -2$$

Kwadraat afsplitsen. Dat is een andere nuttige techniek om 2e graads veeltermen te onderzoeken:

$$x^2-10x+18=0 \iff (x-5)^2-7=0 \iff (x-5)^2=7 \iff x-5=\pm\sqrt{7} \iff x=5\pm\sqrt{7}$$

Verborgen kwadratische vergelijkingen. De variabele is dan niet x maar iets anders, bijvoorbeeld

$$4^x+2^x=1 \implies (2^x)^2+2^x-1=0 \overset{\text{abc-formule}}{\implies} 2^x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Bij $\pm$ kun je dat minteken wel schrappen want 2^x is nóóit negatief, dus

$$2^x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \overset{\text{ln-truc}}{\implies} \ln 2^x=\ln\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \implies x\ln 2=\ln\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \implies x=\frac{\ln\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\ln 2}$$

Stelsels van vergelijkingen. Bij twee of meer vergelijkingen in twee of meer onbekenden komen twee stategieën in aanmerking:

- elimineer een van de onbekenden
- druk een van hen in de ander uit en substitueer dit

Ik geef van allebei een voorbeeldje

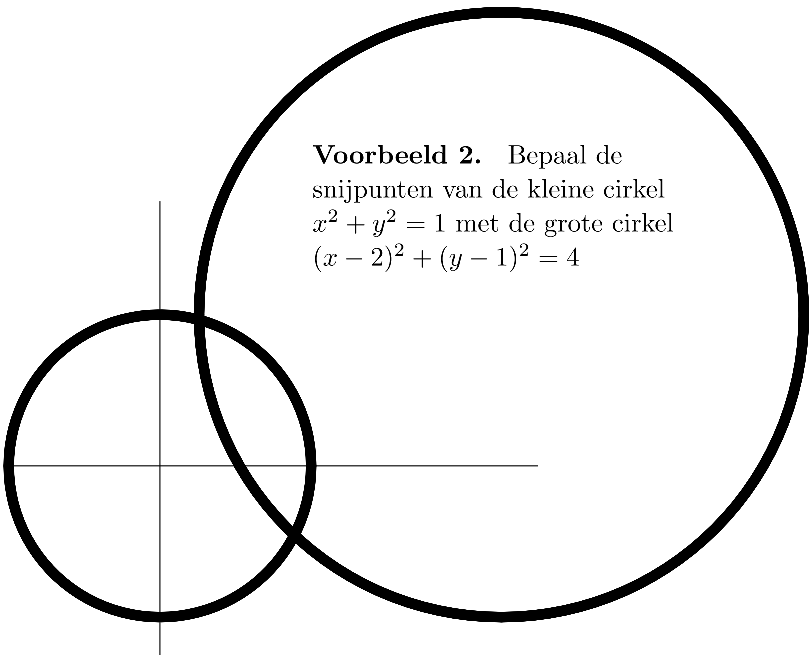
Voorbeeld 1. Los x en y op uit

$$\boxed{\begin{array}{c}2x+7y=3\\3x+5y=2\end{array}}$$

Oplossing. Ik ga x elimineren, dat lukt als ik de 1e vergelijking met 3 vermenigvuldig, de 2e met 2, en ze dan van elkaar aftrek:

$$\left.\begin{array}{lcl}2x+7y=3 & \overset{\cdot 3}{\implies} & 6x+21y=9\\3x+5y=2 & \overset{\cdot 2}{\implies} & 6x+10y=4\end{array}\right\} \overset{-}{\implies} 11y=5 \implies y=\frac{5}{11}$$

en nu je y kent zal het ook wel lukken om x te achterhalen: $x=-\dfrac{1}{11}$



Voorbeeld 2. Bepaal de snijpunten van de kleine cirkel $x^2+y^2=1$ met de grote cirkel $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

Oplossing. Ik trek de vergelijkingen van elkaar af, hetgeen resulteert in

$$4x+2y=2 \implies y=1-2x$$

Dit substitueer ik in $x^2+y^2=1$:

$$\begin{aligned}&x^2+(1-2x)^2=1\\ \implies\ & 5x^2-4x=0\\ \implies\ & x(5x-4)=0\\ \implies\ & x=0 \text{ of } x=\tfrac{4}{5}\end{aligned}$$

De snijpunten zijn dus $(0,1)$ en $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

Opgaven hoofdstuk 7

Opgave 1. Los de volgende vergelijkingen op:

a) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{7} = 1 - x$ b) $-2(x-5) = 3(2-3x) + 5(1-x)$ c) $\frac{1-4x}{x-3} = 5$

Opgave 2. Hoeveel wijn (12% alc) moet ik bij een liter bier (5% alc) mengen om een drank met 8% alcohol te krijgen?

Opgave 3. Ga na welke reële getallen x voldoen aan $1 < \frac{7}{2} - \frac{1}{6}x < 2$

Opgave 4. Los op:

a) $x^2 = 3 + 2x$ b) $x^2 = 6x + 7$ c) $3x^2 + 5x = (x+1)^2$

Opgave 5. Los de vergelijking $x^2 + 3x + 1 = 0$ op met kwadraat afsplitsen

Opgave 6. Bereken via kwadraat afsplitsen de maximale waarde van $5x - x^2$

Opgave 7. Zoek het getal t tussen 0 en π waarvoor geldt:

$$2\sin t = \sqrt{5 - 4\cos t}$$

Opgave 8. Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan de vergelijking

$$|x - \sqrt{x}| = 6$$

Opgave 9. (eenheden: uur, meter)
Een torretje en een pissebed kruipen van tijdstip $t = 0$ tot $t = 1$ over de x-as, waarbij hun positie op elk tijdstip gegeven wordt door

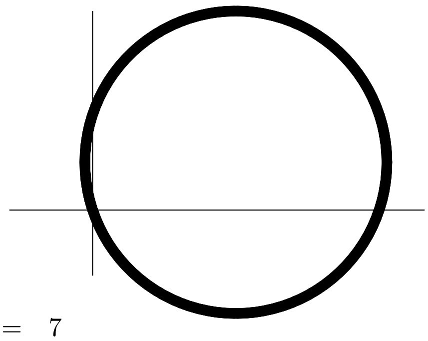
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{torretje}\,(t) & = & 6 - e^t \\ \text{pissebed}\,(t) & = & e^{2t} \end{array}}$$

Op welk(e) tijdstip(pen) ontmoeten ze elkaar?

Opgave 10. De hiernaast getekende cirkel heeft als vergelijking

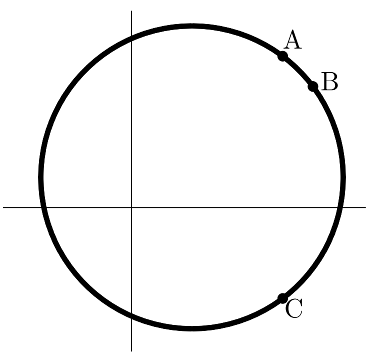
$$x^2 + y^2 = 3x + y$$

Bereken zijn oppervlakte



Opgave 11. Los x_1 en x_2 op uit

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = & 7 \\ 5x_1 - 3x_2 & = & 1 \end{cases}$$



Opgave 12. Bepaal de coördinaten van het middelpunt van de hiernaast getekende cirkel die gaat door de punten

A	=	(5, 5)
B	=	(6, 4)
C	=	(5, −3)

Oplossingen

Opgave 1.

a) $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{7} = 1 - x \quad \overset{\cdot 14}{\Longrightarrow} \quad 21x + 10 = 14 - 14x \quad \overset{\text{sorteer}}{\Longrightarrow} \quad 35x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{4}{35}$

b) $-2(x-5) = 3(2-3x) + 5(1-x) \quad \Longrightarrow \quad -2x + 10 = 6 - 9x + 5 - 5x \quad \Longrightarrow \quad 12x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{12}$

c) $\dfrac{1-4x}{x-3} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 1 - 4x = 5(x-3) \quad \Longrightarrow \quad 1 - 4x = 5x - 15 \quad \Longrightarrow \quad 16 = 9x \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{16}{9}$

Opgave 2. Stel ik doe er x liter wijn bij, het percentage alcohol wordt dan

$$\frac{\text{hoeveelheid alcohol}}{\text{hoeveelheid mixdrank}} \cdot 100\% = \frac{0.12\,x + 0.05}{x+1} \cdot 100\% = \frac{12x+5}{x+1} \text{ procent}$$

en de vergelijking wordt dus

$$\frac{12x+5}{x+1} = 8 \quad \Longrightarrow \quad 12x + 5 = 8(x+1) \quad \Longrightarrow \quad 12x + 5 = 8x + 8 \quad \Longrightarrow \quad 4x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{4}$$

Ik doe dus driekwart liter wijn bij het bier

Opgave 3.

$$1 < \frac{7}{2} - \frac{1}{6}x < 2 \quad \overset{\cdot 6}{\Longleftrightarrow} \quad 6 < 21 - x < 12 \quad \overset{-21}{\Longleftrightarrow} \quad -15 < -x < -9 \quad \overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} \quad 15 > x > 9$$

De oplossingen zijn dus alle reële getallen tussen 9 en 15

Opgave 4.

a) $x^2 = 1 + 2x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \overset{\text{abc-formule}}{\Longrightarrow} \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

b) $x^2 = 6x + 7 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 6x - 7 = 0 \quad \overset{\text{ontbinden}}{\Longrightarrow} \quad (x-7)(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 7 \text{ of } -1$

c) $3x^2 + 5x = (x+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

Opgave 5. Het begin $x^2 + 3x$ doet je direct denken aan $(x + \frac{3}{2})^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$:

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

De oplossingen zijn dus $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Opgave 6. Volgens de formule $(x - \frac{5}{2})^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ geldt

$$5x - x^2 = \frac{25}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

De maximale waarde is $\frac{25}{4}$ omdat de term $-(\cdots)^2$ negatief of nul is (nul bij $x = \frac{5}{2}$)

Opgave 7. Eerst maar eens links en rechts kwadrateren:

$$2\sin t = \sqrt{5 - 4\cos t} \quad \Longrightarrow \quad 4\sin^2 t = 5 - 4\cos t$$

Hierin herken je (hopelijk) een kwadratische vergelijking in $\cos t$. Je moet dan wel nog even $\sin^2 t$ schrijven als $1 - \cos^2 t$, de vergelijking wordt dan $4\left(1 - \cos^2 t\right) = 5 - 4\cos t$ wat ik kan sorteren tot

$$4\cos^2 t - 4\cos t + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\cos t - 1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{3}$$

Opgave 8. $|x-\sqrt{x}|=6$ betekent $x-\sqrt{x}=\pm 6$. We moeten dus twee kwadratische vergelijkingen in $\sqrt{x}$ oplossen:

(1) $x-\sqrt{x}=6 \iff (\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0 \iff (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0 \iff \sqrt{x}=3$ of $\sqrt{x}=-2$
Omdat $\sqrt{x}$ niet negatief kan zijn is $\sqrt{x}=3$ en dus $x=9$

(2) $x-\sqrt{x}=-6 \iff (\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+6=0$, deze vergelijking heeft geen oplossing

De enige oplossing is dus $x=9$

Opgave 9. Hun posities zijn gelijk als

$$e^{2t}+e^t-6=0 \quad\iff\quad (e^t-2)(e^t+3)=0 \quad\iff\quad e^t=2 \quad\iff\quad \boxed{t=\ln 2}$$

Opgave 10. Ik schrijf de vergelijking van de cirkel even wat handiger door kwadraten af te splitsen:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} \text{het middelpunt is } \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \text{de straal is } \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

De oppervlakte is dus $\pi\cdot \text{straal}^2=\frac{5}{2}\pi$

Opgave 11. Ik elimineer x_2 als volgt:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2=7 & \overset{\cdot 3}{\Longrightarrow} & 6x_1+3x_2=21 \\ & & 5x_1-3x_2=\ 1 \\ & + & \overline{} \\ & & 11x_1 \qquad\ =22 \quad\Longrightarrow\quad x_1=2 \quad\Longrightarrow\quad x_2=3 \end{array}$$

Opgave 12. Noem het middelpunt (a,b) en de straal r. De vergelijking van de cirkel is dan

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

De coördinaten van de punten A, B en C moeten aan deze vergelijking voldoen, dus

$$\begin{cases} (5-a)^2+(5-b)^2=r^2 & (*) \\ (6-a)^2+(4-b)^2=r^2 & (**) \\ (5-a)^2+(-3-b)^2=r^2 & (***) \end{cases}$$

Door wat met deze vergelijkingen te goochelen kunnen we a en b uitrekenen, bijvoorbeeld als volgt:

- uit $(*)$ en $(***)$ volgt $(5-b)^2=(-3-b)^2$, dus $(5-b)^2=(3+b)^2$, dus $5-b=\pm(3+b)$
- $5-b=-(3+b)$ lijkt mij onmogelijk (jou ook?), dus moet $5-b=3+b$ en dus $b=1$
- trek de vergelijkingen $(*)$ en $(**)$ van elkaar af en je vindt $(5-a)^2-(6-a)^2+7=0$ en dus $a=2$

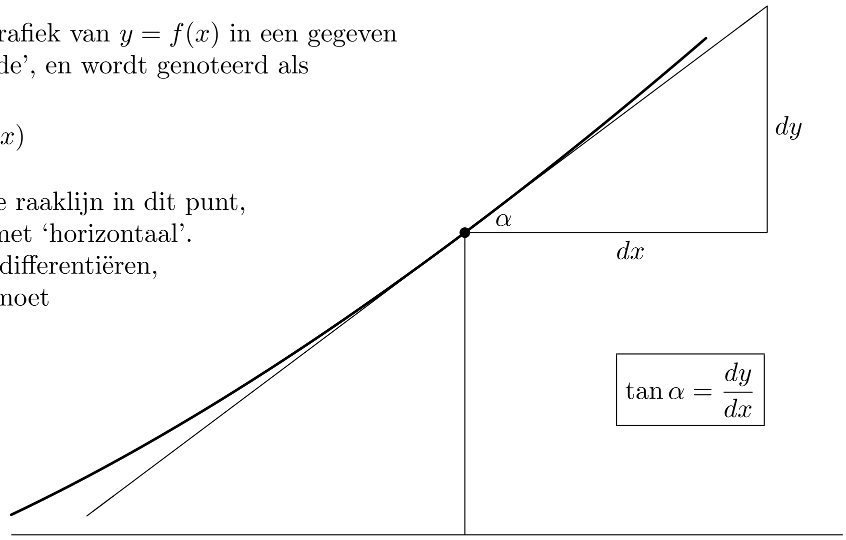
Het middelpunt van de cirkel is dus $(2,1)$

8. Differentiëren

Afgeleide. De mate waarin de grafiek van $y = f(x)$ in een gegeven punt stijgt heet 'helling' of 'afgeleide', en wordt genoteerd als

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{of} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

Het is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dit punt,
deze is de tangens van de hoek α met 'horizontaal'.
Het berekenen van de helling heet differentiëren,
in dit hoofdstuk leren we hoe dat moet



Standaard afgeleiden. Ik geef een lijstje van eenvoudige functies en hun afgeleiden:

functie	afgeleide	toelichting
c	0	de grafiek van een constante functie helt niet
$ax + b$	a	dat weet je al uit hoofdstuk 4
x^c	$c\,x^{c-1}$	als c een constante is
c^x	$c^x \ln c$	als c een constante is
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	

Voorbeeld 1. De afgeleide van x^7 is $7x^6$ (zie de formule voor de afgeleide van x^c)

Voorbeeld 2. De afgeleide van e^x is e^x (zie de formule voor de afgeleide van c^x)

Voorbeeld 3. De afgeleide van $\frac{1}{x}$ is $-\frac{1}{x^2}$ (zie x^c waarbij je voor c het getal -1 invult)

Voorbeeld 4. De afgeleide van $\sqrt{x}$ is $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (zie x^c waarbij je voor c het getal $\frac{1}{2}$ invult)

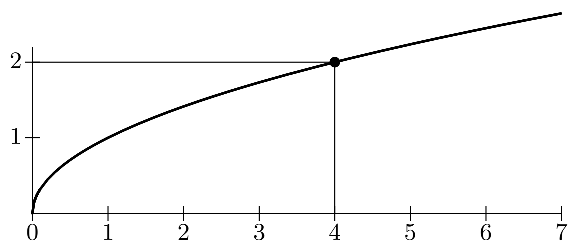
Berekening van de helling. Ik wil dolgraag weten hoe steil $y = \sqrt{x}$ is in het punt $(4, 2)$.
Zo'n berekening vergt twee stappen:

Stap 1. De afgeleide is $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Stap 2. Vul nu $x = 4$ in:

$$\left[\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

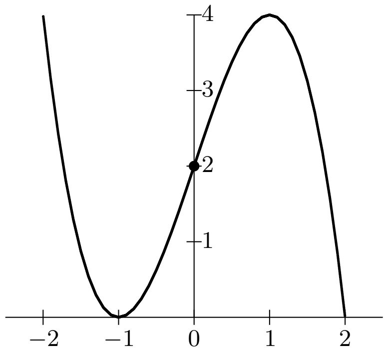
De helling in het punt $(4, 2)$ is dus $\frac{1}{4}$



Somregel. De afgeleide van de som is de som van de afgeleiden. Zo simpel werkt het ook bij verschil, en bij vermenigvuldiging met een constante:

rekenregel	voorbeeldje
$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$	$\frac{d}{dx}\left(x^3+x^2\right) = 3x^2+2x$
$\frac{d}{dx}\left(f(x)-g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$	$\frac{d}{dx}\left(x-2^x\right) = 1-2^x\ln 2$
$\frac{d}{dx}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot\frac{d}{dx}f(x)$	$\frac{d}{dx}\left(7\sin x\right) = 7\cos x$

Voorbeeld 5. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $(0,2)$ aan de grafiek van $y = 2+3x-x^3$



Oplossing. Ik bereken eerst maar eens de helling in dit punt:

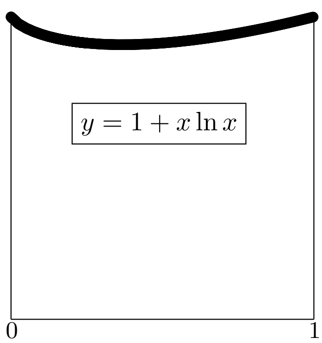
$$\frac{dy}{dx} = 3-3x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 3$$

De raaklijn is dus van het type $y = 3x+b$, en door hierin $(0,2)$ in te vullen ontdek je dat $b=2$. De raaklijn is dus $y = 3x+2$

Productregel. De afgeleide van een product is niet het product van de afgeleiden, dat ligt helaas ietwat gevoeliger:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)}$$

Bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}\left(x^3\sin x\right) = x^3\cdot\frac{d}{dx}\sin x + (\sin x)\cdot\frac{d}{dx}x^3 = x^3\cos x + 3x^2\sin x$



Voorbeeld 6. Bereken het minimum van $1+x\ln x$ voor $0<x<1$

Oplossing. Een briljant idee: op de plaats waar de functie minimaal is, is zijn helling nul. De helling is

$$\frac{d}{dx}\left(1+x\ln x\right) = 0 + \frac{d}{dx}x\ln x = x\cdot\frac{d}{dx}\ln x + (\ln x)\cdot\frac{d}{dx}x = 1+\ln x$$

en het is beslist niet moeilijk te achterhalen wanneer dit nul is:

$$1+\ln x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln x = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = e^{-1}$$

De minimale waarde van de functie is dus $1+e^{-1}\ln e^{-1} = 1-\frac{1}{e}$

Quotiëntregel. Ook het differentiëren van een quotiënt van twee functies is beslist geen kattenpis:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) \;-\; f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}}$$

Bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}\frac{2+3x}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot 3-(2+3x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

Ik had altijd onnoemelijk veel moeite met het onthouden van deze vreselijke quotiëntregel, totdat ik in een oud schoolboekje een handig ezelsbruggetje tegenkwam:

$$\frac{d}{dx}\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \frac{\text{nat} - \text{tan}}{\text{noemer}^2} = \frac{\text{noemer}\cdot\text{afgeleide teller} - \text{teller}\cdot\text{afgeleide noemer}}{\text{noemer}^2}$$

Kettingregel. Als y een functie van u is, en u een functie van x, dan is

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Een voorbeeld. Je wilt de functie $y = \ln(x^2+1)$ differentiëren. Lees dit als $y = \ln u$ met $u = x^2+1$ en pas de kettingregel toe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

Voorbeeld 7. Ik sprint twee seconden. De na t sec afgelegde afstand $s(t)$ is voor $0 \le t \le 2$ gegeven door

$$s(t) = \left(2^t - 1\right)^{\frac{3}{2}} \text{ meter}$$

Bereken mijn snelheid op tijdstip $t = 1$

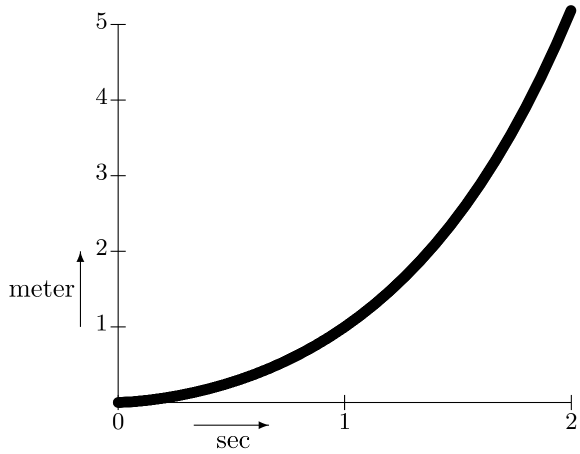
Oplossing. De snelheid $v(t)$ is de afstandstoename per seconde:

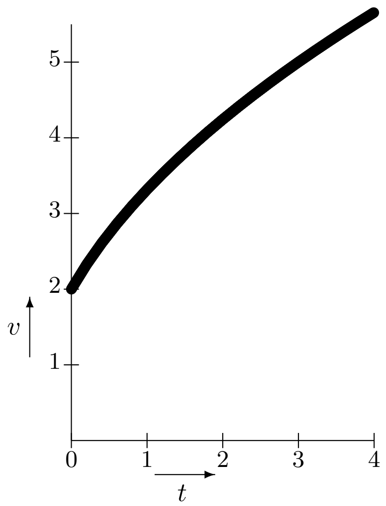
$$v(t) = \frac{d}{dt}\, s(t)$$

Ik pas de kettingregel toe met $s = u^{\frac{3}{2}}$ en $u = 2^t - 1$:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} \cdot 2^t \ln 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2^t - 1} \cdot 2^t \ln 2$$

en dus $v(1) = 3 \ln 2$ m/sec





Voorbeeld 8. (eenheden: km, uur)
Voor $0 \le t \le 4$ is mijn wandelsnelheid gegeven door de formule

$$v(t) = \sqrt{4 + 7t}$$

Bereken mijn versnelling op tijdstip $t = 3$

Oplossing. De versnelling $a(t)$ is de snelheidstoename per uur. Volgens de kettingregel met $v = \sqrt{u}$ en $u = 4 + 7t$ is deze

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 7 = \frac{7}{2\sqrt{4+7t}}$$

Op tijdstip $t = 3$ is dit $a(3) = \dfrac{7}{2\sqrt{4+21}} = 0.7$ km/u^2

Voorbeeld 9. Het aantal pipo's na t jaar wordt gegeven door

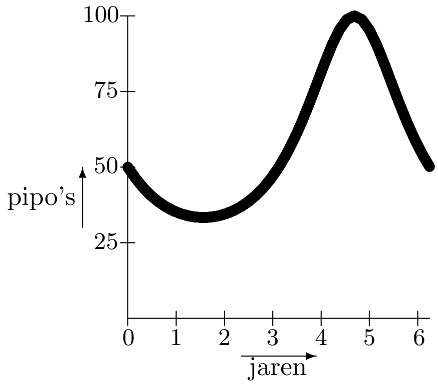
$$\boxed{\text{pipo}\,(t) = \frac{100}{2 + \sin t}}$$

Bereken de groei van de pipopopulatie op $t = \pi$

Oplossing. $\text{pipo} = 100u^{-1}$ waarbij $u = 2 + \sin t$, dus

$$\frac{d\,\text{pipo}}{dt} = \frac{d\,\text{pipo}}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -100u^{-2} \cdot \cos t = \frac{-100 \cos t}{(2 + \sin t)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\frac{d\,\text{pipo}}{dt}\right]_{t=\pi} = 25 \text{ pipo's per jaar}$$



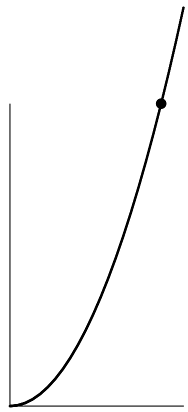
Opgaven hoofdstuk 8

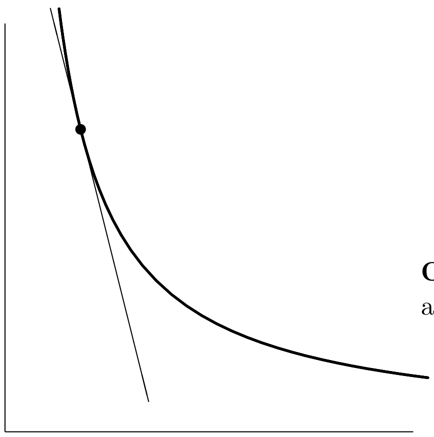
Opgave 1. Bereken de afgeleide van $\sqrt[3]{x}$

Opgave 2.

a) Bereken de afgeleide van $y = x^2$

b) Bereken de helling van de grafiek van $y = x^2$ in het punt $(2, 4)$

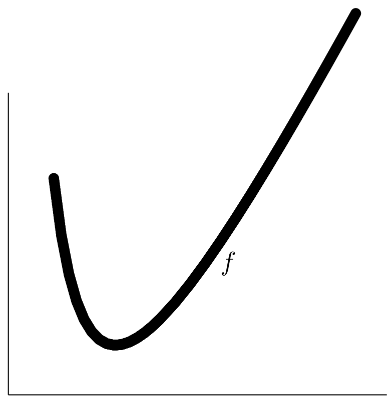




Opgave 3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(1, 4)$ aan de kromme $xy = 4$

Opgave 4. Differentieer

a) $6x\sqrt[3]{x}$ b) $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{7}{x^2}$ c) $\dfrac{x^5 - 3}{x}$

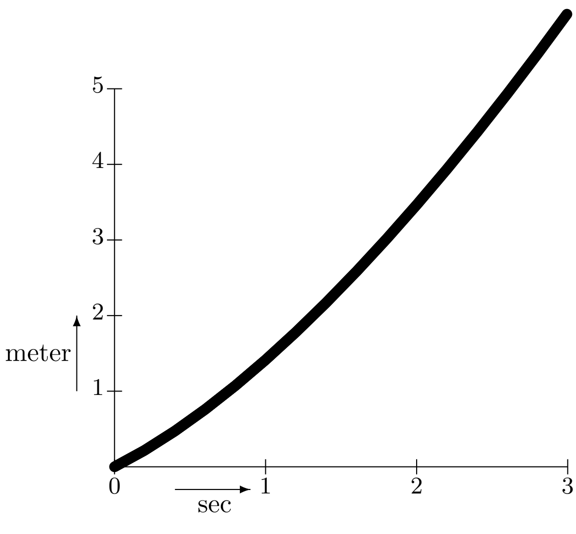


Opgave 5. Bereken het minimum op het domein $x > 0$ van

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x}$$

Opgave 6. Bereken de afgeleide van

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $(1 + 3x)^5$ c) $\ln(1 + \cos^2 x)$



Opgave 7. De na t seconden afgelegde afstand (in meters) wordt gegeven door de formule

$$s(t) = \sqrt{t^3 + t^2}$$

Geef een functievoorschrift voor de snelheid

Oplossingen

Opgave 1. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Opgave 2.

a) $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$

b) De helling in het punt $(2,4)$ is $\left[\frac{d}{dx}x^2\right]_{x=2} = \Big[2x\Big]_{x=2} = 4$

Opgave 3. Ik bereken eerst de betreffende richtingscoëfficiënt:

$$xy = 4 \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{4}{x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = -4$$

De raaklijn is dus te schrijven als $y = -4x + b$, en omdat $(1,4)$ hieraan moet voldoen is $b = 8$. Gevonden:

$$\boxed{4x + y = 8}$$

Opgave 4.

a) $\frac{d}{dx}\,6x\sqrt[3]{x} = 6\cdot\frac{d}{dx}\,x^{\frac{4}{3}} = 6\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{x}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{7} - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{1}{7}\cdot\frac{d}{dx}\,x^2 - 7\cdot\frac{d}{dx}\,x^{-2} = \frac{1}{7}\cdot 2x - 7\cdot\left(-2x^{-3}\right) = \frac{2}{7}x + \frac{14}{x^3}$

c) $\frac{d}{dx}\,\frac{x^5-3}{x} = \frac{d}{dx}\left(x^4 - \frac{3}{x}\right) = 4x^3 + \frac{3}{x^2}$

Opgave 5. Ik differentieer deze functie met de quotiëntregel:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{x\cdot(4x-5) - (2x^2-5x+4)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-4}{x^2}$$

Op de plaats van het minimum is deze afgeleide nul:

$$\frac{2x^2-4}{x^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2x^2 - 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = 2 \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt{2}$$

De minimale waarde is dus $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 5$

Opgave 6.

a) Quotiëntregel $\quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dx}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

b) Kettingregel $\quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dx}\,(1+3x)^5 = 5(1+3x)^4\cdot 3 = 15(1+3x)^4$

c) Kettingregel $\quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dx}\,\ln(1+\cos^2 x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) = \frac{-\sin 2x}{1+\cos^2 x}$

Opgave 7. Ik pas de kettingregel toe met $s = \sqrt{u}$ en $u = t^3 + t^2$:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(3t^2+2t) = \frac{3t^2+2t}{2\sqrt{t^3+t^2}} = \frac{3t+2}{2\sqrt{t+1}}$$

9. Tien toetsen

Je krijgt steeds twaalf meerkeuzevragen voorgeschoteld, met 30 minuten als maximale rekentijd. Gebruik alleen pen en papier, en omcirkel het correcte antwoord. Mocht je twaalf goede oplossingen produceren, dan ben je geslaagd en mag je de resterende toetsen skippen

Toets 1

1. Het getal $(-1)^{-5}$ is gelijk aan

   a. 1 b. -1 c. 5 d. -5

2. Je kunt de breuk $\dfrac{x}{\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x}}$ vereenvoudigen tot

   a. $\dfrac{12}{x}$ b. 12 c. $12x$ d. $12x^2$

3. Is $\sqrt{x^2+9}$ hetzelfde als $|x|+3$?

   a. nooit b. altijd c. zelden d. meestal

4. Is $\dfrac{1}{x+3}$ hetzelfde als $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}$?

   a. nooit b. altijd c. zelden d. meestal

5. Het product $p^3 \cdot p^5$ is gelijk aan

   a. p^8 b. p^{15} c. $3p^5$ d. $5p^3$

6. Het getal $\ln 2 + \ln 3$ is gelijk aan

   a. $\ln 5$ b. $\ln 6$ c. $\ln 8$ d. $\ln 9$

7. Welk van de punten $(3,5)$ en $(4,4)$ ligt binnen de cirkel $x^2+y^2=35$?

   a. alleen $(3,5)$ b. alleen $(4,4)$ c. allebei d. geen van beide

8. Hoeveel zijden heeft een vierhoek?

   a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}$ b. $\sqrt{5}+\sqrt{11}$ c. $2^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$ d. $8^{-\frac{2}{3}}$

9. Het quotiënt $\dfrac{\sin 6}{\sin 3}$ is gelijk aan

   a. $\sin 2$ b. $\sin 3$ c. $\cos 2$ d. $2\cos 3$

10. Wat is meer, e^2 of $9^{\frac{1}{\ln 3}}$?

    a. e^2 b. $9^{\frac{1}{\ln 3}}$ c. evenveel d. geen flauw idee

11. Uit $x=\dfrac{1+3y}{1+y}$ volgt $y=$

    a. $\dfrac{3-x}{1-x}$ b. $\dfrac{1-x}{x-3}$ c. $\dfrac{3-x}{x-1}$ d. $\dfrac{1-x}{3-x}$

12. Het getal $\sqrt{1+\sin 6}$ is gelijk aan

    a. $\sin 3+\cos 3$ b. $1+\sin 3$ c. $\sin 3$ d. $-\sin 3-\cos 3$

Antwoorden Toets 1

1b, 2d, 3c, 4a, 5a, 6b, 7c, 8a, 9d, 10c, 11b, 12d

Bestudeer de onderstaande toelichting bij de vragen die je fout hebt gegokt:

1. Met x^{-5} bedoelt men $\frac{1}{x^5}$, en x^5 betekent $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

$$(-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = \frac{1}{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

2. Eerst even de noemer vereenvoudigen, dan zie je het wel:

$$\frac{x}{\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x}} = \frac{x}{\frac{4}{12x} - \frac{3}{12x}} = \frac{x}{\frac{1}{12x}} = x \cdot 12x = 12x^2$$

3. Dit klopt alleen voor $x = 0$, kijk maar:

$$\sqrt{x^2+9} = |x| + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 9 = (|x|+3)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 9 = x^2 + 6|x| + 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

4. Vermenigvuldig de vergelijking $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}$ maar eens links en rechts met $3x(x+3)$:

$$3x = 3(x+3) + x(x+3) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 3x + 9 = 0 \text{ en deze kwadratische vergelijking is onoplosbaar}$$

5. Als je drie poesjes naast vijf poesjes zet, staan er acht poesjes naast elkaar:

$$p^3 \cdot p^5 = (p \cdot p \cdot p) \cdot (p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p) = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p^8$$

6. Volgens de rekenregel $\ln p + \ln q = \ln pq$ is

$$\ln 2 + \ln 3 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 6$$

7. Beide punten liggen op afstand $< \sqrt{35}$ van $(0,0)$ en dus binnen de cirkel, want

$$3^2 + 5^2 < 35 \text{ en } 4^2 + 4^2 < 35$$

8. Een vierhoek heeft vier zijden, en

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{32} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2 = 4$$

9. Dankzij de formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ is dit een makkie:

$$\frac{\sin 6}{\sin 3} = \frac{2 \sin 3 \cos 3}{\sin 3} = 2 \cos 3$$

10. Ik gebruik de populaire formules $p^q = e^{q \ln p}$ en $\ln x^a = a \ln x$:

$$9^{\frac{1}{\ln 3}} = e^{\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln 9} = e^{\frac{1}{\ln 3} \cdot 2 \ln 3} = e^2$$

11. Uit $x = \dfrac{1+3y}{1+y}$ volgt $x(1+y) = 1 + 3y$ en dus

$$x + xy = 1 + 3y \quad \Longrightarrow \quad xy - 3y = 1 - x \quad \Longrightarrow \quad y(x-3) = 1 - x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1-x}{x-3}$$

12. Vervang het getal 1 door $\sin^2 3 + \cos^2 3$ en schrijf $\sin 6$ als $2 \sin 3 \cos 3$:

$$\sqrt{1 + \sin 6} = \sqrt{\sin^2 3 + 2 \sin 3 \cos 3 + \cos^2 3} = \sqrt{(\sin 3 + \cos 3)^2} = |\sin 3 + \cos 3| = -(\sin 3 + \cos 3)$$

Toets 2

1. Je kunt $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ schrijven als

   a. $\dfrac{1}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ b. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ c. $\sqrt{6}-\sqrt{7}$ d. $\sqrt{6}+\sqrt{7}$

2. De ongelijkheid $|x| > x$ geldt

   a. altijd b. nooit c. voor positieve x d. voor negatieve x

3. Welk getal x voldoet aan $8^{-x} = 2^{x+1}$?

   a. $\dfrac{1}{4}$ b. $\dfrac{1}{2}$ c. $-\dfrac{1}{4}$ d. $-\dfrac{1}{2}$

4. De uitdrukking $\dfrac{x^2+3}{x^{-2}} - \dfrac{1}{x^{-4}}$ kan versimpeld worden tot

   a. 3 b. $3x^2$ c. $\dfrac{x^2+2}{x^2}$ d. x

5. Als $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ dan is $\tan x$ gelijk aan

   a. $\dfrac{1}{2}$ b. 2 c. $\dfrac{1}{2}$ of $-\dfrac{1}{2}$ d. 2 of -2

6. Voor alle reële getallen x is het getal $\left(x^2+6x+10\right)^{-3}$

   a. negatief b. ≤ 1 c. ≥ 1 d. ≥ 1000

7. De uitdrukking $\dfrac{1}{5+t} - \dfrac{1}{5-t}$ is gelijk aan

   a. $\dfrac{2t}{t^2-25}$ b. $\dfrac{2t}{25-t^2}$ c. $\dfrac{1}{2t}$ d. $\dfrac{1}{10}$

8. De 1e helft van de afstand rende ik 15 km/u, de 2e helft 10 km/u. Mijn gemiddelde snelheid was

   a. 11 km/u b. 12 km/u c. 13 km/u d. 14 km/u

9. Het quotiënt $\dfrac{\sin 20}{\cos 10}$ is gelijk aan

   a. $\tan 2$ b. $\tan 20$ c. $2\sin 10$ d. $2\cos 10$

10. Enig idee hoeveel $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$ is?

    a. $\dfrac{1}{7}$ b. 0.5833 c. $\dfrac{5}{12}$ d. $\dfrac{7}{12}$

11. En hoeveel is $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ volgens jou?

    a. $\sqrt{6}$ b. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt{4}$ d. $\sqrt{3}$

12. Het getal $\left(\sin^2 2 + \tan^2 2 + \cos^2 2\right)^{-\frac{1}{2}}$ is gelijk aan

    a. $\sin 2$ b. $\cos 2$ c. $\tan 2$ d. $-\cos 2$

Antwoorden Toets 2

1d, 2d, 3c, 4b, 5c, 6b, 7a, 8b, 9c, 10d, 11b, 12d

1. Ik vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{7}+\sqrt{6}$:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1}$$

2. Voor getallen $x \geq 0$ betekent $|x|$ hetzelfde als x, maar voor getallen $x < 0$ is $|x|$ echt groter dan x

3. Wegens $8 = 2^3$ kun je 8^{-x} schrijven als 2^{-3x}, waarna de rest vanzelf gaat:

$$8^{-x} = 2^{x+1} \quad \Longrightarrow \quad 2^{-3x} = 2^{x+1} \quad \Longrightarrow \quad -3x = x+1 \quad \Longrightarrow \quad -4x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$$

4. Delen door x^{-2} is hetzelfde als vermenigvuldigen met x^2, dus

$$\frac{x^2+3}{x^{-2}} - \frac{1}{x^{-4}} = x^2\left(x^2+3\right) - x^4 = x^4+3x^2-x^4 = 3x^2$$

5. Uit $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ volgt

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Longrightarrow \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{1}{2}$$

6. Je kunt $x^2+6x+10$ schrijven als een kwadraat plus één, en gebruiken dat kwadraten ≥ 0 zijn:

$$\left(x^2+6x+10\right)^{-3} = \frac{1}{\left(x^2+6x+10\right)^3} = \frac{1}{\left((x+3)^2+1\right)^3} \leq \frac{1}{(0+1)^3} = 1$$

7. Ik breng dit zootje onder één noemer:

$$\frac{1}{5+t} - \frac{1}{5-t} = \frac{5-t}{(5+t)(5-t)} - \frac{5+t}{(5+t)(5-t)} = \frac{(5-t)-(5+t)}{(5+t)(5-t)} = \frac{-2t}{25-t^2} = \frac{2t}{t^2-25}$$

8. De eerste helft (zeg A km) duurde $\frac{A}{15}$ uur, de tweede helft duurde wat langer: $\frac{A}{10}$ uur. Dus

$$\text{gemiddelde snelheid} = \frac{\text{totale afstand}}{\text{totale tijdsduur}} = \frac{2A}{\frac{A}{15}+\frac{A}{10}} = \frac{2}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = \frac{2}{\frac{2}{30}+\frac{3}{30}} = \frac{2}{\frac{5}{30}} = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12 \text{ km/u}$$

9. De formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ maakt inmiddels hopelijk deel uit van jouw repertoire:

$$\frac{\sin 20}{\cos 10} = \frac{2\sin 10\cos 10}{\cos 10} = 2\sin 10$$

10. Schrijf alles met noemer 12, dan zie je het juiste antwoord plotseling voor je geest opdoemen:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

11. Nou begint het toch echt wel simpel te worden, ik hoop maar dat je je niet beledigd voelt...

$$\sqrt{8}-\sqrt{2} = \sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

12. Met dank aan de formules $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (hst 6 opg 8) vind ik

$$\left(\sin^2 2+\tan^2 2+\cos^2 2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\tan^2 2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\cos^2 2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos^2 2} = |\cos 2| = -\cos 2$$

Toets 3

1. Het getal $\cos^4 3 - \sin^4 3$ is gelijk aan

   a. $\sin 6$ b. $\cos 6$ c. $\tan 6$ d. $\ln 6$

2. Je kunt $\dfrac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ vereenvoudigen tot

   a. a^2+b^2 b. $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ c. ab d. $\dfrac{1}{ab}$

3. In tien seconden rende ik 25 meter, mijn gemiddelde snelheid was

   a. 9 km/u b. 12 km/u c. 15 km/u d. 18 km/u

4. Als $x = \dfrac{3}{4}$ en $y = \dfrac{6}{7}$ dan is $\dfrac{x}{y}$ gelijk aan

   a. $\dfrac{5}{6}$ b. $\dfrac{7}{8}$ c. $\dfrac{9}{10}$ d. $\dfrac{11}{12}$

5. De maximale waarde van $x - x^2$ is

   a. $\dfrac{1}{2}$ b. $\dfrac{1}{3}$ c. $\dfrac{1}{4}$ d. $\dfrac{1}{5}$

6. Als $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ dan is de absolute waarde van $\tan\alpha$ gelijk aan

   a. 4.25 b. 0.375 c. 2.4 d. 1.75

7. Hoeveel reële getallen x voldoen aan $|x-3| = 5$?

   a. geen b. een c. twee d. drie

8. De straal van de cirkel $x^2+y^2 = x$ is

   a. $\sqrt{x}$ b. 1 c. $\dfrac{1}{2}$ d. $\dfrac{1}{4}$

9. Het getal $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ is gelijk aan

   a. 0.3 b. 0.5 c. 0.7 d. 0.9

10. Het quotiënt $\dfrac{\ln 8}{\ln 2}$ kan vereenvoudigd worden tot

    a. $\ln 4$ b. $\ln 6$ c. 4 d. 3

11. Als je het product $e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot e^{4x}$ korter wilt noteren, dan doe je dat zo:

    a. e^{9x} b. e^{24x} c. e^{9x^3} d. e^{24x^3}

12. Het getal $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ is exact gelijk aan

    a. $2-\sqrt{2}$ b. $\sqrt{2}-1$ c. $1+\sqrt{2}$ d. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Antwoorden Toets 3

1b, 2c, 3a, 4b, 5c, 6c, 7c, 8c, 9c, 10d, 11a, 12b

1. Pas de formule $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ toe met $p = \cos^2 3$ en $q = \sin^2 3$:
$$\cos^4 3 - \sin^4 3 = (\cos^2 3 + \sin^2 3)(\cos^2 3 - \sin^2 3) = 1 \cdot (\cos^2 3 - \sin^2 3) = \cos 6$$

2. Eerst de noemer uitwerken, daarna zie je het wel:
$$\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}} = \frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1}{\frac{1}{ab}} = ab$$

3. Een uur is 3600 seconden, dus
$$0.025 \text{ km in } 10 \text{ sec} \quad\Longrightarrow\quad 0.025 \cdot 360 \text{ km in } 1 \text{ uur} \quad\Longrightarrow\quad 9 \text{ km/u}$$

4. Delen door $\dfrac{6}{7}$ is hetzelfde als vermenigvuldigen met $\dfrac{7}{6}$:
$$\frac{x}{y} = \frac{3/4}{6/7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{7}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}$$

5. Dat zie je het gemakkelijkst als je eerst even een kwadraat afsplitst:
$$x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

6. Uit het gegeven $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ volgt
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13} \quad\Longrightarrow\quad |\tan\alpha| = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5} = 2.4$$

7. Dat geldt alleen voor de getallen 8 en -2, want
$$|x-3| = 5 \quad\Longleftrightarrow\quad x - 3 = \pm 5 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 3 \pm 5$$

8. De vergelijking van deze cirkel schrijf je via kwadraat afsplitsen als
$$x^2 - x + y^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

9. Eerst de teller en noemer apart uitwerken:
$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{7}{12}\cdot 12}{\frac{5}{6}\cdot 12} = \frac{7}{10}$$

10. Met behulp van de rekenregel $\ln a^p = p \ln a$ vind ik
$$\frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln 2^3}{\ln 2} = \frac{3\ln 2}{\ln 2} = 3$$

11. Ik gebruik het rekenregeltje $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$:
$$e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot e^{4x} = e^{2x+3x+4x} = e^{9x}$$

12. Ik controleer dat met de formule $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Toets 4

1. Uit $A = B^{-\frac{3}{2}}$ volgt $B =$

   a. $A^{\frac{3}{2}}$ b. $A^{\frac{2}{3}}$ c. $A^{-\frac{3}{2}}$ d. $A^{-\frac{2}{3}}$

2. Als $x^2 + y^2 = 50$ en $x + y = 8$, dan is $x =$

   a. 1 b. 7 c. 1 of 7 d. 17

3. Je kunt $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ schrijven als

   a. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ b. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ c. $\sqrt{y}-\sqrt{x}$ d. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

4. Als $\dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a}$ dan is x gelijk aan

   a. $12a$ b. $9a$ c. $4a$ d. $2a$

5. Het getal $3^{-\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}$ is gelijk aan

   a. 3 b. $\sqrt{3}$ c. 9 d. 1

6. Voor hoeveel hoeken α tussen 0 en 90 graden geldt $\sqrt{1+\sin 2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$?

   a. geen b. één c. twee d. héél veel

7. Hoeveel reële getallen x voldoen aan $|x+1| = |x+3|$?

   a. geen b. één c. twee d. héél veel

8. De afgeleide van $\dfrac{x-1}{x}$ is

   a. 1 b. -1 c. $\dfrac{1}{x^2}$ d. $-\dfrac{1}{x^2}$

9. Als $w = e^{-t\ln 4}$, dan $\sqrt{w} =$

   a. 2^t b. 2^{-t} c. t^2 d. t^{-2}

10. Voor welk reeel getal x is $\dfrac{(x+2)^3-8}{x}$ minimaal?

    a. 0 b. 3 c. -3 d. $-\sqrt[3]{3}$

11. Als $A + 3B = 10$ en $3A + 2B = 23$ dan $B =$

    a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

12. Je kunt $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)$ vereenvoudigen tot

    a. $\cos t$ b. $\sin t$ c. $-\cos t$ d. $-\sin t$

Antwoorden Toets 4

1d, 2c, 3b, 4c, 5a, 6d, 7b, 8c, 9b, 10c, 11a, 12d

1. Volgens de rekenregel $(B^p)^q = B^{pq}$ is

$$A = B^{-\frac{3}{2}} \quad \Longrightarrow \quad B = B^1 = B^{(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{2}{3})} = \left(B^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = A^{-\frac{2}{3}}$$

2. Je moet $y = 8 - x$ invullen in $x^2 + y^2 = 50$:

$$x^2 + (8-x)^2 = 50 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 16x + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x-7) = 0$$

3. Gebruik bijvoorbeeld de formule $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$:

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

4. Uit $\dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a}$ volgt

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{3}{2a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{6} = \frac{2a}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = 4a$$

5. Gebruik de rekenregeltjes $(x^y)^z = x^{yz}$ en $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$:

$$3^{-\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 3^1 = 3$$

6. Dat geldt voor alle hoeken α want

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

7. Alleen het getal $x = -2$ voldoet hieraan, want

$$|x+1| = |x+3| \quad \Longrightarrow \quad x+1 = \pm(x+3) \quad \Longrightarrow \quad x+1 = -(x+3) \quad \Longrightarrow \quad 2x = -4 \quad \Longrightarrow \quad x = -2$$

8. Dat kan met de quotiëntregel, maar het kan ook eenvoudiger:

$$\frac{d}{dx}\frac{x-1}{x} = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$$

9. Ik gebruik bekende rekenregeltjes zoals $\ln(x^a) = a\ln x$ en $a^b = e^{b\ln a}$:

$$w = e^{-t\ln 4} = e^{-2t\ln 2} = 2^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{w} = w^{\frac{1}{2}} = \left(2^{-2t}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\left(-2t\cdot\frac{1}{2}\right)} = 2^{-t}$$

10. $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)(x^2+4x+4) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ en dus

$$\frac{(x+2)^3 - 8}{x} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x} = x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3$$

11. Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 3, en trek er de tweede vergelijking van af:

$$\boxed{3A + 9B = 30} - \boxed{3A + 2B = 23} \quad \Longrightarrow \quad 7B = 7 \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

12. Volgens de formule $\cos(p+q) = \cos p\cos q - \sin p\sin q$ kan ik dit schrijven als

$$\left(\cos t\cos\frac{\pi}{6} - \sin t\sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(\cos t\cos\frac{\pi}{6} + \sin t\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin t\sin\frac{\pi}{6} = -\sin t$$

Toets 5

1. De punten (x, y) die voldoen aan $\dfrac{x+y+1}{x-3y-1} = 2$ liggen allemaal op de lijn met vergelijking

   a. $x - 7y = 3$ b. $7x - y = 3$ c. $x - 3y = 7$ d. $3x - y = 7$

2. Om 11.50 uur is de hoek tussen de grote en de kleine wijzer

   a. 54 graden b. 55 graden c. 56 graden d. 57 graden

3. Voor positieve reële getallen t is $e^{-\frac{\ln t}{2}}$ hetzelfde als

   a. $\sqrt{t}$ b. $-\sqrt{t}$ c. $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ d. $-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

4. Uit $\alpha + \beta^2 = 10$ en $3\alpha - 5\beta^2 = 6$ volgt $\alpha =$

   a. 1 b. 3 c. 5 d. 7

5. Je kunt $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}\right)^{-1}$ vereenvoudigen tot

   a. $x^2 - x$ b. $x - x^2$ c. $x^2 - 1$ d. $1 - x^2$

6. Welke van de volgende beweringen klopt als $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ en $\mu = 3 + \sqrt{8}$?

   a. $\lambda = \mu^2$ b. $\lambda = \sqrt{\mu}$ c. $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ d. $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$

7. Volgens jou is $\sin\left(A + \dfrac{\pi}{2}\right)$ gelijk aan

   a. $\cos A$ b. $\sin A$ c. $-\cos A$ d. $-\sin A$

8. Welke afstand ren ik in 20 seconden bij snelheid 9 km/u?

   a. 30 meter b. 40 meter c. 50 meter d. 60 meter

9. Je kunt $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ herleiden tot

   a. $x^2 - 9$ b. $x^2 + 9$ c. $x^2 + 3x + 9$ d. $x^2 - 3x + 9$

10. Hoeveel reële oplossingen x heeft de vergelijking $e^{2x} + e^x = 12$?

    a. nul b. een c. twee d. drie

11. Als $A = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$ dan is $A^{-\frac{1}{2}} =$

    a. $\cos x$ b. $\sin x$ c. $|\cos x|$ d. $|\sin x|$

12. Raad eens welk van de volgende getallen het dichtst bij $\dfrac{\ln 2.5 + \ln 0.4}{\ln 1.3 + \ln 1.7}$ ligt:

    a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

Antwoorden Toets 5

1a, 2b, 3c, 4d, 5b, 6b, 7a, 8c, 9c, 10b, 11d, 12a

1. Voor die punten geldt $x + y + 1 = 2(x - 3y - 1)$ en dus

$$x + y + 1 = 2x - 6y - 2 \quad \Longrightarrow \quad -x + 7y + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 = x - 7y$$

2. De hoek tussen opeenvolgende cijfers is $\frac{360}{12} = 30$ graden, de gevraagde hoek is dus

$$30 + \frac{5}{6} \cdot 30 = 55 \text{ graden}$$

3. Wegens $a \ln t = \ln t^a$ geldt

$$e^{-\frac{\ln t}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\ln t} = e^{\ln\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)} = t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

4. Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 5, en tel er de tweede vergelijking bij op:

$$\boxed{5\alpha + 5\beta^2 = 50} + \boxed{3\alpha - 5\beta^2 = 6} \quad \Longrightarrow \quad 8\alpha = 56 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 7$$

5. Breng eerst $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$ onder één noemer:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)^{-1} = \left(\frac{1-x}{x(1-x)} + \frac{x}{x(1-x)}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^{-1} = x(1-x) = x - x^2$$

6. $\lambda = \sqrt{\mu}$ want

$$\lambda^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8} = \mu$$

7. Je ziet dat aan de grafieken van sin en cos, of aan de formule $\sin(p+q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q$:

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \sin A \cos\frac{\pi}{2} + \cos A \sin\frac{\pi}{2} = \cos A$$

8. Mijn looptijd is 20 sec $= \frac{1}{180}$ uur, de afstand is dus

$$\text{afstand} = \frac{1}{180} \cdot 9 \text{ km} = 50 \text{ meter}$$

9. Antwoord c is correct, want

$$(x-3)(x^2+3x+9) = x(x^2+3x+9) - 3(x^2+3x+9) = x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27 = x^3 - 27$$

10. Deze kwadratische vergelijking in e^x kun je oplossen met de abc-formule of via ontbinding:

$$e^{2x} + e^x - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^x - 3)(e^x + 4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln 3$$

11. Ik schrijf eerst A wat eenvoudiger:

$$A = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \Longrightarrow \quad A^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

12. Volgens de rekenregel $\ln p + \ln q = \ln pq$ is de teller $\ln 2.5 + \ln 0.4 = \ln(2.5 \cdot 0.4) = \ln 1 = 0$

Toets 6

1. De omtrek van een cirkel met oppervlakte 5 is

   a. $2\sqrt{5}$ b. $2\pi\sqrt{5}$ c. 10π d. $2\sqrt{5\pi}$

2. Als $\sin x = 0.6$ dan $|\tan x| =$

   a. 0.65 b. 0.75 c. 0.85 d. 0.95

3. Welk getal is groter, $2^{\ln 9}$ of $3^{\ln 4}$?

   a. $2^{\ln 9}$ b. $3^{\ln 4}$ c. even groot d. niet zonder GR

4. Uit de gegevens $\dfrac{\alpha+1}{\beta+1} = 3$ en $\dfrac{\alpha+3}{\beta+3} = 2$ volgt

   a. $\beta = 1$ b. $\beta = 2$ c. $\beta = 3$ d. $\beta = 4$

5. Ik loop 100 meter met snelheid v en daarna nog 50 meter met snelheid w. Gemiddelde snelheid:

   a. $\dfrac{2v+w}{3}$ b. $\dfrac{3}{2v+w}$ c. $\dfrac{v+2w}{3}$ d. $\dfrac{3vw}{2w+v}$

6. Uit $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{1-a}$ volgt $x =$

   a. $a - a^2$ b. 1 c. $a^2 - a$ d. -1

7. Het getal $3 \cdot \left(3^{-1/2}\right)^3$ is gelijk aan

   a. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ b. $\sqrt{3}$ c. $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ d. $3\sqrt{3}$

8. Hoeveel reële oplossingen x heeft de vergelijking $2^x = 4^x + \dfrac{1}{4}$?

   a. nul b. een c. twee d. drie

9. De grootste waarde van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 12x + 13}$ is

   a. 1.0 b. 0.8 c. 0.6 d. 0.4

10. Het kwadraat van $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ is

    a. 5 b. $\sqrt{24}$ c. $5 + \sqrt{24}$ d. $\sqrt{13}$

11. $\cos(\pi - x)$ is hetzelfde als

    a. $\cos x$ b. $-\cos x$ c. $\sin x$ d. $-\sin x$

12. Als geluk $= \dfrac{1}{1+\text{geld}}$ en moraal $= \dfrac{1}{1-\text{geluk}}$ dan moraal $=$

    a. $1 + \dfrac{1}{\text{geld}}$ b. $1 - \dfrac{1}{\text{geld}}$ c. 1 d. $\dfrac{1}{\text{geld}}$

Antwoorden Toets 6

1d, 2b, 3c, 4a, 5d, 6a, 7a, 8b, 9a, 10c, 11b, 12a

1. Een cirkel met straal r heeft oppervlakte πr^2 en omtrek $2\pi r$, dus

$$\pi r^2 = 5 \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \quad\Longrightarrow\quad \text{omtrek} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{\pi}} = 2\sqrt{5\pi}$$

2. Ik gebruik de formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$|\tan x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \frac{0.6}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{0.6}{\sqrt{0.64}} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

3. Volgens de bekende formules $a^b = e^{b\ln a}$ en $\ln p^q = q\ln p$ geldt

$$2^{\ln 9} = e^{(\ln 9)(\ln 2)} = e^{2(\ln 3)(\ln 2)} \quad \text{en} \quad 3^{\ln 4} = e^{(\ln 4)(\ln 3)} = e^{2(\ln 2)(\ln 3)}$$

4. Uit de 1e vergelijking volgt $\alpha + 1 = 3(\beta + 1)$ en dus $\alpha = 3\beta + 2$. Dit vul ik in de 2e vergelijking in:

$$\frac{(3\beta+2)+3}{\beta+3} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{3\beta+5}{\beta+3} = 2 \quad\Longrightarrow\quad 3\beta+5 = 2(\beta+3) \quad\Longrightarrow\quad \beta = 1$$

5. Ik bereken eerst de totale tijdsduur die nodig was voor die 150 meter:

$$\text{totaaltijd} = \frac{100}{v} + \frac{50}{w} \quad\Longrightarrow\quad \text{gem snelheid} = \frac{150}{\frac{100}{v}+\frac{50}{w}} = \frac{3}{\frac{2}{v}+\frac{1}{w}} = \frac{3vw}{2w+v}$$

6. Ik breng het rechterlid van deze vergelijking eerst even onder één noemer:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{a(1-a)} + \frac{a}{a(1-a)} = \frac{1-a+a}{a(1-a)} = \frac{1}{a(1-a)} \quad\Longrightarrow\quad x = a(1-a) = a - a^2$$

7. Je kunt $\left(a^b\right)^c$ schrijven als a^{bc}, en dus

$$3\cdot\left(3^{-1/2}\right)^3 = 3\cdot 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{1-\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

8. Heb je in $4^x - 2^x + \dfrac{1}{4} = 0$ een kwadratische vergelijking in 2^x herkend?

$$(2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2^x = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x = -1$$

9. Je kunt bijvoorbeeld in de noemer een kwadraat afsplitsen:

$$\frac{1}{3x^2-12x+13} = \frac{1}{3(x^2-4x+4)+1} = \frac{1}{3(x-2)^2+1} \quad\Longrightarrow\quad \text{maximum} = \frac{1}{0+1} = 1$$

10. Ik gebruik de formule $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + \sqrt{24}$$

11. Als je geen zin hebt om hierover na te denken, doe je het met $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$:

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos(-x) - \sin\pi\sin(-x) = -1\cdot\cos x - 0\cdot(-\sin x) = -\cos x$$

12. Kwestie van invullen:

$$\text{moraal} = \frac{1}{1-\text{geluk}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\text{geld}}} = \frac{1+\text{geld}}{1+\text{geld}-1} = \frac{1+\text{geld}}{\text{geld}} = \frac{1}{\text{geld}} + 1$$

Toets 7

1. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijden a is

   a. a^2 b. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ c. $a^2\sqrt{3}$ d. $\frac{1}{4}a^2$

2. De afgeleide van $\dfrac{3x-2}{x^2}$ is

   a. $\dfrac{-3x+4}{x^3}$ b. $\dfrac{3}{2x}$ c. $\dfrac{-3x-4}{x^3}$ d. $\dfrac{3x-4}{x^3}$

3. Kan x groter zijn dan $1+x^2$?

   a. ja b. nee c. misschien d. tuurlijk

4. $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ is de afgeleide van

   a. $3x\ln\sqrt{x}$ b. $\frac{3}{2}\ln\sqrt{x}$ c. $-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ d. $3\sqrt{x}$

5. Hoe groot is de kans op totaalscore 9 bij een worp met twee dobbelstenen?

   a. $\frac{1}{7}$ b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{1}{9}$ d. $\frac{1}{10}$

6. De afgeleide van de afgeleide van $\sqrt{x}$ is

   a. $-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ b. $4\,x^{-\frac{3}{2}}$ c. $\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ d. $\frac{4}{15}\,x^{\frac{5}{2}}$

7. Hoeveel seconden doe ik over 1 km als ik 120 km/u rijd?

   a. ruim 20 b. ongeveer 25 c. exact 30 d. bijna 35

8. Van welke van de volgende functies is $\sin 2x$ niet de afgeleide?

   a. $\sin^2 x$ b. $-\cos^2 x$ c. $-\frac{1}{2}\cos 2x$ d. $\sin x^2$

9. Van een 0.75 liter fles whisky drink ik 60% op, en morgen 60% van de rest. Hoeveel blijft er over?

   a. 0.12 liter b. 0.16 liter c. 0.20 liter d. 0.24 liter

10. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ is de afgeleide van

    a. $\dfrac{1}{1+x}$ b. $\dfrac{x}{1+x}$ c. $\dfrac{2}{1+x}$ d. $\dfrac{-2}{1+x}$

11. Je kunt $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ vereenvoudigen tot

    a. $1-\sqrt{x}$ b. $\sqrt{x}$ c. 1 d. $1+\sqrt{x}$

12. De afgeleide van $f(x)=\sqrt[3]{2+3x}$ in $x=2$ is

    a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{4}{3}$ d. 4

Antwoorden Toets 7

1b, 2a, 3b, 4d, 5c, 6a, 7c, 8d, 9a, 10b, 11d, 12b

1. De basis is a en de hoogte is $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, de oppervlakte is dus

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

2. Volgens de quotiëntregel is

$$\frac{d}{dx}\frac{3x-2}{x^2} = \frac{3x^2 - 2x(3x-2)}{x^4} = \frac{-3x^2+4x}{x^4} = \frac{-3x+4}{x^3}$$

3. De vraag komt neer op: kan $1 + x^2 - x$ negatief zijn? Dat kan niet, want

$$1 + x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

4. De afgeleide van $3\sqrt{x}$ is $\displaystyle\frac{d}{dx}3\sqrt{x} = 3 \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

5. Die kans is $\displaystyle\frac{4}{36}$ want van de 36 mogelijke uitkomstparen zijn er vier met totaalscore 9:

$$(3,6) \qquad (4,5) \qquad (5,4) \qquad (6,3)$$

6. De afgeleide van $x^{\frac{1}{2}}$ is $\displaystyle\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ en als je dit nogmaals differentieert krijg je

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

7. De benodigde tijd voor 1 km is

$$\frac{1}{120} \text{ uur} = \frac{1}{120} \cdot 3600 \text{ sec} = 30 \text{ sec}$$

8. De eerste drie leveren als afgeleide inderdaad $\sin 2x$ maar de laatste niet:

$$\frac{d}{dx}\sin x^2 = (\cos x^2) \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

9. Er blijft 40% van 40% van 0.75 liter whisky over, en dat is

$$0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.75 = 0.4 \cdot 0.30 = 0.12 \text{ liter}$$

10. Misschien zocht je even naar $\displaystyle\frac{-1}{1+x}$ bij de keuzemogelijkheden, maar ook $\displaystyle\frac{x}{1+x}$ doet het:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{1+x} = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

11. Dat kan bijvoorbeeld door de formule $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ toe te passen met $p = 1$ en $q = \sqrt{x}$:

$$1 - x = (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$$

12. Volgens de kettingregel is

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{2+3x} = \frac{1}{3}(2+3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = (2+3x)^{-\frac{2}{3}} \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{d}{dx}\sqrt[3]{2+3x}\right]_{x=2} = 8^{-\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Toets 8

1. Hoeveel procent alcohol bevat een mix van $\frac{4}{7}$ bier (5%) en $\frac{3}{7}$ wijn (12%)?

   a. 7% b. 8% c. 9% d. 10%

2. De richtingscoëfficiënt van de lijn $3x + 2y = 7$ is

   a. $\dfrac{2}{3}$ b. $\dfrac{3}{2}$ c. $-\dfrac{2}{3}$ d. $-\dfrac{3}{2}$

3. Het middelpunt van de cirkel $x^2 + y^2 = 2y - 4x$ is

   a. $(2, 1)$ b. $(1, 2)$ c. $(-2, 1)$ d. $(-1, 2)$

4. Als $4^x = 7$ dan $8^x =$

   a. $7\sqrt{7}$ b. $2\sqrt{2}$ c. $2\sqrt{7}$ d. $7\sqrt{2}$

5. De afgeleide van $y = \dfrac{1}{2x-1}$ in $x = 1$ is

   a. 1 b. -1 c. 2 d. -2

6. De afstand van $(-2, 7)$ tot $(3, -5)$ is

   a. 11 b. 13 c. 15 d. 17

7. Het aantal reëele oplossingen van de vergelijking $x = 1 + \sqrt{x}$ is

   a. nul b. een c. twee d. drie

8. Voor de functie $f(t) = A^t + B$ geldt $f(1) = 10$ en $f(2) = 16$. Wat is $f(3)$?

   a. 4 b. 34 c. 4 of 34 d. 26

9. De weerstand R van een parallelschakeling voldoet aan $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ en dus $R =$

   a. $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ b. $\dfrac{1}{R_1 + R_2}$ c. $R_1 + R_2$ d. $\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

10. Uit $2^y = 3x$ volgt $\dfrac{dy}{dx} =$

    a. $\dfrac{1}{x \ln 2}$ b. $\dfrac{1}{x \ln 3}$ c. $\dfrac{3}{x \ln 2}$ d. $\dfrac{2}{x \ln 3}$

11. Ligt het punt $(2, 1)$ binnen of buiten de cirkel $x^2 + y^2 = 2x$?

    a. binnen b. buiten c. op de rand d. weet niet

12. Als $2x + 3$ positief is dan is $7 - 3x$

    a. $> \dfrac{5}{2}$ b. $< \dfrac{5}{2}$ c. $> \dfrac{23}{2}$ d. $< \dfrac{23}{2}$

Antwoorden Toets 8

1b, 2d, 3c, 4a, 5d, 6b, 7b, 8c, 9a, 10a, 11b, 12d

1. Ik bereken voor het gemak de alcohol in een mix van 4 liter bier en 3 liter wijn:

$$\text{alcohol} = 4 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.12 = 0.56 \text{ liter} \quad \Longrightarrow \quad \text{alcoholpercentage} = \frac{0.56}{7} \cdot 100\% = 8\%$$

2. De richtingscoëfficiënt is het getal a uit de vergelijking $y = ax + b$:

$$3x + 2y = 7 \quad \Longrightarrow \quad 2y = -3x + 7 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{richtingscoëfficiënt} = -\frac{3}{2}$$

3. De cirkel met middelpunt (a, b) en straal r heeft vergelijking $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$:

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad \text{middelpunt} = (-2, 1)$$

4. Dat vind je bijvoorbeeld zo: $8^x = 4^x \cdot 2^x = 4^x \cdot \sqrt{4^x} = 7 \cdot \sqrt{7}$

5. Ik differentieer $y = (2x-1)^{-1}$ met de kettingregel:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = -2$$

6. Volgens Pythagoras is de afstand van $(-2, 7)$ tot $(3, -5)$

$$\sqrt{(-2-3)^2 + (7-(-5))^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

7. Ik gebruik de abc-formule en bedenk daarbij dat $\sqrt{x}$ niet negatief kan zijn:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

8. Invulling van de gegevens levert twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 10 & \Longrightarrow & A + B = 10 \\ f(2) = 16 & \Longrightarrow & A^2 + B = 16 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - A = 6 \quad \Longrightarrow \quad (A-3)(A+2) = 0$$

   Dus ofwel $A = 3$ (dan is $B = 7$ en $f(3) = 34$) ofwel $A = -2$ (dan is $B = 12$ en $f(3) = 4$)

9. Breng dit onder één noemer: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \quad \Longrightarrow \quad R = \dfrac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$

10. Ik druk eerst y in x uit:

$$2^y = 3x \quad \Longrightarrow \quad \ln 2^y = \ln 3x \quad \Longrightarrow \quad y \ln 2 = \ln 3x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\ln 3x}{\ln 2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 2}$$

11. Schrijf de vergelijking als $(x-1)^2 + y^2 = 1$, je ziet dan dat het middelpunt $(1, 0)$ is en de straal 1. De afstand van $(2, 1)$ tot $(1, 0)$ is $\sqrt{2}$ en dat is groter dan de straal

12. Uit $2x + 3 > 0$ volgt

$$2x > -3 \quad \overset{\cdot\frac{3}{2}}{\Longrightarrow} \quad 3x > -\frac{9}{2} \quad \Longrightarrow \quad -3x < \frac{9}{2} \quad \overset{+7}{\Longrightarrow} \quad 7 - 3x < 7 + \frac{9}{2} = \frac{23}{2}$$

Toets 9

1. Jouw lichaamstemperatuur is 37 graden Celsius, hoeveel graden Fahrenheit is dat?

   a. 95.3 b. 96.4 c. 97.5 d. 98.6

2. Hoeveel majonaise (19% vet) moet ik met 7 cc ketchup (8% vet) vermengen om een dipsausje met 14 procent vet te creëren?

   a. 8.1 cc b. 8.2 cc c. 8.3 cc d. 8.4 cc

3. Als de roltrap stilstaat loop je in 30 sec naar boven. Als de roltrap loopt en je staat zelf stil dan ben je in 60 sec boven. Hoe lang duurt het voor je boven bent als je loopt op de lopende roltrap?

   a. 12 sec b. 16 sec c. 20 sec d. 24 sec

4. Voor een hoek α tussen 0 en 90 graden geldt $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Raad eens wat $\cos\alpha$ dan is:

   a. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt{8}$

5. Het kleinste reële getal x waarvoor $3 \leq x^2 \leq 5$ is

   a. $\sqrt{3}$ b. $\sqrt{5}$ c. $-\sqrt{3}$ d. $-\sqrt{5}$

6. Hoeveel snijpunten heeft de lijn $y = 2x + 3$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 1$?

   a. nul b. een c. twee d. drie

7. De afgeleide van $x^2\sqrt{12x}$ in $x = 3$ is

   a. 45 b. 55 c. 65 d. 75

8. Voor 34 euro koop je 3 poesjes en 8 hondjes, of 5 poesjes en 2 hondjes. Wat kost een poesje?

   a. 3 euro b. 4 euro c. 5 euro d. 6 euro

9. Het getal $\left(\sqrt{2} - 1\right)^{-2}$ is gelijk aan

   a. $3 + 2\sqrt{2}$ b. $2 + 3\sqrt{2}$ c. $3 - 2\sqrt{2}$ d. $2 - 3\sqrt{2}$

10. Een functie van het type $f(t) = \lambda \cdot A^t$ voldoet aan $f(2) = 2$ en $f(3) = 3$. Wat is $f(4)$?

    a. 4.0 b. 4.5 c. 5.0 d. 5.5

11. De raaklijn aan de grafiek van $y = \dfrac{\ln x}{x}$ in het punt $(1, 0)$ heeft vergelijking

    a. $y = x - 1$ b. $y = 2x - 2$ c. $y = 2x - 1$ d. $y = x - 2$

12. De oppervlakte van een driehoek met zijden 3, 3 en 4 is

    a. $\sqrt{17}$ b. $\sqrt{18}$ c. $\sqrt{19}$ d. $\sqrt{20}$

Antwoorden Toets 9

1d, 2d, 3c, 4c, 5d, 6a, 7a, 8d, 9a, 10b, 11a, 12d

1. De omzettingsformule van Celsius naar Fahrenheit is $F = 32 + \frac{9}{5}C$:
$$F = 32 + \frac{9}{5} \cdot 37 = 32 + \frac{333}{5} = \frac{160}{5} + \frac{333}{5} = \frac{493}{5} = 98.6$$

2. Het vetgehalte in een mengsel van x cc majonaise en 7 cc ketchup is
$$\frac{\text{hoeveelheid vet}}{\text{hoeveelheid dipsaus}} = \frac{x \cdot 0.19 + 7 \cdot 0.08}{x+7} = \frac{0.19\,x + 0.56}{x+7}$$
Dit moet 0.14 zijn, dus $0.14\,x + 0.98 = 0.19\,x + 0.56$, dus $0.05\,x = 0.42$ en dus $x = 8.4$

3. Noem de afstand van onder tot boven A meter en bereken de samengestelde snelheid in m/sec:
$$\text{eigen snelheid} + \text{roltrapsnelheid} = \frac{A}{30} + \frac{A}{60} = \frac{3A}{60} = \frac{A}{20} \quad\Longrightarrow\quad \text{tijdsduur} = 20 \text{ sec}$$

4. Uit $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ volgt $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

5. Uit $3 \le x^2 \le 5$ volgt $\sqrt{3} \le |x| \le \sqrt{5}$, dus ofwel $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{5}$ ofwel $-\sqrt{5} \le x \le -\sqrt{3}$

6. Invulling van $y = 2x+3$ in $x^2+y^2 = 1$ moet hierover duidelijkheid verschaffen:
$$x^2 + (2x+3)^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad 5x^2 + 12x + 8 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-160}}{10} \quad\Longrightarrow\quad \text{paniek}$$

7. Ik schrijf $x^2\sqrt{12x}$ eerst even als $2\sqrt{3}\cdot x^{\frac{5}{2}}$:
$$y = 2\sqrt{3}\cdot x^{\frac{5}{2}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{3}\cdot x\sqrt{x} \quad\Longrightarrow\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 45$$

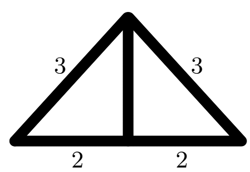
8. Elimineer de hondjes:
$$5p + 2h = 34 \quad\overset{\cdot 4}{\Longrightarrow}\quad \left.\begin{array}{r} 20p + 8h = 136 \\ 3p + 8h = 34 \end{array}\right\} \quad\overset{-}{\Longrightarrow}\quad 17p = 102 \quad\Longrightarrow\quad p = 6$$

9. Ik gebruik de formule $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ en de worteltruc:
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2}$$

10. Uit de gegevens volgt
$$\left.\begin{array}{r} \lambda A^3 = 3 \\ \lambda A^2 = 2 \end{array}\right\} \quad\overset{\text{delen}}{\Longrightarrow}\quad A = \frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{8}{9} \quad\Longrightarrow\quad f(4) = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{9}{2}$$

11. Ik bereken eerst de richtingscoëfficiënt met de quotiëntregel:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \text{raaklijn is } y = x + b \quad\overset{(1,0)}{\Longrightarrow}\quad y = x - 1$$

12. Neem de langste zijde als basis, en bereken de hoogte met Pythagoras:
$$\text{hoogte} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \quad\Longrightarrow\quad \text{oppervlakte} = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$



Toets 10

1. Ik wandel met snelheid 5 km/u, hoeveel m/sec is dat?

   a. 18 b. 25 c. $\frac{18}{25}$ d. $\frac{25}{18}$

2. De uitdrukking $\frac{a^{1/3}}{a^{1/5}}$ is gelijk aan

   a. $\sqrt[3]{a^5}$ b. $\sqrt[15]{a}$ c. $\sqrt[5]{a^3}$ d. $\sqrt[15]{a^2}$

3. Als je $\frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{14}$ vereenvoudigt kom je uit op

   a. $\frac{1}{42}$ b. $\frac{7}{14}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{2}$

4. De uitdrukking $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$ is gelijk aan

   a. $\frac{2x}{2x-2}$ b. $\frac{2x^2}{x^2-1}$ c. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ d. $\frac{2x}{x^2-1}$

5. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking $32x^5 - 18x = 0$?

   a. 3 b. 4 c. 5 d. 1

6. Als $N = A^{1/3}K^{2/3}$, dan is A gelijk aan

   a. $\left(N - K^{2/3}\right)^3$ b. $N^3K^{9/2}$ c. N^3K^{-2} d. $\sqrt[3]{N^3K^2}$

7. Als je $a = -2$ en $b = -1$ substitueert in $-\left(a^2b\right)^3 - 2\left(ab^2\right)^2$ krijg je

   a. 72 b. -72 c. 48 d. 56

8. Je kunt $\sqrt{\frac{3}{5}}$ schrijven als

   a. $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ c. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt{15}$

9. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 16$ is

   a. $\ln 4$ b. $\ln 8$ c. $\frac{(\ln 4)^2}{2}$ d. $\ln 64$

10. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 16} = 0$?

    a. 0 b. 1 c. 2 d. 4

11. Als $\cos\alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ dan is $\sin\alpha$ gelijk aan

    a. $\frac{2}{3}$ b. $-\frac{2}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ of $-\frac{2}{3}$ d. $1 - \frac{1}{3}\sqrt{5}$

12. Het getal $3^{\frac{1}{\ln 3}}$ staat beter bekend onder de naam

    a. π b. e c. 3 d. 1

Antwoorden Toets 10

1d, 2d, 3c, 4b, 5a, 6c, 7d, 8c, 9a, 10a, 11c, 12b

1. 5 km/u is 5000 meter in 3600 sec, dat is $\frac{5000}{3600}$ meter per seconde
2. Ik kom als volgt uit op 2d:
$$\frac{a^{1/3}}{a^{1/5}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{15}-\frac{3}{15}} = a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$$
3. Maak de noemers gelijk en breng alles onder één noemer:
$$\frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{16}{42} - \frac{12}{42} + \frac{3}{42} = \frac{16-12+3}{42} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$$
4. Breng weer alles onder één noemer:
$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x-1)+x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$
5. Natuurlijk is $x=0$ een oplossing, de andere twee oplossingen vind je na deling door x:
$$32x^4 - 18 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
6. Uit $N = A^{1/3}K^{2/3}$ volgt
$$A^{1/3} = \frac{N}{K^{2/3}} = NK^{-2/3} \quad \Longrightarrow \quad A = \left(NK^{-2/3}\right)^3 = N^3K^{-2}$$
7. Nauwkeurig invullen leidt tot antwoord 7d:
$$-\left(a^2b\right)^3 = -(-4)^3 = -(-64) = 64 \quad \text{en} \quad -2\left(ab^2\right)^2 = -2(-2)^2 = -2\cdot 4 = -8$$
8. Dat doe je bijvoorbeeld zo:
$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$$
9. Zet er links en rechts ln voor, dan gaat de rest vanzelf:
$$\ln\left(e^{2x}\right) = \ln 16 \quad \Longrightarrow \quad 2x = \ln 16 = \ln 4^2 = 2\ln 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \ln 4$$
10. De teller is $(x+4)^2$, en die is alleen nul als $x=-4$. Helaas is voor deze waarde van x ook de noemer nul, de vergelijking is dus onoplosbaar
11. Ik gebruik $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \pm\frac{2}{3}$$
12. Ik werk dit getal uit volgens $a^x = e^{x\ln a}$ (dat volgt uit $a^x = e^{\ln(a^x)}$ en $\ln(a^x) = x\ln a$):
$$3^{\frac{1}{\ln 3}} = e^{\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 3} = e^1 = e$$