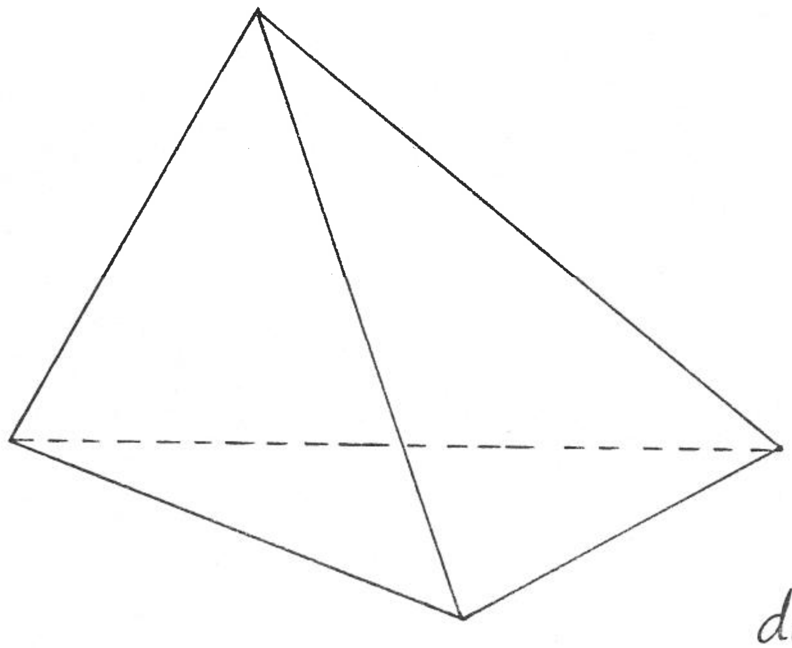
De Pyramide

(analogon van Rubik's Cube.)

MATHEMATISCH INSTITUUT
FACULTEIT DER WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN
KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
TOERNOOIVELD
NIJMEGEN
THE NETHERLANDS

De Pyramide

(analogon van
Rubik's Cube.)



27 januari
1982

doktoraalskriptie
van:

marko van eekelen
en
bernard van houtum

ceterum censemus
cubum esse
delendum.

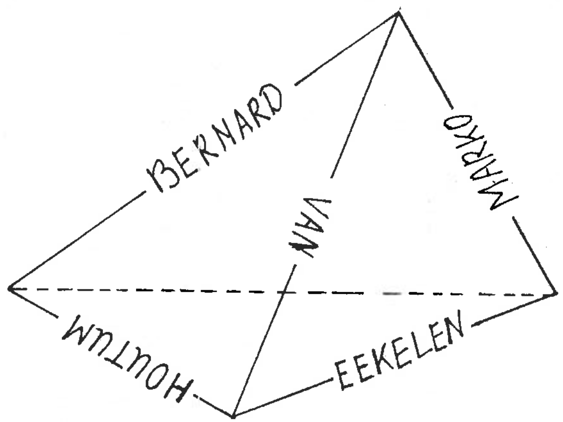
afstudeerdocent: Prof. dr. J. H de Boer.

De Pyramide

analogon

van

Rubik's Cube.



ceterum censemus
cubum
esse delendum

Nijmegen
27 januari
1982

0 INLEIDING.

In deze skriptie zullen wij een analogon behandelen van Rubik's cube: het regelmatig viervlak.
In hoofdstuk 1 wordt beschreven hoe dit eruit ziet. Tevens worden daar namen en begrippen, die we in latere hoofdstukken nodig hebben, ingevoerd.
In hoofdstuk 2 berekenen we het aantal standen dat je kunt krijgen, als je vanuit de beginstand begint te draaien. We bepalen daar welke van de mogelijke standen zeker niet door draaien te bereiken zijn, waarna we in hoofdstuk 3 aantonen dat alle standen die dan nog overblijven, ook inderdaad vanuit de beginstand te bereiken zijn. Tegelijkertijd wordt in dat hoofdstuk een oplossingsmethode gegeven, waarmee de pyramide op te lossen is door met slechts 3 van de 4 vlakken te draaien.
In hoofdstuk 4 worden de zogenaamde onmogelijke standen (dat zijn standen die niet te bereiken zijn door vanuit de beginstand met de vlakken van de pyramide te draaien) ingedeeld in 23 klassen. Dit doen we door een groeps-homomorfisme van de standengroep naar de invariantengroep te maken. In tegenstelling tot de andere hoofdstukken zal hier meer gebruik gemaakt worden van groepen-theoretische begrippen.
In hoofdstuk 5 zijn we een beetje aan het rekenen geslagen. Het resultaat daarvan is een tabel, waarin aangegeven is welke ordes een operatie zoal kan hebben, en hoeveel verschillende standen er zijn met die orde.
In hoofdstuk 6 geven we een afschatting van het minimum aantal keren draaien waarbinnen de pyramide altijd goed te krijgen is. Van enkele faktorgroepen zal deze zogenaamde diameter precies berekend worden.
In hoofdstuk 7 geven we een algorithme die operaties genereert die de ribbeblokjes vastlaten, en die bestaan uit een kombinatie van draaiingen met uitsluitend het R-vlak en het L-vlak.
In hoofdstuk 8, tenslotte, bepalen we de struktuur van de groep die je krijgt als je ook nog kijkt naar draaiingen van de centra van de pyramide. Hierbij maken we gebruik van het feit dat het tetraëder zelf-duaal is.(Bij Rubik's cube zouden we deze struktuur anders moeten bepalen, omdat de kubus duaal is met een regelmatig achtvlak en niet met zichzelf.)

I NOTATIE.

1.0 Inleiding.

Naar analogie van Rubik's cube kan men zich een op soortgelijke manier verdeeld regelmatig viervlak (pyramide) voorstellen. In dit hoofdstuk beginnen we met het beschrijven van deze pyramide waarvan we wat eigenschappen onderzocht hebben. Daarna zal er een notatie ontwikkeld worden, zowel voor het aangeven van operaties als voor het aangeven van standen van de pyramide. Tegelijkertijd zullen er wat namen en begrippen ingevoerd worden.

1.1 Beschrijving.

De pyramide die we onderzocht hebben is een regelmatig viervlak dat bestaat uit 4 + 6 + 4 blokjes en een kern. Er kan met ieder van de vier vlakken gedraaid worden en ook hier veranderen er allerlei "kleurtjes" van plaats. Het grote verschil met Rubik's cube is dat we hier te maken hebben met vier in plaats van zes vlakken.

We hadden deze pyramide in principe ook regelmatig viervlak of tetraëder kunnen noemen. Het verschil tussen pyramide en regelmatig viervlak zit hem in het feit dat je bij een pyramide veronderstelt dat er een speciaal vlak is, namelijk het grondvlak, terwijl je bij een regelmatig viervlak uitgaat van vier gelijkwaardige vlakken. De reden dat we voor de naam pyramide gekozen hebben, hoewel er hier toch duidelijk sprake is van vier gelijkwaardige vlakken, is dat we zo gauw we de pyramide in handen hebben, één van de vier vlakken als grondvlak beschouwen.

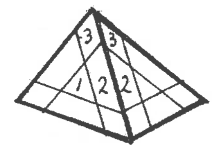
De pyramide kun je opgebouwd denken uit drie verschillende soorten blokjes:

1) blokjes waarvan slechts een kleur zichtbaar is

2) blokjes waarvan twee kleuren zichtbaar zijn

3) blokjes waarvan drie kleuren zichtbaar zijn

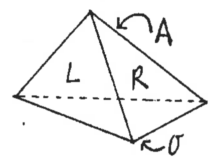
Een blokje van de eerste soort noemen we een centrum, een van de tweede soort een ribbeblokje en een van de derde soort een hoekblokje (zie figuur 1.)



figuur 1.
Een voorbeeld van een centrum (1), een ribbeblokje (2) en een hoekblokje (3).

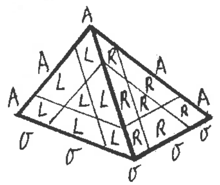
In totaal bestaat de pyramide dus uit 4 centra, 6 ribbeblokjes en 4 hoekblokjes.

Omdat we de notatie die we gaan invoeren niet afhankelijk willen laten zijn van de kleuren die op de pyramide zijn aangebracht, voeren we een kleuronafhankelijke notatie in. We zetten de pyramide voor ons op tafel zo dat één van de opstaande ribben naar ons toegekeerd is. We noemen nu de kleuren van de centra van het ondervlak, het achtervlak, het linkervlak en het rechtervlak respektievelijk O, A, L en R (zie figuur 2.)



figuur 2.

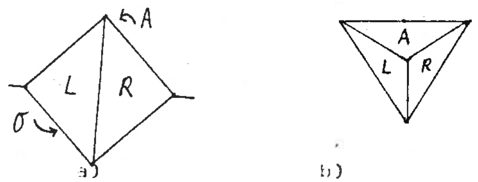
De tekeningen die we gaan gebruiken om bepaalde standen van de pyramide af te beelden zullen eruit zien als figuur 3. In ieder vlakje staat de letter die de kleur van dat vlakje aangeeft. Waar dat nodig is zal gebruik gemaakt worden van een rijtje letters om de pyramide heen, die de kleuren aangeven van de vlakjes die in de tekening niet zichtbaar zijn. In figuur 3 is de beginstand afgebeeld.



figuur 3.
Een voorbeeld hoe de beginstand afgebeeld kan worden.

Vaak zullen we alleen die kleuren in de tekening aangeven die op dat moment relevant zijn. Hoewel op deze tekening het zesde ribbeblokje en twee centra niet zichtbaar zijn, ligt door zo'n tekening toch de hele stand van de pyramide vast, ervan uitgaande dat je met de beginstand begonnen bent met draaien. Door het draaien met de vlakken van de pyramide blijven de centra immers op hun plaats en van het zesde ribbeblokje weten we precies in wat voor stand het op die plaats zit, omdat we niet één ribbeblokje alleen kunnen draaien (zie hoofdstuk 2.)

Naast deze tekeningen zullen ook andere, abstraktere plaatjes gebruikt worden. Dit is vooral het geval als we standen van de pyramide afbeelden in zogenaamde kaarten (zie hoofdstuk 3 en 6.) In figuur 4 zijn deze abstraktere afbeeldingen van de pyramide getekend.



figuur 4.

De afbeelding in figuur 4a wordt vooral gebruikt bij de zogenaamde draaikaart van hoekblokjes en bij de permutatiekaart van hoekblokjes; de afbeelding in figuur 4b

bij de draaikaart van ribbeblokjes. De letters L, R, A en O zijn er bijgezet om aan te geven welk vlak waar afgebeeld wordt.

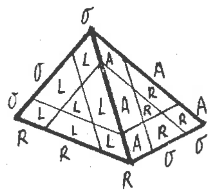
1.2 Benoeming van de blokjes en van de plaatsen.

De vier letters waarmee de kleuren benoemd werden, gaan we ook gebruiken om de blokjes te benoemen. Een centrum zullen we aangeven met dezelfde letter als de kleur van dat centrum. Een ribbeblokje heeft twee kleuren, dus dat kan aangegeven worden door twee letters; een hoekblokje op dezelfde manier door drie letters. We spreken af dat we bij de benoeming van een hoekblokje de kleuren van dat hoekblokje, van buitenaf gezien, rechtsom zullen benoemen. We maken geen afspraak over met welke kleur we beginnen.

Op deze manier hebben we dus precies één notatie voor een centrum, twee verschillende notaties voor een ribbeblokje en drie verschillende notaties voor een hoekblokje.

Voor de plaatsen waar de blokjes zitten zal dezelfde notatie gebruikt worden. Als we dus spreken over de de plaats LAR, ARL of RLA, dan bedoelen we de plaats waar het hoekblokje met de kleuren L, A en R zit, als de pyramide in de beginstand is. Evenzo bedoelen we met de plaats LR of RL de plaats waar in de beginstand het ribbeblokje met de kleuren L en R zit. Over de plaats van een centrum zullen we niet spreken, omdat de centra door draaiingen met de vlakken van de pyramide toch op dezelfde plaats blijven. Wel zullen we het vlak waarin een centrum ligt, aanduiden met de kleur van dat centrum.

Als er gesproken wordt over een hoekblokje of ribbeblokje in kombinatie met de plaats waar het zit, dan kiezen we de naam van die plaats zodanig, dat de kleur die overeenkomt met de beginletter van de naam van het hoekblokje of ribbeblokje, zichtbaar is in het vlak dat overeenkomt met de beginletter van de plaats (zie figuur 5.)



figuur 5.
In deze figuur is de stand afgebeeld die ontstaat na draaiing van vlak L over 120 graden rechtsom. Hoekblokje OAL zit dan bijvoorbeeld op plaats ARL en ribbeblokje LA zit op plaats LR.

1.3 Notatie van draaiingen.

De letters L, R, A, en O worden ook gebruikt om draaiingen aan te geven. Als X een van deze letters is, dan bedoelen we met X een draaiing van 120 graden rechtsom om centrum X van buitenaf gezien. Rechtsom draaien is dan met de klok meedraaien, terwijl vlak X van de pyramide naar ons toegekeerd is. In figuur 4 bijvoorbeeld is de draaiing L uitgevoerd. Twee keer een draaiing van 120 graden rechtsom om centrum X kan nu aangegeven worden met XX of Xmacht2, maar zal, omdat het effekt hetzelfde is als van een draaiing linksom om centrum X, meestal vervangen worden door X'. (Vanwege de beperkte mogelijkheden van de printer, schrijven we Xmacht2. We bedoelen hiermee X tot de macht 2. In de rest van de skriptie zullen we machtsverheffen in het algemeen zo noteren.)
Een operatie definieren we als een reeks van draaiingen en ze zal genoteerd worden door de draaiingen die achtereenvolgens uitgevoerd moeten worden, van links naar rechts achter elkaar te plaatsen. Als er bijvoorbeeld staat L'R dan wil dat zeggen dat we eerst vlak L 120 graden linksom moeten draaien en daarna vlak R 120 graden rechtsom. De lengte van een operatie is het aantal draaiingen waaruit de operatie bestaat. Een operatie van lengte 1 is dus een draaiing.

II HET AANTAL MOGELIJKE STANDEN.

2.0 Inleiding.

In dit hoofdstuk willen we bekijken hoeveel verschillende standen we, door te draaien vanuit de beginstand, kunnen bereiken. Hiertoe berekenen we eerst hoeveel verschillende standen te konstrueren zijn door de pyramide eerst even te demonteren.
Vervolgens gaan we bekijken of we aan een stand bepaalde invarianten kunnen toekennen, d.w.z. eigenschappen van een willekeurige stand (eventueel in een getal uitgedrukt) die niet veranderen als we met een willekeurig vlak draaien. De invariante eigenschappen die de beginstand heeft, moeten alle door draaien te bereiken standen dan ook hebben.
Nadat we de invarianten bepaald hebben berekenen we hoeveel verschillende standen er zijn met dezelfde invariante eigenschappen als de beginstand. In het volgende hoofdstuk laten we zien dat al deze standen ook daadwerkelijk te bereiken zijn.

2.1 Aantal konstrueerbare standen.

Als we de pyramide demonteren houden we alleen het skelet ervan over en natuurlijk 4 losse hoekblokjes en 6 losse ribbeblokjes. Het is niet mogelijk 2 standen in elkaar over te voeren door de pyramide als geheel te draaien, omdat de centra elk een andere kleur hebben. Bovendien verandert er door aan de vlakken te draaien niets aan het skelet (het is niet te zien of een centrum eventueel gedraaid is.(1)) Dus is het aantal konstrueerbare standen gelijk aan het aantal manieren om de losse blokjes weer terug in het skelet te zetten.
Het aantal manieren om de 6 ribbeblokjes in het skelet te zetten is gelijk aan 6!*2macht6, omdat je voor het eerste blokje dat je in het skelet wilt zetten 6 mogelijkheden hebt, voor het tweede daarna nog 5 enzovoorts (6!) én omdat je elk van die blokjes ook nog op zijn plaats zou kunnen draaien (2macht6).
Met dezelfde argumenten kun je bewijzen, dat het aantal manieren om de 4 hoekblokjes in het skelet te zetten, gelijk is aan 4!*3macht4 (elk hoekblokje kun je op 3 verschillende manieren op een bepaalde plaats in het skelet zetten.)

---

(1) In hoofdstuk 8 gaan we er vanuit dat je wel kunt zien of een centrum gedraaid is.

De ribbeblokjes kun je onafhankelijk van de hoekblokjes in het skelet zetten, dus het totale aantal konstrueerbare standen is 6!*2macht6*4!*3macht4 en dit is gelijk aan 89.579.520 (meer dan 6 keer het aantal Nederlanders.)

2.2 Invarianten.

2.2.1 Permutatie-invarianten.

Als je alléén naar de plaatsen van de blokjes kijkt, zie je dat elke stand een verwisseling is van de 4 hoekblokjes en van de 6 ribbeblokjes. De verzameling van alle verwisselingen van n elementen is een groep en heet de Sn. Je kunt een stand dus zien als een element uit het direkte produkt van S4 en S6.

Als je aan een vlak van de pyramide draait, veranderen er 3 hoekblokjes en 3 ribbeblokjes van plaats en wel in een cyclische verwisseling. Dit heet ook wel een 3-cykel van hoekblokjes en een 3-cykel van ribbeblokjes. We weten dat 3-cykels even verwisselingen zijn(2). Ook weten we dat, als we twee even verwisselingen achter elkaar uitvoeren, dit weer een even verwisseling oplevert. Een even verwisseling gevolgd door een oneven verwisseling, en een oneven verwisseling gevolgd door een even verwisseling, levert in beide gevallen als eindresultaat een oneven verwisseling op. Anders gezegd: even verwisselingen veranderen het teken niet (een even verwisseling heeft als teken +, een oneven verwisseling heeft als teken -.) Het teken van de verwisseling ten opzichte van de beginstand is dus een invariant.
We hebben eigenlijk in één klap 2 invarianten gevonden:
Het teken van de verwisseling van de hoekblokjes én het teken van de verwisseling van de ribbeblokjes(3).

---

(2) De groep van de even verwisselingen van n elementen is een ondergroep van Sn en heet An. De standen die we door draaien vanuit de beginstand kunnen bereiken zijn dus op te vatten als elementen van A4*A6. Later zullen we bewijzen dat we ook alle elementen van A4*A6 kunnen bereiken.
(3) Bij Rubik's cube is dit een beetje anders. Daar veranderen bij een draaiing 4 hoekblokjes en 4 ribbeblokjes van plaats in een 4-cykel. Een 4-cykel is een oneven verwisseling. Bij de kubus is het dus ook mogelijk oneven verwisselingen van hoekblokjes en (tegelijkertijd) oneven verwisselingen van ribbeblokjes te krijgen. Dit is een belangrijk verschil tussen de kubus en de pyramide.

2.2.2 Inleiding gedraaidheids-invarianten.

Voor we invarianten, die te maken hebben met het al of niet gedraaid zijn van de blokjes, proberen te vinden, moeten we eerst eens nader bekijken wat dat gedraaid zijn nu eigenlijk is.

Van een blokje dat op zijn beginplaats zit (dat is de plaats waar het in de beginstand zit), is het gemakkelijk te zeggen of het gedraaid zit of niet en, in het geval van een hoekblokje, of het rechtsom danwel linksom gedraaid zit (van buitenaf gezien). Maar hoe weet je nu of en hoe een blokje gedraaid zit, als het niet op zijn beginplaats is?

Om te weten of bijvoorbeeld het Links-Onder-ribbeblokjes gedraaid zit als het zich bevind tussen het Rechts-centrum en het Achter-centrum, moet je weten hoe het daar 'hoort' te zitten. Moet dan Links aan Rechts grenzen of juist aan Achter?
Dat 'weet' niemand. Dat kan ook niemand weten want dat blokje hoort daar helemaal niet te zitten. Uit de ongedraaide stand op de beginplaats kun je niet afleiden wat ongedraaide standen op de andere plaatsen zijn.

Het is echter wel mogelijk om als hulpmiddel zelf te definieren wanneer een blokje gedraaid zit. Dit kan op talloze manieren. Je zou zelfs kunnen definieren dat een blokje, als het niet op zijn beginplaats zit, altijd gedraaid is. Maar het is te vrezen dat je dan, in plaats van een hulpmiddel waardoor er herkenningspunten ontstaan op de wegen naar de beginstand, een rookbom in handen hebt die, als je hem gebruikt, het gehele wegen-doolhof met rook vult, waardoor je blij mag zijn dat je nog ergens een afslag kunt vinden, ook al heb je geen flauw idee of je die weg niet al eerder ingegaan bent.

Het is zinvol om een gedraaidheids-definitie zodanig te formuleren, dat het effekt van een draaiing met een vlak op de gedraaidheid er alleen van afhangt, of het blokje op een bepaalde plaats gedraaid zat en **niet** van welk blokje er op die plaats zat. (Bij de zojuist genoemde rookbom-definitie kan de gedraaidheid alleen veranderen als een blokje van zijn beginplaats af gaat of erop komt.) Het is zo zinvol om een dergelijke definitie te gebruiken, omdat het daardoor mogelijk wordt de kaarten te tekenen die in de latere hoofdstukken gebruikt worden.

We zullen nu een algemeen raamwerk van dergelijke definities geven.
De definitie moet zó zijn dat de gedraaidheid niet afhangt van welk blokje er op een bepaalde plaats zit. Vanuit de gedraaidheids-definitie bekeken, moeten alle blokjes hetzelfde zijn.

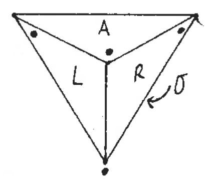
Dit bereiken we door elk blokje een zogenaamde hoofdrichting te geven(4). Voor de gedraaidheid is dan niet meer van belang **welk** blokje op een bepaalde plaats zit, maar alleen waar de hoofdrichting van het betreffende blokje is.

Om te weten of het blokje gedraaid is, vergelijken we de ligging van de hoofdrichting met de hoofdrichting van de plaats waar het blokje zit (de ligging van de hoofdrichting van een blokje op een plaats **in de beginstand** noemen we de hoofdrichting van die plaats.) Je moet dus niet alleen elk blokje een hoofdrichting geven, maar ook de hoofdrichting van de plaatsen onthouden(5).

Er zijn nog al wat mogelijkheden om alle blokjes een hoofdrichting te geven. Voor elk van de 4 hoekblokjes heb je de keus uit 3 richtingen en voor elk van de 6 ribbeblokjes heb je de keus uit 2 richtingen. In totaal zijn er dus 3macht4*2macht6=5184 verschillende gedraaidheids-definities(6).
Na al deze voorbereidende beschouwingen kunnen we nu eindelijk naar gedraaidheidsinvarianten gaan kijken.

2.2.3 Gedraaidheids-invariant van hoekblokjes.

Eerst kijken we alleen naar wat er met de hoekblokjes gebeurt. Daartoe geven we een geschikte gedraaidheids-definitie. In figuur 1 is aangegeven wat de hoofdrichtingen zijn.

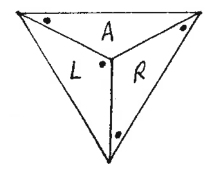


figuur 1.

---

(4) Voor een praktische uitwerking hiervan zie Appendix A.
(5) Een konreet voorbeeld is te vinden in Appendix A.
(6) Uiteraard zou je, door naar symmetrieën te kijken, een aantal van die definities hetzelfde kunnen noemen. We zullen daar echter niet verder op ingaan.

Stel je voor dat figuur 1 de beginstand weergeeft en dat we daarop de draaiing L toepassen. Het resultaat is dan figuur 2.



figuur 2.

Omdat figuur 1 de beginstand voorstelt, is het gemakkelijk de hoofdrichtingen van figuur 2 met die in de beginstand te vergelijken. We zien: het blokje op plaats LAR zit linksom gedraaid, evenals de blokjes op de plaatsen RQL en ALO; het blokje op plaats ORA zit ongedraaid.

Als een blokje linksom is gedraaid zeggen we dat zijn gedraaidheid -1 is, is het blokje rechtsom gedraaid dan zeggen we dat zijn gedraaidheid +1 is, en tenslotte, als het blokje ongedraaid is dan is zijn gedraaidheid 0.
De totale hoekgedraaidheid is de som van de gedraaidheden van alle hoekblokjes. In figuur 1 is de totale hoekgedraaidheid dus 0 en in figuur 2 -3.

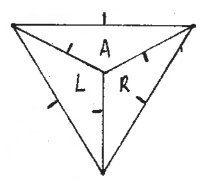
De gedraaidheidsdefinitie is zodanig symmetrisch gekozen dat ook na toepassen van R, A of O op de beginstand, de totale hoekgedraaidheid -3 is. Als we L', R', A' of O' op de beginstand hadden toegepast was de totale hoekgedraaidheid +3 geweest. (Ga dit na!) Door toepassen van een draaiing op de beginstand verandert de totale hoekgedraaidheid dus met +3 of met -3. We zoeken echter een invariant: een eigenschap, eventueel in een getal uitgedrukt, van een willekeurige stand, die niet verandert door het toepassen van een draaiing. Als de totale hoekgedraaidheid verandert met +3 of met -3 dan verandert de totale hoekgedraaidheid modulo 3 dus niet!
We maken een nieuwe definitie van de totale hoekgedraaidheid:
De totale hoekgedraaidheid is de som van de gedraaidheden van alle hoekblokjes modulo 3. We zullen voortaan ook de gedraaidheden van elk van de hoekblokjes modulo 3 nemen: een gedraaidheid van +2 is dan hetzelfde als een gedraaidheid van -1.

Is deze totale hoekgedraaidheid een echte invariant, dat wil zeggen verandert hij ook bij een willekeurige stand niet?

Stel dat we een willekeurige stand hebben. De totale gedraaidheid van die stand noemen we X. We draaien nu elk hoekblokje (door middel van demonteren van de pyramide) zodanig dat zijn gedraaidheid 0 wordt. Je zou kunnen zeggen dat we dan een totale gedraaidheid van -X toegepast hebben. Hierna passen we een draaiing van een vlak toe die we D zullen noemen. De totale hoekgedraaidheid blijft 0, omdat we, wat hoekgedraaidheid betreft, in de beginstand zaten. Vervolgens passen we op elk hoekblokje een draaiing toe die tegengesteld is aan de draaiing die we toepasten om dat hoekblokje gedraaidheid 0 te geven. De totale gedraaidheid is dan weer X, en we hebben precies die stand gekregen die we zouden krijgen als we op de willekeurige stand de draaiing D toegepast hadden.
De totale hoekgedraaidheid is dus een echte invariant.

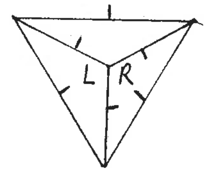
2.2.4 Gedraaidheids-invariant van ribbeblokjes.

Op ongeveer dezelfde manier gaan we kijken naar het draaien van de ribbeblokjes.
We geven eerst een handige gedraaidheidsdefinitie. In figuur 3 is aangegeven hoe we de hoofdrichtingen in de beginstand kiezen. De kant waar het streepje staat is de hoofdrichting.



figuur 3.

Als we hierop L toepassen krijgen we figuur 4.



figuur 4.

We zien dat de ribbeblokjes op de plaatsen LO en RO gedraaid zitten. Alle andere ribbeblokjes zitten ongedraaid.
Als een ribbeblokje gedraaid zit, zeggen we dat zijn gedraaidheid 1 is; zit het ongedraaid, dan zeggen we dat zijn gedraaidheid 0 is. De totale ribbegedraaidheid is de som van de gedraaidheden van alle ribbeblokjes.
De totale ribbegedraaidheid in figuur 3 is 0, in figuur 4 is deze +2. Als we L' toegepast op de beginstand was de totale ribbegedraaidheid ook +2 geweest (we hadden dan zelfs precies dezelfde tekening gekregen.)
De ribbegedraaidheidsdefinitie is zodanig symmetrisch gekozen dat ook O, O', R, R', A en A', toegepast op de beginstand, een ribbegedraaidheid van +2 opleveren. Door toepassen van een draaiing op de beginstand verandert de ribbegedraaidheid met +2.
Om een invariant te maken veranderen we weer de definitie:
De totale ribbegedraaidheid is de som van de gedraaidheden van alle ribbeblokjes modulo 2.
Met behulp van eenzelfde soort argument als voor de hoekgedraaidheidsinvariant ziet men gemakkelijk in dat ook dit een echte invariant is.

2.2.5 Samenvatting.

Samenvattend kunnen we zeggen dat er 4 invarianten zijn. We zullen ze hieronder nog eens allemaal opschrijven met tussen haakjes erachter de verschillende waarden die ze aan kunnen nemen.

- het teken van de verwisseling van de hoekblokjes (+,-)

- het teken van de verwisseling van de ribbeblokjes (+,-)

- de totale hoekgedraaidheid (0,1,2)
- de totale ribbegedraaidheid (0,1).

2.3 Aantal vanuit de beginstand te bereiken standen.

Om dat aantal te bepalen doen we nog 3 dingen:

a) de invariante eigenschappen van de beginstand bepalen.

b) tellen hoeveel standen er zijn met dezelfde invariante eigenschappen.

c) aantonen dat al deze standen, door draaiingen vanuit de beginstand, te bereiken zijn.

a) Het eerste is simpel. In de beginstand is niets verwisseld. Dat is een even verwisseling, dus het teken van zowel de verwisseling van de hoekblokjes als van de verwisseling van de ribbeblokjes is +. Er is ook niets gedraaid, dus de totale gedraaidheden zijn allebei 0.

b) Stel je voor dat je de pyramide demonteert en er alles weer terug in gaat zetten.
Wat de plaatsen van de hoekblokjes betreft:
als je de eerste twee hoekblokjes in het skelet hebt gezet, kan en moet je het derde en het vierde er zodanig in zetten, dat je een even verwisseling hebt. Je hebt dus alleen vrije keus voor de eerste twee hoekblokjes; de plaats van het derde en het vierde ligt dan vast. Dit geeft 4*3=12 mogelijkheden(7).
Op dezelfde manier vind je voor de plaatsen van de ribbeblokjes 6*5*4*3=360 mogelijkheden(8).
Wat de gedraaidheid van de hoekblokjes betreft:
Als je 3 hoekblokjes een gedraaidheid hebt gegeven kan en moet je het vierde zodanig draaien dat de totale hoekgedraaidheid 0 is. Dus je hebt alleen vrije keus voor de eerste 3 hoekblokjes. De gedraaidheid van het vierde ligt dan vast. Dit geeft 3macht3=27 mogelijkheden.
Op dezelfde manier vind je voor de gedraaidheden van de ribbeblokjes 2macht5=32 mogelijkheden.
Je kunt al die dingen onafhankelijk van elkaar kiezen en dus zijn er in totaal 12*360*27*32=3.732.480 standen met dezelfde invariante eigenschappen als de beginstand. Dat is 1/24 van het aantal konstrueerbare standen. Dus als je

---

(7) Dit is gelijk aan het aantal elementen van A4.
(8) Het aantal elementen van A6 is ook 360.

de pyramide op een willekeurige manier weer in elkaar zet, heb je maar een kans van 1 op 24 dat je hem door draaien weer in de beginstand kunt krijgen.

c) In het volgende hoofdstuk wordt niet alleen uitgelegd dat, maar ook hoe je vanuit al deze standen door toepassen van draaiingen de beginstand kunt bereiken.

III OPLOSSINGSMETHODE.

3.0 Inleiding.

Om het bewijs van het vorige hoofdstuk te voltooien, volgt in dit hoofdstuk een oplossingsmethode voor de pyramide.
De gebruikte oplossingsmethode is een 3-vlaksmethode, dat wil zeggen dat met één vlak nooit gedraaid wordt. We hebben dan meteen bewezen dat het mogelijk is de pyramide op te lossen door slechts aan drie van de vier vlakken te draaien. Van de gebruikte methode wordt tevens berekend hoeveel draaiingen er maximaal voor nodig zijn. Daarbij dient opgemerkt te worden, dat we, mede gezien het feit dat de gebruikte methode slechts een 3-vlaksmethode is, geen overdreven moeite gedaan hebben om het maximum aantal draaiingen klein te maken.

Globaal bekeken valt de methode in 2 stukken uiteen: eerst worden de ribbeblokjes korrekt gemaakt en daarna de hoekblokjes.
De ribbeblokjes worden aangepakt met behulp van de zogenaamde 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes (zie appendix B). Die kaart is ook te zien als een Cayley graph van A5.
De hoekblokjes worden daarna op de juiste plaats gezet en gedraaid. Dit doen we door te kijken wat het effekt is op hoekblokjes van enkele "lussen" op de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes. (Dergelijke lussen horen bij operaties die de ribbeblokjes vastlaten.)

Deze effekten worden genoteerd door middel van zogenaamde draaicykels. In paragraaf 3.2 zal behandeld worden wat deze draaicykels voorstellen en hoe ermee gewerkt moet worden. Met behulp van die draaicykels worden de hoekblokjes (en dus de gehele pyramide) in orde gemaakt.

Daarmee is bewezen dat er niet alleen niet meer dan 3.732.480 mogelijke standen zijn, maar dat deze ook allemaal vanuit de beginstand te bereiken zijn. Zelfs door slechts met 3 vlakken te draaien.

We beginnen eerst in paragraaf 3.1 met het opfrissen van de begrippen cykelontbinding en orde van een permutatie.

3.1 Orde en cykelontbinding.

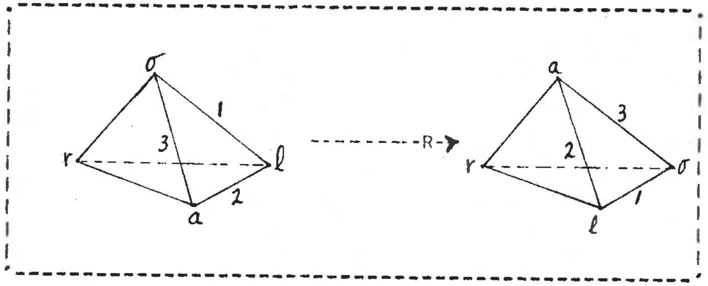
Je kunt operaties met elkaar en met zichzelf vermenigvuldigen. Stel we hebben een operatie X, dan is Xmacht2 het tweemaal uitvoeren van de operatie. De orde van een operatie is het kleinste natuurlijke getal n waarvoor geldt: Xmachtn=Id. Id stelt de operatie voor die niets aan de pyramide verandert. De orde van de draaiing R is dus 3.

Als we even niet op gedraaidheden letten, dan kunnen we zeggen dat het toepassen van een operatie hetzelfde is als het op een bepaalde manier verwisselen van blokjes.
Er zijn 6 ribbeblokjes en 4 hoekblokjes. Je zou dus zo'n verwisseling kunnen zien als een element van het direkt produkt van de twee permutatiegroepen S6 en S4.

Een element van een permutatiegroep kun je op meerdere manieren schrijven als produkt van cykels. We zullen echter afspreken dat we zo'n permutatie schrijven als produkt van **disjunkte** cykels (dat wil zeggen: elk blokje komt in ten hoogste één cykel voor.) Bovendien spreken we af dat, als we een kombinatie hebben van hoekblokjespermutaties en ribbeblokjespermutaties, we eerst de hoekblokjespermutatie op zullen schrijven.

We geven de ribbeblokjes de nummers 1 tot en met 6. De hoekblokjes die tegenover de vlakken O, L, A en R zitten, geven we respektievelijk aan met de kleine letters o, l, a, en r.

Een voorbeeld (figuur 1):



figuur 1.

De operatie R zou je kunnen schrijven als (ol)(la)(12)(23). Maar dan zijn er blokjes die in twee verschillende cykels voorkomen. Als we de cykels opschrijven volgens onze afspraak krijgen we(1): R=(ola)(123).

3.2 De draaicykel-notatie voor een operatie.

Met de in de vorige paragraaf afgesproken notatie zijn we niet in staat aan te geven of en hoe blokjes draaien terwijl ze verwisselen.

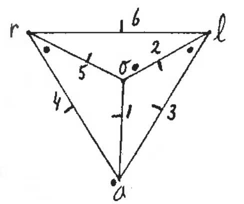
3.2.1 Hoekblokjes.

Stel dat we de operatie (ola) hebben. Bij elk blokje geven we aan hoe het blokje gedraaid zit na het verwisselen. (We gaan uit van de beginstand, waarin er niets gedraaid zit.)

Dit doen we als volgt: als een blokje rechtsom gedraaid zit, zetten we er een + achter, als het linksom gedraaid zit een -, en als het niet gedraaid zit na het verwisselen, niets. Je zou dan bijvoorbeeld (o+l+a+) kunnen krijgen, maar als je een andere gedraaidheids-definitie hebt, zou je met dezelfde operatie (o+l-a) kunnen krijgen. En je zou er achter kunnen komen dat blokje r, hoewel het op zijn plaats blijft, toch draait. Dan zou je bijvoorbeeld (o+la)r- kunnen hebben. (Als een blokje alleen maar draait en niet verwisselt, zullen we dat altijd aangeven zonder haakjes, dus net als de r- in de operatie (o+la)r-.)

3.2.2 Ribbeblokjes.

Bij ribbeblokjes is er geen sprake van linksom of rechtsom draaien. Als zo'n blokje draait zullen we dat aangeven door er een * achter te zetten. Met de gedraaidheids-definitie zoals aangegeven in figuur 2:



figuur 2.

---

(1) In tegenstelling tot wat in de groepentheorie gebruikelijk is, lezen we de cykels hier van **links naar rechts**, omdat we operaties ook in deze richting lezen.

ziet de draaiing R eruit als (o-l-a-)(1*23*).
We zullen afspreken dat we eerst de draaicykel van de hoekblokjes noteren, en daarna de draaicykel van de ribbeblokjes.

3.2.3 Voorbeelden.

Voor we met behulp hiervan de orde van een operatie gaan bekijken, zullen we eerst nog wat voorbeelden geven van hoe je ermee kunt rekenen.
Stel je hebt de operatie (o+l-a); we zullen haar even X noemen. Hoe vind je nu de schrijfwijze voor Xmacht2 ? We moeten X twee keer toepassen. We bekijken eerst wat er met het hoekblokje o gebeurt.

- Blokje o draait de eerste keer positief en gaat naar plaats l. De tweede keer (blokje o zit op plaats l) gaat o van plaats l naar plaats a en draait negatief, omdat l in de draaicykel-notatie gevolgd wordt door een -. Uiteindelijk is blokje o dus ongedraaid aangekomen op plaats a.

- Omdat o op plaats a terechtkomt, kijken we nu wat er met blokje a gebeurt.
  Blokje a gaat de eerste keer ongedraaid naar plaats o. De tweede keer draait het positief en gaat naar plaats l. Uiteindelijk is blokje a dus positief gedraaid op plaats l aangekomen.

- Blokje l gaat eerst negatief gedraaid naar plaats a. Vervolgens gaat het naar plaats o zonder te draaien. Het zit dus tenslotte negatief gedraaid op plaats o.

We kunnen konkluderen dat Xmacht2 gelijk is aan (oa+l-).
Op dezelfde manier kun je zien dat Xmacht3 gelijk is aan Id.
Ook als we draaicykels vermenigvuldigen passen we eerst de meest linkse toe en daarna achtereenvolgens de cykels rechts daarvan.
Met de cykels waarmee ribbeblokjes aangeduid worden, gaat het allemaal analoog. Als u zelf wilt oefenen, kunt u kontroleren dat

- [(o+la)r-]macht3 = o+l+a+

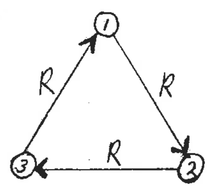
- [(1*23)4*]macht3 = 1*2*3*4*

- (1*2*3)(12) = (2*3)1*

3.3 Cayley graph.

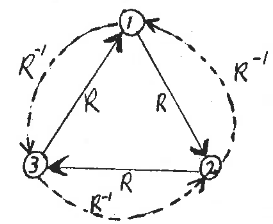
Zij G een eindige groep en a1,a2,........,an elementen van G.
We noemen {a1,a2,.....,an} een stel **voortbrengers** van G als ieder element van G te schrijven is als ai1ai2........aim met m een natuurlijk getal en ij een element uit {1,2,.....n}.

Zij G een groep met voortbrengers a1,a2,......,an.
De **Cayley graph** van (G; a1,a2,.....an) is het diagram dat bestaat uit punten die korresponderen met alle elementen van de groep met een pijl van punt P naar punt Q dan en slechts dan als P.ai=Q voor zekere ai. Van groepen waarbij je meerdere stellen voortbrengers kunt vinden, kun je uiteraard even zovele verschillende Cayley graphen tekenen. De Cayley graph van de groep die hoort bij het draaien aan de pyramide met slechts één vlak en voortbrenger R, ziet er als volgt uit (figuur 3):



figuur 3.
Deze graph noemen we graph A.

De Cayley graph van dezelfde groep, wanneer we ook de inverse van R (R') als voortbrenger toelaten, ziet eruit als die in figuur 4.



figuur 4.
Deze graph noemen we graph B.

Een **pad** in een Cayley graph is een rijtje voortbrengers.
In graph A is RR bijvoorbeeld een pad; in graph B is RR'RR bijvoorbeeld een pad.

Een **pad van een punt P naar een punt Q** op de graph is een rijtje voortbrengers zodanig dat als je eerst het element dat hoort bij punt P toepast, en daarna het rijtje voortbrengers, dit hetzelfde is als dat je het element toepast dat hoort bij punt Q.
In graph A is RR een pad van 1 naar 3 en ook van 2 naar 1.

De **lengte van een pad** is de lengte van het rijtje voortbrengers.
De lengte van RR'RR is bijvoorbeeld 4.

De **afstand van een punt P tot een punt Q** op de graph is het minimum van de lengtes van alle mogelijke paden van P naar Q als P≠Q; en gelijk aan 0 als P=Q.
Op graph A is de afstand van 1 tot 3 gelijk aan 2, en de afstand van 3 tot 1 gelijk aan 1. Op graph B zijn beide afstanden gelijk aan 1.

De **diameter van de graph** (ook wel de diameter van de groep met voortbrengers a1,a2,....,an genoemd) is het maximum van de afstanden van alle punten tot het punt wat korrespondeert met de Identiteit (Id) van de groep.
Voor graph A is de diameter gelijk aan 2 en voor graph B is deze 1.

Een **antipode** is een punt waarvan de afstand tot Id gelijk is aan de diameter. Uiteraard is er (bij een eindige groep) altijd minstens één antipode.
Graph A heeft 1 antipode; graph B heeft 2 antipoden.

3.4 De 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes.

Bij het vinden van een oplossingsmethode voor de pyramide hebben we gebruik gemaakt van de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes (zie kaart 1 in appendix B). Zoals de naam al zegt, geeft deze kaart aan hoe de ribbeblokjes verwisselen als we slechts met twee vlakken draaien. Deze kaart geeft dus geen informatie over de oriëntatie van de ribbeblokjes, die echter bij het draaien met twee vlakken toch niet interessant is, omdat de ribbeblokjes dan op iedere plaats maar op precies één manier kunnen zitten.

Het is duidelijk dat, als we met twee vlakken draaien, er één ribbeblokje altijd op zijn plaats blijft. We hebben dus te maken met verwisselingen van 5 ribbeblokjes. Omdat we uit hoofdstuk 1 weten, dat we alleen maar even verwisselingen kunnen krijgen door middel van operaties, hebben we hier te maken met een ondergroep van de A5. De omcirkelde getallen in deze 2-vlakspermutatiekaart geven de elementen aan van de A5. Welk element met ieder getal bedoeld wordt, staat aangegeven in de volgende tabel (we gebruiken hier de cykel-notatie):

1:I	16:(15423)	31:(15)(34)	46:(14235)
2:(132)	17:(154)	32:(13)(24)	47:(153)
3:(123)	18:(245)	33:(14)(35)	48:(13524)
4:(345)	19:(13245)	34:(25)(34)	49:(253)
5:(354)	20:(254)	35:(15)(23)	50:(143)
6:(14532)	21:(13254)	36:(24)(35)	51:(15234)
7:(15432)	22:(14352)	37:(14)(23)	52:(243)
8:(12453)	23:(152)	38:(15243)	53:(13425)
9:(12543)	24:(12435)	39:(135)	54:(12)(34)
10:(13452)	25:(125)	40:(14253)	55:(12)(35)
11:(12345)	26:(142)	41:(134)	56:(13)(45)
12:(13542)	27:(15342)	42:(235)	57:(23)(45)
13:(12354)	28:(124)	43:(14325)	58:(15)(24)
14:(14523)	29:(12534)	44:(234)	59:(14)(25)
15:(145)	30:(13)(25)	45:(15324)	60:(12)(45)

tabel 1.

De twee vlakken waarmee we gaan draaien zijn het L-vlak en het R-vlak, en de nummering van de ribbeblokjes hebben we zodanig gekozen, dat het ribbeblokje met nummer 6 niet in een van de beide vlakken zit. De zwarte en rode lijnen tenslotte, geven aan welke elementen in elkaar over te voeren zijn door middel van draaiingen met het R-vlak of het L-vlak, waarbij zwarte lijnen korresponderen met draaiingen

met het R-vlak, en rode lijnen met die van het L-vlak.

Iedere verbindingslijn tussen 2 elementen is voor een gedeelte een doorgetrokken lijn en voor een ander gedeelte een stippellijn. Als je van element a naar element b gaat via zo'n lijn, en de lijn begint met het stippellijn-gedeelte, dan korrespondeert dat met het linksom draaien van het vlak dat hoort bij de kleur van de lijn. Als je de omgekeerde weg bewandelt, en je gaat van b naar a, dan moet je uiteraard dat vlak rechtsom draaien. Daarom is het andere gedeelte van de verbindingslijn een doorgetrokken lijn. Aan hoe de lijn begint, kun je dus zien of je het bijbehorende vlak linksom (gestippeld), dan wel rechtsom (doorgetrokken) moet draaien.

De 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes is dus een Cayley graph van de A5 met voortbrengers (123) en (132) (draaien met het L-vlak) en (345) en (354) (draaien met het R-vlak)(2).

Een vereenvoudiging die we min of meer noodgedwongen moesten uitvoeren, is het weglaten van 8 van de verbindingslijnen. We hebben dit gedaan, omdat bij het wél tekenen van deze lijnen, de kaart te onoverzichtelijk zou worden.
De lijnen die weggelaten zijn, zijn de lijnen tussen de volgende tweetallen punten:
38 en 45, 39 en 42, 40 en 43, 41 en 44, 46 en 53,
47 en 50, 48 en 51 en tenslotte 49 en 52.
Toch levert dit geen informatieverlies op, omdat uit de kaart vrij gemakkelijk is af te lezen waar de lijnen moeten lopen, wat voor kleur ze hebben, en welk gedeelte gestippeld is.

Kijken we bijvoorbeeld naar element 38, dan zien we dat daar slechts 3 in plaats van 4 lijnen aankomen, waarvan er 2 zwart zijn. Eén van de 2 rode lijnen is dus niet getekend, en wel diegene die bij 38 gestippeld had moeten beginnen. Dat is dus de lijn die overeenkomt met het 120 graden linksom draaien van het L-vlak. Echter 120 graden linksom draaien met het L-vlak, geeft hetzelfde resultaat als 2 keer 120 graden rechtsom draaien van dat vlak.

----

(2) De verzameling voortbrengers is zó gekozen dat als p er een element van is, dit ook geldt voor de inverse van p.
Zij a en b elementen van A5 en q de inverse van p, dan geldt:
ap=b is equivalent met bq=a.
Daarom loopt er, als er een pijl loopt van a naar b, ook altijd een van b naar a.

Op de kaart kunnen we nagaan dat we dan, via element 58, uitkomen bij element 45. Hieruit kunnen we konkluderen, dat er een rode lijn behoort te lopen die de punten 38 en 45 verbindt, en die bij 38 gestippeld is en bij 45 doorgetrokken.

Wat de nummering van de elementen van de A5 betreft, dient nog opgemerkt te worden dat deze zodanig is, dat een lager nummer aangeeft dat de afstand van dat element tot Id kleiner dan of gelijk aan de afstand tot Id van een element met een hoger nummer is.
De stand Id hebben we dan ook nummer 1 gegeven, en de stand die het "moeilijkst" te bereiken is vanuit Id (de antipode) nummer 60. Merk op dat er hier precies één antipode is. In tabel 1 staat ook aangegeven tussen welke twee nummers deze afstand telkens 1 groter wordt.
We zien dat de afstand van 60 tot 1 gelijk is aan 6. Dit wil zeggen dat, als de pyramide in de war gedraaid is zodanig dat blokje 6 op de goede plaats zit (eventueel gedraaid), we de ribbeblokjes 1 tot en met 5 in maximaal 6 keer draaien met het L-vlak en het R-vlak ook op de goede plaats kunnen krijgen.

Belangrijke begrippen bij zo'n kaart zijn de begrippen pad en lus.
Het pad wordt hetzelfde bedoeld als in paragraaf 3.3: een rijtje voortbrengers $g_1g_2...g_n$ zodanig dat $ag_1g_2...g_n=b$ is een pad van a naar b.
Een **niet-vereenvoudigbaar pad** van a naar b, is een pad van a naar b waarvoor geldt $g_i \neq g(i+1)$ en $g_i \neq g'(i+1)$ voor i een element uit {1,2,...,n-1}.
Een niet-vereenvoudigbaar pad elimineert dus alle gevallen waarbij we twee keer aan hetzelfde vlak draaien.
Een voorbeeld van een pad van 1 naar 20 op de 2-vlakspermutatiekaart is L'RRL; een voorbeeld van een niet-vereenvoudigbaar pad van 1 naar 20 is L'R'L.
Inplaats van dat rijtje voortbrengers zullen we ook vaak de lijn, gevormd door de met de voortbrengers korresponderende verbindingslijnen, bedoelen.
Onder een lus om een punt a verstaan we weer een pad van punt a naar punt a; een **niet-vereenvoudigbare lus** om a is een niet-vereenvoudigbaar pad van a naar a.
Een voorbeeld van een niet-vereenvoudigbare lus om 1 is L'R'LR'L'R'LR'.
Als we in het vervolg het woord lus gebruiken dan bedoelen we een niet-vereenvoudigbare lus.

Bij het goedzetten van de hoekblokjes zullen we gebruik maken van lussen om 1. Zo'n lus om 1 is dus een operatie die alle ribbeblokjes op hun plaats laat. Als we die operatie toegepast hebben op een willekeurige stand van de pyramide, dan zal blijken dat de ribbeblokjes weer op

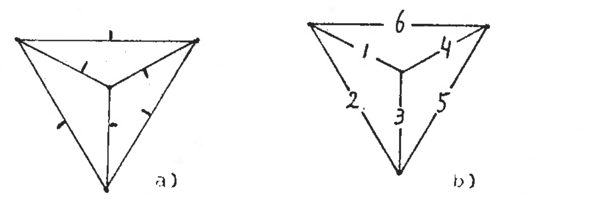
dezelfde plaats zitten als bij die willekeurige stand. In dit geval (met slechts 2 vlakken draaien) zijn ze zelfs niet gedraaid! Zo'n lus kan dus alleen maar iets doen met de hoekblokjes.
Van deze eigenschap van een lus zullen we in paragraaf 3.6 gebruik maken.

3.5 Ribbeblokjes.

Zoals in de inleiding is opgemerkt, beginnen we bij het goedzetten van de pyramide, met het korrekt maken van de ribbeblokjes.
Dit doen we in 3 stappen:

- we zetten ribbeblokje 6 ongedraaid op de goede plaats
- we draaien alle andere ribbeblokjes zó dat ze allen gedraaidheid 0 hebben
- met behulp van de 2-vlakspermutatiekaart zetten we de ribbeblokjes op de goede plaats

De gedraaidheidsdefinitie kiezen we zodanig dat er, bij draaiingen met het L-vlak en R-vlak, niets aan de gedraaidheid van de ribbeblokjes verandert.
Omdat we bij de tweede stap ervoor gezorgd hebben dat de gedraaidheid van ieder blokje 0 is, en omdat er bij de derde stap niets aan de gedraaidheid verandert (we draaien daar alleen met het L-vlak en het R-vlak), weten we dat de ribbeblokjes dan ongedraaid op de goede plaats terechtkomen.
We kiezen de hoofdrichtingen als volgt (figuur 5a):



figuur 5.

De plaatsen hebben we hetzelfde genummerd als bij de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes (zie figuur 5b). De 3 vlakken waarmee we gaan draaien zijn het A-vlak, het R-vlak en het L-vlak.

3.5.1 Ribbeblokje 6 goedzetten.

We gaan ribbeblokje 6 ongedraaid op de goede plaats zetten.
Stel dat het in het R-vlak zit (het L-vlak gaat analoog). We kunnen dan kiezen of we het via de plaatsen 3 en 1 op de goede plaats draaien, of dat we dat doen via plaats 4. Omdat het in het ene geval anders gedraaid op plaats 6 komt te zitten dan in het andere geval, kunnen we ervoor zorgen dat het daar meteen ongedraaid komt te zitten.
Dit gaat in maximaal 3 keer draaien.
Als blokje 6 gedraaid op plaats 6 zit, kunnen we het via de plaatsen 1,3 en 4 weer terug op plaats 6 krijgen. Het is gemakkelijk na te gaan dat het daar dan ongedraaid zit.
We hebben hiervoor 4 keer gedraaid.

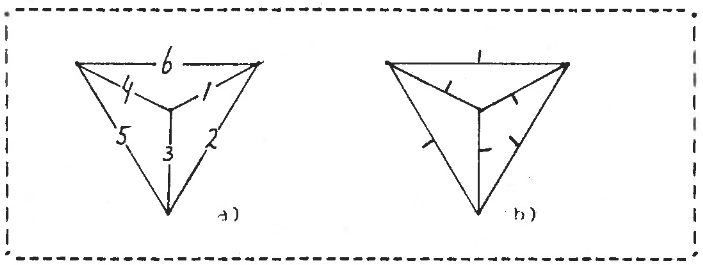
Blokje 6 kunnen we binnen 4 keer draaien ongedraaid op plaats 6 krijgen (merk op dat we niet met het O-vlak gedraaid hebben.)

3.5.2 De overige ribbeblokjes draaien.

De totale gedraaidheid is altijd even. Omdat de gedraaidheid van blokje 6 gelijk is aan 0, is de som van de gedraaidheden van de andere 5 blokjes gelijk aan 0,2 of 4. We moeten dus nog 2 of 4 ribbeblokjes draaien.

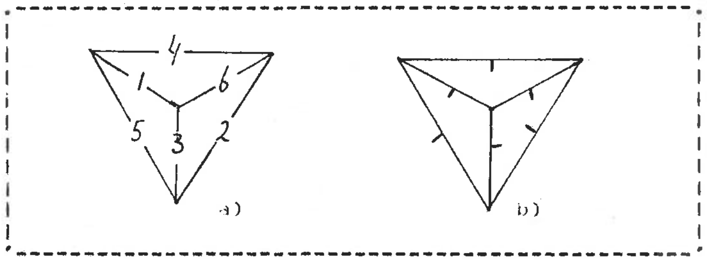
3.5.2.1 2 Ribbeblokjes draaien.

We bekijken hiervoor de operatie (LR'LR'LA)macht2.
LR'LR'L losgelaten op de beginstand levert de permutatie (14)(25). Dit kunnen we aflezen uit de 2-vlakspermutatiekaart. Bij deze operatie draait er niets, omdat we alleen met het L-vlak en het R-vlak gedraaid hebben.
Het resultaat van LR'LR'L is dus (figuur 6):



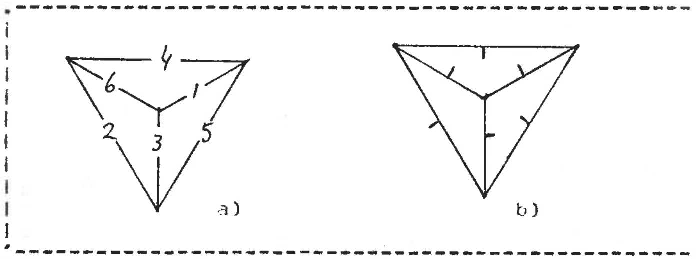
figuur 6.

Hierna passen we A toe (figuur 7):



figuur 7.

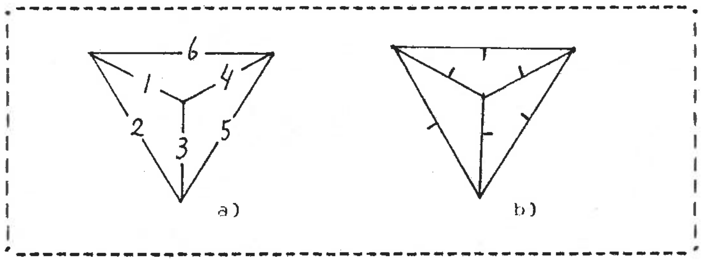
Opnieuw passen we LR'LR'L toe. De permutatie die overeenkomt met LR'LR'LALR'LR'L is (14)(25)(164)(14)(25)=(146).
Het bijbehorende plaatje is figuur 8a:



figuur 8.

Omdat, als we met 2 vlakken draaien, ieder blokje maar op precies één manier op een bepaalde plaats kan zitten, weten we ook hoe de gedraaidheden zijn. We vergelijken figuur 8a met figuur 7a en 7b. We zien dat bijvoorbeeld blokje 1 op plaats 4 zit. Het moet daar gekomen zijn via plaats 3, en de oriëntatie is dus zoals is aangegeven in figuur 8b.
Door te kijken waar ieder blokje uitkomt, en hoe zijn gedraaidheid dan is, hebben we figuur 8b getekend.

Tenslotte passen we A nog eens toe. De bijbehorende permutatie is (146)(164)=Id (figuur 9a), en de gedraaidheden zijn weer op dezelfde manier gevonden als bij figuur 8b. Deze zijn aangegeven in figuur 9b:



figuur 9.

We zien dat ieder blokje weer op dezelfde plaats zit en dat alleen de blokjes op de plaatsen 4 en 6 gedraaid zijn. Hiervoor hebben we 12 keer gedraaid.
Vanwege de symmetrie in de pyramide krijgen we, als we in (LR'LR'LA)macht2 L vervangen door R', R' door L, en A door A', een operatie die alleen de blokjes op de plaatsen 1 en 6 draait.

De blokjes op de plaatsen 1 en 4 draaien we door bijvoorbeeld eerst A' toe te passen zodat ze op de plaatsen 4 en 6 terecht komen, daarna de operatie toe te passen die de blokjes op de plaatsen 4 en 6 draait, en tenslotte A', zodat ze weer op hun oorspronkelijke plaats komen.
De operatie die we dan toegepast hebben is A'(LR'LR'LA)macht2A en ze heeft lengte 13 (AA=A')(3).

Op dezelfde manier zien we dat R'(LR'LR'LA)macht2R de blokjes op de plaatsen 5 en 6 draait. Deze operatie heeft lengte 14.

We hebben hier laten zien dat we de ribbeblokjes op de plaatsen 4 en 6, 1 en 6, en 1 en 4 twee aan twee kunnen

---

(3) Dit is een fraaie illustratie van wat het groepentheoretisch begrip konjugeren inhoudt.
Formeel luidt de definitie:
Zij G een groep en a en b elementen van G.
a en b zijn gekonjugeerd dan en slechts dan als er een s uit G bestaat, zodanig dat sas'=b (s' is de inverse van s).
In dit geval hebben we een operatie die de 2 ribbeblokjes, die op de plaatsen 4 en 6 zitten, draait. Gekonjugeerd hiermee zijn alle operaties die 2 blokjes draaien, ongeacht op welke plaats deze zitten.

draaien met een operatie die een lengte heeft van 12, 13 of 14.

Uit symmetrie-overwegingen volgt dat we ieder tweetal ribbeblokjes kunnen draaien binnen 14 keer draaien (weer zonder met het O-vlak te draaien.)

3.5.2.2 4 Ribbeblokjes draaien.

Blokje 6 zit al ongedraaid op zijn plaats, en één van de andere vijf is ook ongedraaid.
We onderscheiden nu twee gevallen:

- Het andere ongedraaide blokje zit niet in O.
  In dit geval kunnen we twee keer 2 blokjes draaien met operaties van lengte 12. De totale lengte van deze operatie is dus 24.

- Het andere ongedraaide blokje zit wel in O.
  Hier kunnen we twee blokjes draaien met een operatie van lengte 12, en twee blokjes met een operatie van lengte 13. De totale lengte is 25.

3.5.2.3 Konklusie.

Als ribbeblokje 6 ongedraaid op de goede plaats zit, kunnen we, door maximaal 25 keer te draaien, ervoor zorgen dat de overige ribbeblokjes gedraaidheid 0 krijgen en dat ribbeblokje 6 nog steeds ongedraaid op de goede plaats zit. Ook hier hebben we niet met het O-vlak gedraaid.

3.5.3 De overige ribbeblokjes goed zetten.

Rest ons nog de ribbeblokjes zo te verwisselen dat ze op de goede plaats komen te zitten. Hiervoor kijken we welke permutatie we moeten toepassen, zoeken deze op de 2-vlakspermutatiekaart, en kijken welke operatie we kunnen toepassen om bij Id uit te komen.
De moeilijkst te bereiken stand heeft afstand 6 tot Id.

Binnen 6 keer draaien kunnen we er dus altijd voor zorgen dat de ribbeblokjes op de goede plaats terecht komen.

3.5.4 Samenvatting.

Samenvattend kunnen we zeggen dat we, zonder met het O-vlak te draaien:

- eerst ribbeblokje 6 in maximaal 4 keer draaien korrekt kunnen maken

- vervolgens ervoor kunnen zorgen, in maximaal 25 keer draaien, dat de totale ribbegedraaidheid 0 wordt en ribbeblokje 6 op zijn plaats blijft
- en tenslotte de ribbeblokjes 1 tot en met 5 op de goede plaats zetten zonder dat de gedraaidheid verandert, in maximaal 6 keer draaien

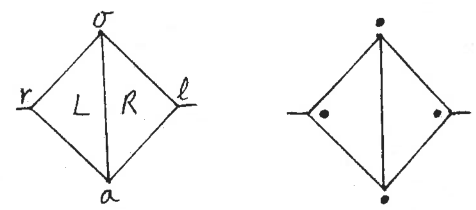
Binnen 35 keer draaien kunnen we er dus altijd voor zorgen dat de ribbeblokjes ongedraaid op de goede plaats zitten.

3.6 Hoekblokjes.

We gaan nu, door slechts aan twee vlakken te draaien, de hoekblokjes achtereenvolgens op hun goede plaats zetten en de juiste gedraaidheid geven, zonder de ribbeblokjes te veranderen. We gebruiken dezelfde twee vlakken als bij de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes. 2-Vlaksoperaties die de ribbeblokjes vastlaten, zijn lussen op die permutatiekaart. Om zinnige effekten te bereiken en om geen elkaar neutraliserende slagen te doen, zoeken we alleen niet-vereenvoudigbare lussen. We gebruiken alleen de korte lussen op de kaart.

Die vinden we als volgt:
Na drie slagen zit je op de kaart altijd op één van de nummers 14 tot en met 29. Na een vierde slag zit je altijd op een hoger nummer.
De enige manier om van één van de nummers 14 tot en met 29 in twee slagen weer terug op een van deze nummers te komen (om daarna in drie slagen de lus af te maken), is via één van de nummers 30 tot en met 37. Dat kan vanuit elk van de nummers 14 tot en met 29 op precies één manier.
Er zijn dus 16 niet-vereenvoudigbare lussen van lengte 8, en er is geen enkele kortere niet-vereenvoudigbare lus.

Deze 16 lussen zijn te verdelen in 8 paren, waarbij een lus en zijn inverse een paar vormen.
Hieronder (in tabel 2) hebben we van één van de twee lussen van elk paar alle slagen opgeschreven. Bovendien hebben we ieder van die lussen een nummer gegeven, en hebben we het effekt van van die lus op de hoekblokjes in draaicykelnotatie erachter geschreven. De gebruikte nummering en definitie is (figuur 10):



figuur 10.

Dat de lussen het hieronder beschreven effekt hebben, is na te gaan op de 4-vlakspermutatiekaart en de 4-vlaksdraaikaart van hoekblokjes (zie appendix B, kaart 2 en 3).

1. RZR'ZRZR'Z..........(o-a+r-)l+.
2. RZ'R'Z'RZ'R'Z'......(l+ar)o-.
3. R'ZRZR'ZRZ..........(orl-)a+.
4. R'Z'RZ'R'Z'RZ'......(o-r+a+)l-.
5. ZRZ'RZRZ'R..........(o+l-a-)r+.
6. ZR'Z'R'ZR'Z'R'......(olr+)a-.
7. Z'RZRZ'RZR..........(lr-a)o+.
8. Z'R'ZR'Z'R'ZR'......(o+a-l+)r-.

tabel 2.

Deze 8 operaties gaan we nu gebruiken om de hoekblokjes korrekt te maken.

3.6.1 Hoekblokjes verwisselen.

De hoekblokjes zitten altijd in een even verwisseling (A4!). Er zijn 12 mogelijke standen (we letten nu niet op eventuele gedraaidheden.) De 8 operaties uit tabel 1 leveren, wat verwisselen betreft, precies de 8 standen die overeenkomen met de 8 3-cykels van de A4. Er rest ons nog de Identiteit (dan zitten alle blokjes al op de goede plaats) en de 3 dubbele 2-cykels van de A4. Door kombinatie van twee 3-cykels is elke dubbele 2-cykel te krijgen.
Een voorbeeld: (oar)(lar) = (or)(al).
Dus als we eerst lus 1 toepassen en daarna lus 2 krijgen we, wat verwisselen betreft, de stand (or)(al).

De lussen hebben alle lengte 8. De dubbele 2-cykels maken we door twee lussen achter elkaar toe te passen en de bijbehorende operaties heeft dus lengte 16.

Het maximale aantal slagen om de hoekblokjes op hun plaats te zetten zonder iets aan de ribbeblokjes te veranderen, is op deze manier dus 16.

3.6.2 Hoekblokjes draaien.

De som van de gedraaidheden van de hoekblokjes is altijd 0mod3.

drie hoekblokjes draaien

Als we lus 1 driemaal achter elkaar toepassen krijgen we de stand:
((o-a+r-)1+)macht3 = o-a-r-.
Alle 4 de hoekblokjes blijven dus op hun plaats, en de blokjes o, a en r draaien linksom (de ribbeblokjes blijven natuurlijk onveranderd op hun plaats.)
De inverse van deze operatie is het rechtsom draaien van de blokjes o, a en r.

Door ook de andere lussen driemaal achter elkaar toe te passen, kunnen we elk drietal hoekblokjes dezelfde kant op draaien.

Rest ons nog het draaien van alle tweetallen en alle viertallen.

twee hoekblokjes draaien

Als we alleen naar de verwisselings-strukturen van de 8 lussen kijken dan zien we dat de lussen 1 en 4, 2 en 7, 3 en 6 en 5 en 8 twee aan twee elkaars inversen zijn. Dus eerst lus 1 en dan lus 4 toepassen, zal de hoekblokjes op hun plaats laten, evenals het toepassen van de lussen in omgekeerde volgorde.
Lus 1 gevolgd door lus 4 heeft als effekt:
(o-a+r-)1+(o-r+a+)1- = a-r+
Lus 4 gevolgd door lus 1 heeft als effekt:
(o-r+a+)1-(o-a+r-)1+ = o+r-
Door inversen te nemen hebben we nu ook operaties met effekt a+r- en o-r+.

We doen hetzelfde met de paren 2 en 7, 3 en 6 en 5 en 8. Op deze manier krijgen we echter **niet** alle tweetallen hoekblokjes. Het tweetal o en a, en het tweetal l en r krijgen we niet.
o en a zijn de hoekblokjes die in de beginstand zowel in het rechter- als in het linkervlak zaten; l en r zijn de hoekblokjes die in de beginstand alléén in het linker- of het rechtervlak zaten. Deze blokjes kunnen we twee aan

twee draaien door middel van konjugeren van een van de bovenjenoemde operaties om twee blokjes te draaien, met een slag met het rechter- of linkervlak.

vier hoekblokjes draaien

Er zijn in totaal 6 viertallen, die te verdelen zijn in drie paren die elkaars inversen zijn:
o+l+a-r- = l+a-.o+r- ((lus2.lus7).(lus4.lus1))
o+l-a+r- = o+l-.a+r- ((lus3.lus6).(lus1.lus4)inverse)
o+l-a-r+ = o+l-.a-r+ ((lus3.lus6).(lus1.lus4))
Deze viertallen kunnen we dus draaien in 32 slagen.

Samenvattend:
Elk drietal kunnen we in 3*8=24 slagen goed draaien;
bijna alle tweetallen in 2*8=16 slagen;
de "moeilijke" tweetallen in 16+2=18 slagen;
en alle viertallen in 2*16=32 slagen.

Het maximum van het aantal slagen waarmee je alle hoekblokjes goed kunt draaien is dus 32.

3.6.3 Samenvatting.

Het totale aantal slagen wat je met bovengenoemde oplossingsmethode maximaal nodig hebt om de hoekblokjes op de goede manier op hun plaats te zetten, zonder iets met de ribbeblokjes te doen, is gelijk aan 16 (verwisselen) + 32 (draaien) = 48.

3.7 Samenvatting.

In paragraaf 3.5 hebben we berekend dat we altijd binnen 35 draaiingen ervoor kunnen zorgen dat alle ribbeblokjes op de goede manier op de goede plaats komen te zitten.
We hebben daar alleen gebruik gemaakt van draaiingen met het A-, R- en L-vlak.

In paragraaf 3.6 hebben we berekend dat we altijd binnen 48 draaiingen ervoor kunnen zorgen dat de hoekblokjes op de goede manier op de goede plaats komen te zitten, door alleen met het R-vlak of het L-vlak te draaien. We hebben dat zó gedaan dat er bij de ribbeblokjes niets veranderde.

Beide resultaten kombinerend komen we tot de konklusie, dat de pyramide altijd binnen 35+48=83 keer draaien goed te krijgen is, zonder gebruik te maken van draaiingen met het O-vlak.

IV ONMOGELIJKE STANDEN.

4.0 Inleiding.

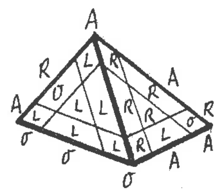
In dit hoofdstuk gaan we de zogenaamde onmogelijke standen bekijken. Dit zijn standen die wel konstrueerbaar zijn, maar die niet vanuit de beginstand door middel van operaties te bereiken zijn.
In tegenstelling tot de voorafgaande hoofdstukken zal hier meer gebruik gemaakt worden van de groepentheorie.
In paragraaf 4.1 wordt een groepshomomorfisme gedefinieerd, dat gaat van de standengroep naar de invariantengroep. Met behulp van dit groepshomomorfisme gaan we in paragraaf 4.2 de standen indelen in 24 klassen. Daar wordt ook aangegeven hoe je kunt zien in welke klasse een bepaalde stand zit en wat je moet doen om een stand die in de ene klasse zit te transformeren naar een stand uit de klasse waarin de beginstand zit.

4.1 Homomorfisme standengroep-invariantengroep.

Voordat we dit homomorfisme gaan maken, zullen we moeten aantonen dat we zowel in de verzameling standen als in de verzameling invarianten, strukturen kunnen aangeven, die ervoor zorgen dat beide verzamelingen opgevat kunnen worden als groepen.

4.1.1 Struktuur van de standengroep.

We beginnen met de verzameling standen, die van nu af St genoemd zal worden. Een element a uit St kunnen we opvatten als een "bewerking", namelijk die bewerking die je op de beginstand moet uitvoeren om stand a te krijgen ("bewerking" niet te verwarren met "operatie" wat een opeenvolging van draaiingen is.) Een voorbeeld kan het begrip "bewerking" wat verduidelijken.
Stel bijvoorbeeld dat stand a de volgende is (ribbeblokje AO zit op plaats AO):



figuur 1.

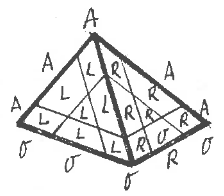
Stand a kun je opvatten als de volgende bewerking:

- het hoekblokje dat op plaats RAO zit, rechtsom draaien.
- de ribbeblokjes die op de plaatsen AL en RO zitten, zodanig verwisselen dat het blokje dat eerst op plaats RO zat op plaats AL terechtkomt met de kleur die eerst in vlak R zat nu in vlak A, én dat het blokje dat eerst op plaats AL zat op plaats RO terechtkomt met de kleur die eerst in vlak L zat nu in vlak R.

Met behulp van bovenstaande is het mogelijk om in St een groepsoperatie te definiëren:

Als a en b twee elementen zijn van St, dan bedoelen we met ab dát element uit St, dat je krijgt als je op stand a de bewerking uitvoert die hoort bij stand b.
Dit is hetzelfde als op de beginstand eerst bewerking a en daarna bewerking b toepassen.

Als stand a bijvoorbeeld weer dezelfde is als in figuur 1, en als stand b de volgende is (blokje AO zit op plaats AO):

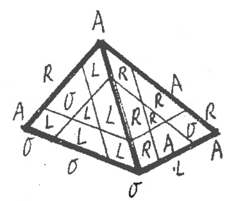


figuur 2.

dan is de bewerking die hoort bij stand b:

- het ribbeblokje dat op plaats OR zit draaien.

Het element ab is dan de volgende stand (blokje AO zit nog steeds op plaats AO):



figuur 3.

We hebben nu dus een groepsoperatie in St gedefinieerd: Aan elk geordend tweetal elementen van St hebben we een derde element van St toegevoegd. We noemen deze groepsoperatie "produkt". Het is duidelijk dat dat produkt associatief is, dat er een neutraal element in St bestaat (de beginstand), en dat iedere stand een inverse stand heeft. De verzameling St kunnen we nu dus als een groep beschouwen. We zullen St de standengroep noemen.

4.1.2 Struktuur van de invariantengroep.

Iets soortgelijks gaan we doen met de verzameling van invarianten.

In hoofdstuk 2 hebben we gezien dat er 4 invarianten zijn:

- het teken van de ribbeblokjes-permutatie (+ of -)
- het teken van de hoekblokjes-permutatie (+ of -)
- de totale ribbegedraaidheid (0 of 1)
- de totale hoekgedraaidheid (0,1 of 2)

Bij iedere van deze invarianten is er een verzameling waarvan die invariant een element moet zijn. In die verzameling gaan we eerst afzonderlijk groepsstrukturen aangeven, zodat we 4 groepen krijgen. Daarna nemen we het direkte produkt van deze groepen. Dit direkte produkt is dan weer een groep. We zullen deze groep de invariantengroep noemen en we zullen ze aangeven met I.

- We beginnen met de eerste variant: het teken van de ribbeblokjes-permutatie.

De bijbehorende verzameling is {+,-}. Omdat we later een groepshomomorfisme van St naar I willen maken, is het verstandig om de groepsstruktuur zo te maken dat het homomorfisme voor de hand ligt.
We weten dat, als we twee even permutaties (dat wil zeggen dat het teken ervan + is) achter elkaar toepassen, we weer een even permutatie krijgen. Daarom kiezen we de + als eenheidselement. Hiermee is de groep volledig gedefinieerd, omdat er, op isomorfie na, maar één groep is met 2 elementen (namelijk Z2).

- Voor de tweede invariant, het teken van de hoekblokjes-permutatie, geldt een analoge redenering. We kiezen dus weer de + als eenheidselement.

- Bij de invariant "totale ribbegedraaidheid", moeten we bedenken dat, als we 2 standen (dat wil zeggen 2 elementen uit St) met totale ribbegedraaidheid 0 met elkaar vermenigvuldigen, we weer een stand krijgen met totale ribbegedraaidheid 0. Daarom kiezen we hier de 0 als eenheidselement. We krijgen dan de optelgroep van de Z2.

- Op dezelfde manier komt het bepalen van de totale hoekgedraaidheid van het produkt van 2 standen neer op het optellen van de totale hoekgedraaidheid van de afzonderlijke standen. We kunnen deze groep dus beschouwen als de optelgroep van Z3, waarbij we de 0 met $\underline{0}$, de 1 met $\underline{1}$ en de 2 met $\underline{2}$ identificeren ($\underline{a}$ is de klasse van a).

De invarianten groep van I is dus gelijk aan {+,-}*{+,-}*{0,1}*{0,1,2} met de hierboven genoemde operaties.

4.1.3 Definitie.

Het groepshomomorfisme van St naar I definieren we nu op een voor de hand liggende manier:
Zij x een element uit St, dan is $f(x)=(x1,x2,x3,x4)$ met

- x1 het teken van de ribbeblokjes-permutatie van x
- x2 het teken van de hoekblokjes-permutatie van x
- x3 de totale ribbegedraaidheid van x
- x4 de totale hoekjedraaidheid van x

Dit is een groepshomomorfisme (dat wil zeggen $f(xy)=f(x)*f(y)$ voor alle elementen x en y uit St), omdat we de groepsstruktuur zo gekozen hebben.

4.2 Klassifikatie van standen.

De kern van het in de vorige paragraaf gedefinieerde groepshomomorfisme is een normaaldeler die we N zullen noemen. N bestaat uit alle standen die door f op het eenheidselement van I (dat is het element (+,+,0,0)) afgebeeld worden. In hoofdstuk 2 en 3 hebben we gezien dat dat precies alle vanuit de beginstand door middel van draaiingen te bereiken standen zijn.
Omdat f surjektief is, weten we dat het volledig origineel van een **willekeurig** element van I, een nevenklasse van N is. Als we nu van ieder van de 24 elementen van I het volledig origineel bepalen, hebben we St opgedeeld in 24 klassen, allen nevenklassen van N en dus allen bestaande uit evenveel elementen.

We gaan nu bewijzen dat, als we een stand hebben die in een bepaalde klasse zit, we iedere stand uit die klasse kunnen bereiken door middel van draaiingen.
Zij dus a een element uit St en K de klasse waar a in zit. We kunnen K dan schrijven als aN, waarmee we bedoelen {an|n element van N}. Dit wil zeggen dat voor ieder element x uit de nevenklasse er een n uit N bestaat zodanig dat, als we op stand a de bewerking uitvoeren die hoort bij n, we dat element x krijgen. Omdat N de verzameling is van alle operaties (reeksen van draaiingen), kunnen we dus ieder element van K krijgen door op stand a een reeks van draaiingen toe te passen.
Hiermee is het bovenstaande bewezen.

Met behulp van f is het nu gemakkelijk in te zien of een willekeurige stand x, door middel van draaiingen, over te voeren is in de beginstand, en zo nee, wat er veranderd moet

worden.
Je hoeft alleen maar naar het beeld van x onder f te kijken. Is dat beeld het element (+,+,0,0), dan is x inderdaad over te voeren in de beginstand. Is dat beeld een ander element van I, dan gaan we plaatsgewijs vergelijken:

- Staat er op de eerste plaats een minteken, dat wil zeggen zitten de ribbeblokjes in een oneven permutatie, dan wisselen we willekeurig twee ribbeblokjes van plaats, zonder de gedraaidheid van die blokjes te veranderen.
- Staat er op de tweede plaats een minteken, dan wisselen we willekeurig twee hoekblokjes van plaats. Ook weer zonder de gedraaidheid ervan te veranderen.
- Staat er op de derde plaats een 1 dan draaien we een willekeurig ribbeblokje om.
- Staat er op de vierde plaats een 1 of 2, dan draaien we een willekeurig hoekblokje linksom respektievelijk rechtsom.

Op deze manier heb je ervoor gezorgd, dat de stand die je dan hebt in N zit, en dus door draaiingen over te voeren is in de beginstand.

V DE ORDE VAN EEN OPERATIE.

5.0 Inleiding.

We gaan in dit hoofdstuk onder andere bekijken, wat mogelijke ordes zijn voor operaties. Daarbij maken we gebruik van de in hoofdstuk 3 ingevoerde draaicykel-notatie. Met behulp van de draaicykel-struktuur van een operatie zullen we alle mogelijke ordes bepalen. Tevens berekenen we voor elke orde het aantal verschillende, vanuit de beginstand te bereiken, standen met die orde. Tenslotte geven we een voorbeeld van een stand met de grootst mogelijke orde.

5.1 Alle mogelijke ordes.

We zullen eerst afzonderlijk de mogelijke ordes van operaties die alléén op hoekblokjes werken, en van operaties die alléén op ribbeblokjes werken, bekijken. Daarna zullen we de resultaten kombineren, om zodoende alle mogelijke ordes te vinden.

5.1.1 Operaties die werken op hoekblokjes.

Zoals gezegd, beginnen we operaties te bekijken, die alléén op de 4 hoekblokjes werken.
Als we niet naar draaiingen kijken, zijn er 3 klassen van mogelijkheden.

- de identiteit (orde 1)

- twee disjunkte 2-cykels (orde 2)

- een 3-cykel (orde 3)

Andere verwisselingen zoals 4-cykels en 2-cykels, zijn oneven permutaties. Omdat draaiingen altijd even permutaties zijn, en omdat operaties opgebouwd zijn uit draaiingen, kunnen oneven verwisselingen niet voorkomen.

Wanneer we de draaiingen erbij betrekken, komen er meer mogelijkheden. Bijvoorbeeld o+l+a+ heeft, geschreven als gewone cykel, de orde 1 (de identiteit), maar geschreven als draaicykel, de orde 3.
Ook (o+l)(a-r) heeft niet orde 2 maar orde 6. Dit kun je zien door het element tot de tweede macht te verheffen:

[(o+l)(a-r)]macht2 = o+l+a-r-
en deze operatie heeft orde 3. In totaal krijg je dus als orde 2*3=6. Zoals je ziet is het mogelijk dat de oorspronkelijke orde met 3 vermenigvuldigd wordt, als je de draaiingen erbij betrekt.

Algemeen gaan we als volgt te werk:
Bepaal eerst de orde van de ongedraaide cykelstruktuur; deze noemen we n.
Verhef de operatie tot de macht n. Het resultaat is dan een operatie waarbij er niets verwisseld wordt. Het kan echter wel zijn dat er iets gedraaid wordt.
Als we zo'n operatie hebben, die alleen op hoekblokjes werkt, en de n-de macht is niet gelijk aan de Identiteit, dan is de orde 3n.
Voor operaties die alleen op de hoekblokjes werken zijn de mogelijke ordes dan: 1, 2, 3, 6 en 9. Voorbeelden van draaicykels van orde 1,2,3 en 6 hebben we zojuist gegeven. Een voorbeeld van een draaicykel van orde 9 is te vinden in paragraaf 3.2 ((o+la)r-).

5.1.2 Operaties die werken op ribbeblokjes.

Op dezelfde manier pakken we nu de operaties aan die alleen op de 6 ribbeblokjes werken.
Als we niet naar draaiingen kijken zijn er 5 klassen van mogelijkheden:

- de identiteit (orde 1)

- twee disjunkte 2-cykels (orde 2)

- een 3-cykel of twee disjunkte 3-cykels (orde 3)

- een 4-cykel en een 2-cykel die onderling disjunkt zijn (orde 4)

- een 5-cykel (orde 5)

Andere verwisselingen zoals 6-cykels zijn oneven en dus onmogelijk.
Wanneer we de draaiingen erbij betrekken, kan elk van de hierboven genoemde ordes eventueel verdubbeld worden, omdat een ribbeblokje maar op één manier gedraaid kan zitten in tegenstelling tot een hoekblokje. We zullen van elke klasse een voorbeeld geven waarin dat het geval is:

- 1*2* heeft orde 2

- (1*2)(3*4) heeft orde 4

- (1*23)4* heeft orde 6

- (1*234)(5*6) heeft orde 8

- (1*2345)6* heeft orde 10

Voor operaties die alleen op de ribbeblokjes werken zijn de mogelijke ordes dus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 en 10.

5.1.3 Kombineren en bepalen van ordes.

Nu resten ons nog de operaties die zowel op de ribbeblokjes als op de hoekblokjes werken. Die kunnen we uiteraard beschouwen als een kombinatie van een operatie die alleen op hoekblokjes, en een operatie die alleen op ribbeblokjes werkt.

Stel we hebben een operatie van de eerste soort met orde p, en een van de tweede soort met orde q (Dan is p een van de getallen 1,2,3,6 of 9, en q is een van de getallen 1,2,3,4,5,6,8 of 10.) De gekombineerde operatie noemen we X. Het is duidelijk dat de operatie Xmachtp de identiteit is wat de hoekblokjes betreft, en dat de operatie Xmachtq de identiteit is wat de ribbeblokjes betreft. Het kleinste getal m waarvoor Xmachtm, zowel wat hoekblokjes betreft als wat ribbeblokjes betreft, de identiteit is, is dus een getal dat zowel een veelvoud is van p als van q. De orde van X is dus het kleinste gemene veelvoud van p en q.

We hadden 5 verschillende mogelijke ordes voor de operaties op de hoekblokjes en 8 verschillende mogelijke ordes voor de ribbeblokjes. We moeten dus 40 keer een kleinste gemene veelvoud berekenen om alle mogelijke ordes te vinden. We geven de uitkomsten in een tabel weer (tabel 1). In de i-de rij en de j-de kolom staat het kleinste gemene veelvoud van het getal dat voor de i-de rij staat en het getal dat boven de j-de kolom staat.

	1	2	3	4	5	6	8	10
1	1	2	3	4	5	6	8	10
2	2	2	6	4	10	6	8	10
3	3	6	3	12	15	6	24	30
6	6	6	6	12	30	6	24	30
9	9	18	9	36	45	18	72	90

tabel 1.

Iedere operatie heeft dus één van de volgende ordes: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,24,30,36,45,72 of 90. In totaal zijn er dus 18 verschillende mogelijke ordes.

5.2 Aantal verschillende standen bij iedere orde.

Als we bijvoorbeeld het aantal verschillende standen (1) van orde 4 willen berekenen, dan kijken we eerst in tabel 1 uit paragraaf 5.1 hoe een stand van orde 4 tot stand kan komen.
We zien dat dit op 2 manieren kan: een hoekblokjesstand van orde 1 gekombineerd met een ribbeblokjesstand van orde 4 óf een hoekblokjesstand van orde 2 gekombineerd met een ribbeblokjesstand van orde 4.
Het aantal verschillende standen van orde 4 is dan:
(aantal verschillende hoekblokjesstanden van orde 1 maal
aantal verschillende ribbeblokjesstanden van orde 4) +
(aantal verschillende hoekblokjesstanden van orde 2 maal
aantal verschillende ribbeblokjesstanden van orde 4).
Op deze manier kunnen we voor elke orde te werk gaan. Als we eenmaal de aantallen van de verschillende hoekblokjes- en ribbeblokjesstanden kennen, is het bepalen van het aantal verschillende standen bij iedere orde eenvoudig rekenwerk.

---

(1) In deze paragraaf bedoelen we met standen alleen die standen die vanuit de beginstand door middel van draaien te bereiken zijn. Dit is een ondergroep van St (Zie hoofdstuk 4).

5.2.1 Aantal verschillende hoekblokjesstanden.

We gaan eerst het aantal verschillende hoekblokjesstanden bij elke orde uitrekenen. Er zijn 5 mogelijke ordes: 1,2,3,6 en 9.

5.2.1.1 Aantal cykels zonder gedraaidheid.

We letten eerst niet op gedraaidheid en berekenen het aantal cykels bij de ordes 1,2 of 3. Daarna bekijken we bij hoeveel draaicykels de orde verdrievoudigd moet worden. Eerst zonder draaien:

orde 1 (identiteit)
Er is maar een identiteit, dus het aantal verschillende standen is 1.

orde 2 (2 disjunkte 2-cykels)
De volgorde van het tweetal 2-cykels doet er niet toe, en binnen zo'n 2-cykel doet de volgorde van de letters er niet toe. Als je de eerste 2-cykel gekozen hebt, is er voor de tweede nog maar één mogelijkheid. Je hebt dus de kombinaties: (lr)(..), (la)(..) en (lo)(..). Het aantal verschillende standen is hier dus 3.

orde 3 (één 3-cykel)
Voor de eerste letter in de 3-cykel zijn er 4 mogelijkheden, voor de tweede letter 3 en voor de derde letter 2. In totaal zijn er dus 4*3*2=24 mogelijkheden. Elke cykel komt dan echter 3 keer voor ((lra), (ral) en (alr) zijn dezelfde cykel.) Er zijn dus 24:3=8 verschillende standen van orde 3.

Het totaal is 1+3+8=12. Dit is het aantal even verwisselingen van 4 elementen, zoals we in paragraaf 2.3 al gezien hadden.

In hoofdstuk 2 hebben we ook gekonkludeerd dat er bij elke verwisseling van de hoekblokjes 3macht3=27 mogelijkheden zijn om een gedraaidheid erin te brengen. We zijn nu geïnteresseerd welke daarvan de oorspronkelijke orde behouden, en bij welke we de orde moeten verdrievoudigen.

We hebben al gezien dat (o+l-a) orde 3 heeft, en dat (o+la)r- orde 9 heeft. Het essentiele verschil tussen de twee draaicykels is dat bij de eerste de som van de gedraaidheden binnen de 3-cykel (2) nul is en dat deze bij

---

(2) Met de totale gedraaidheid binnen een cykel bedoelen we de som van de gedraaidheden die de tekens bij de letters of cijfers binnen de cykel

de tweede gelijk is aan +1.

Algemeen geldt (ook voor ribbeblokjes):
Zij dc een draaicykel van lengte n dan geldt:

De orde van dc is gelijk aan n dan en slechts dan als de totale gedraaidheid binnen een cykel gelijk is aan nul.

Het bewijs van deze bewering is gemakkelijk als je weet hoe dc tot de macht n eruit ziet.
Stel dat dc = (x1\$1x2\$2.....xn\$n) (3) Laten we eerst eens kijken wat er met x1 gebeurt als we dc tot de macht n toepassen. Als we dc toepassen gaat x1 naar plaats x2 en x1 krijgt een gedraaidheid \$1. Als we dc nog een keer toepassen gaat x1 van plaats x2 naar plaats x3, en krijgt een extra gedraaidheid van \$2. De gedraaidheid van x1 is dan \$1+\$2. Dit gaat zo door. Als we dc n keer hebben toegepast, is x1 weer op zijn eigen plaats terug, en heeft een totale gedraaidheid van \$1+\$2+......+\$n. Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor x2 tot en met xn. Omdat \$1+\$2+.....+\$n de totale gedraaidheid binnen de cykel is, is hiermee de bewering bewezen.

Met behulp van deze bewering kunnen we nu gemakkelijk de gezochte aantallen berekenen.

5.2.1.2 Aantal cykels met gedraaidheid.

We beginnen met de 27*12 standen die alleen op hoekblokjes werken. In het volgende stukje bedoelen we met standen, standen die alleen op hoekblokjes werken.

orde 1 en orde 3
Er zijn 27 standen die uit 1-cykels bestaan. Eén daarvan (de identiteit) heeft orde 1 (binnen elke 1-cykel moet de gedraaidheid nul zijn, dus er mag niets draaien) en de overige 26 hebben orde 3.
We hebben dus al: 1 stand van orde 1 en 26 van orde 3.

---

voorstellen. Die som van de gedraaidheden nemen we dan bij ribbeblokjes modulo 2, en bij hoekblokjes modulo 3.
(3) Deze wat onoverzichtelijke notatie is het gevolg van de beperkte mogelijkheden van terminal en printer. De xi stellen cijfers (ribbeblokjes) of letters (hoekblokjes) voor, en de \$i stellen hun gedraaidheden voor (* of 0 voor ribbeblokjes, -, + of 0 voor hoekblokjes.)

orde 2 en orde 6
Er zijn 27*3=81 standen die uit 2 disjunkte 2-cykels bestaan. Een 2-cykel van orde 2 kan er op 3 manieren uitzien: (..), (.+.-) en (.-.+). Voor de 2 disjunkte 2-cykels zijn er dus 3*3=9 manieren bij elke gewone cykelstruktuur.
In totaal zijn er dus 9*3=27 standen met orde 2. De rest, namelijk 18*3=54, zijn standen van orde 6.

orde 3 en orde 9
Er zijn 27*8=216 standen die bestaan uit een 3-cykel (en een 1-cykel). Om binnen een 3-cykel een totale gedraaidheid nul te maken, kun je voor de eerste twee letters een willekeurige gedraaidheid kiezen. De derde gedraaidheid moet je dan zodanig kiezen dat de totale gedraaidheid nul is. Er zijn dus bij iedere gewone 3-cykel 3*3=9 mogelijkheden om de draaicykel orde 3 te geven.
Het aantal mogelijke 3-draaicykels van orde 3 is dus gelijk aan 9*8=72. De rest, namelijk 18*8=144, zijn standen van orde 9.

Samenvattend kunnen we nu zeggen dat het aantal verschillende hoekblokjesstanden van
orde 1 gelijk is aan 1
orde 2 gelijk is aan 27
orde 3 gelijk is aan 26+72=98
orde 6 gelijk is aan 54
orde 9 gelijk is aan 144
In totaal zijn er 27*12=324 hoekblokjesstanden.

5.2.2 Aantal verschillende ribbeblokjesstanden.

Voor standen die alleen op ribbeblokjes werken, gaan we hetzelfde doen (van nu af bedoelen we met standen, standen die alleen op ribbeblokjes werken.)

5.2.2.1 Aantal cykels zonder gedraaidheid.

Er zijn 8 mogelijke ordes: 1,2,3,4,5,6,8 en 10.
We letten eerst niet op gedraaidheden en berekenen het aantal verschillende gewone cykels van bovengenoemde ordes. Daarna bekijken we bij hoeveel draaicykels we de orde moeten verdubbelen.
Er zijn (we letten niet op gedraaidheden) 6!:2=360 verschillende even verwisselingen. Bij elke orde tellen we het bijbehorende aantal verschillende even verwisselingen.

orde 1 (identiteit)
Er is maar één identiteit, dus het aantal verschillende verwisselingen is 1.

orde 2 (2 disjunkte 2-cykels)
De volgorde binnen elke cykel doet er weer niet toe. Voor de eerste cykel zijn er 6over2=15 mogelijkheden. Bij iedere keuze van de eerste cykel zijn er 4over2=6 mogelijkheden. In totaal zijn er dus 6*15=90 mogelijkheden. Maar dan komt iedere permutatie 2 keer voor ((12)(34) is hetzelfde als (34)(12)).
Het aantal verschillende verwisselingen van orde 2 is dus gelijk aan 45.

orde 3 (1 3-cykel of 2 disjunkte 3-cykels)

- Bij één 3-cykel moet je een drietal uit 6 kiezen. Dit kan op 6over3=20 manieren. Elk drietal kan op 6 verschillende manieren in een rijtje gezet worden. Bij drie van zulke rijtjes hoort slechts één permutatie, dus bij één zo'n drietal horen 2 permutaties. Er zijn dus in totaal 40 verschillende permutaties van orde 3, die bestaan uit één 3-cykel.

- Bij de twee disjunkte 3-cykels kiezen we eerst de eerste 3-cykel; dit kan op 40 verschillende manieren. Uit het overige drietal kunnen we op 2 verschillende manieren een 3-cykel vormen. We hebben dus 2*40=80 mogelijkheden, maar dan komt elk tweetal 3-cykels 2 keer voor ((123)(456) is dezelfde permutatie als (456)(123)), dus we moeten dat aantal weer door twee delen.
Ook voor 2 disjunkte 3-cykels zijn er dus 40 mogelijkheden.

In totaal zijn er 80 verschillende verwisselingen van orde 3.

orde 4 (4-cykel en daarmee disjunkte 2-cykel)
Als we de 4-cykel gekozen hebben ligt de 2-cykel vast. Een rijtje van 4 kunnen we op 6*5*4*3 manieren kiezen uit een verzameling van 6. Elke 4-cykel komt dan echter 4 keer voor ((1234),(2341),(3412) en (4123) zijn hetzelfde.) Er zijn dus 6*5*4*3:4=90 verwisselingen van orde 4.

orde 5 (1 5-cykel)
Er zijn 6*5*4*3*2:5=144 verschillende verwisselingen van orde 5.

5.2.2.2 Aantal cykels met gedraaidheid.

Bij elke verwisseling van de ribbeblokjes zijn er 2macht5=32 mogelijkheden om er een gedraaidheid in te brengen. In totaal zijn er dus 32*360=11.520 standen die op de ribbeblokjes werken.

We gaan nu bij elke orde kijken hoeveel van de mogelijke standen dezelfde orde zouden hebben als bij de bijbehorende verwisselingen ook blokjes zouden mogen draaien. Zoals we gezien hebben moet daarvoor de totale gedraaidheid binnen de cykel gelijk zijn aan nul.

orde 1 en orde 2

Er zijn 32 standen die, evenals de identiteit, bestaan uit 1-cykels. Eén daarvan heeft orde 1 (binnen iedere 1-cykel moet de gedraaidheid nul zijn, dus er mag niets draaien), en de overige 31 hebben orde 2.

orde 2 en orde 4

Er zijn 32*15 standen die bestaan uit twee disjunkte 2-cykels (en twee 1-cykels).
Een 2-cykel heeft alleen orde 2 als er niets draait óf als beide elementen van de cykel draaien. Voor de 2-cykels zijn er dus bij elk tweetal gewone cykels 2*2=4 tweetallen draaicykels met orde 2. Van de elementen waaruit de beide 2-cykels bestaan, zullen er dus 0,2 of 4 draaien. Omdat in totaal het aantal elementen dat draait even moet zijn, zullen de overige 2 elementen (beide 1-cykels) allebei draaien of allebei niet draaien. Dit vermenigvuldigt het aantal mogelijkheden met een faktor 2.
In totaal vinden we dus bij elk tweetal gewone disjunkte 2-cykels 4*2=8 standen die orde 2 hebben.
Van de 32*45 standen die we beschouwden zijn er dus
8*45=360 standen met orde 2
en 24*45=1080 standen met orde 4.

orde 3 en orde 6

Er zijn 32*40 standen die bestaan uit één 3-cykel (en drie 1-cykels). Een draai-3-cykel heeft alleen orde 3 als de som van de gedraaidheden binnen de cykel nul is, dat wil zeggen dat er niets gedraaid is óf dat er 2 blokjes gedraaid zijn (binnen de cykel). 2 Blokjes draaien kan op 2over3=3 manieren; niets draaien op 1 manier. Dit levert in totaal 4 manieren op per gewone 3-cykel. De drie 1-cykels hebben óf orde 1 óf orde 2, en omdat we hier als totale orde 3 willen hebben, moet die orde persé 1 zijn.
Dus van de 32*40 standen zijn er
4*40=160 standen met orde 3
en 28*40=1120 standen met orde 6.

orde 3 en orde 6

Er zijn 32*10 standen die bestaan uit twee 3-cykels. Bij elke gewone 3-cykel zijn er 4 manieren om er een draai-3-cykel van te maken zódanig dat de orde 3 blijft. Bij

elk tweetal gewone 3-cykels zijn er dus 4*4=16 manieren om er een tweetal draai-3-cykels van te maken met orde 3.
Van de 32*40 standen die bestaan uit een tweetal draai-3-cykels zijn er dus
16*40=640 standen met orde 3
en 16*40=640 standen met orde 6.

orde 4 en orde 8

Er zijn 32*90 standen die bestaan uit een 4-cykel en een 2-cykel. Om binnen een 4-cykel totale gedraaidheid nul te maken, kunnen we draaiingen van de eerste drie blokjes willekeurig kiezen, en die van het vierde blokje zodanig dat de totale gedraaidheid nul wordt. Er zijn dus bij elke gewone 4-cykel 2*2*2=8 manieren om er een draai-4-cykel van orde 4 van te maken.
Het totale aantal draaiingen binnen de 4-cykel en de 2-cykel moet even zijn, en omdat we een even aantal draaiingen binnen de 4-cykel hebben, hebben we voor de 2-cykel nog de keuze uit niets draaien of allebei de blokjes draaien.
In totaal geeft dat 8*2=16 mogelijke draaicykels die bestaan uit een draai-4-cykel en een draai-2-cykel.
Van de 32*90 standen die we hier beschouwden zijn er dus
16*90=1440 standen met orde 4
en 16*90=1440 standen met orde 8.

orde 5 en orde 10

Er zijn 32*144 standen die bestaan uit een 5-cykel (en een 1-cykel). Bij iedere gewone 5-cykel moeten we een even aantal blokjes laten draaien om de bijbehorende draai-5-cykel orde 5 te geven. Er zijn 2macht4=16 manieren om dat te doen. De 1-cykel moet altijd ongedraaid zijn.
Van de 32*144 standen zijn er dus
16*144=2304 standen met orde 5
en 16*144=2304 standen met orde 10.

Samenvattend kunnen we zeggen dat het aantal verschillende ribbebblokjes-standen van
orde 1 gelijk is aan 1
orde 2 gelijk is aan 31+360=391
orde 3 gelijk is aan 160+640=800
orde 4 gelijk is aan 1080+1440=2520
orde 5 gelijk is aan 2304
orde 6 gelijk is aan 1120+640=1760
orde 8 gelijk is aan 1440
orde 10 gelijk is aan 2304.
In totaal zijn er 11.520 standen die alleen op ribbeblokjes werken.

5.2.3 Aantal standen bij iedere orde.

Met behulp van tabel 1 is het nu gemakkelijk bij elke orde het aantal verschillende standen uit te rekenen. We zullen alleen het voorbeeld aan het begin van paragraaf 5.2 uitwerken. Van de overigen zullen we alleen de uitkomsten geven en het percentage van het totaal aantal standen.
Het aantal verschillende standen van orde 4 is:
(het aantal hoekblokjesstanden van orde 1 keer het aantal ribbeblokjesstanden van orde 4) plus
(het aantal hoekblokjesstanden van orde 2 keer het aantal ribbeblokjesstanden van orde 4).
Dit aantal is dus gelijk aan 1*2520+27*2520=28*2520=70.560.
Het percentage van het totaal is: 70.560:3.732.480*100%=1.9%.
In tabel 2 is voor iedere mogelijke orde aangegeven hoeveel verschillende standen er zijn met die orde en welk percentage dat is van het totaal aantal verschillende standen.

Een voorbeeld van een stand met de grootst mogelijke orde (orde 90) heeft, wat hoekblokjes betreft, orde 9, en wat ribbeblokjes betreft orde 10 (zie tabel 1).
Een hoekblokjes-stand van orde 9 is bijvoorbeeld de stand (o+la)r- (zie par 3.2).
Een ribbeblokjes-stand van orde 10 kun je vinden in paragraaf 5.1.2: (1*2345)6*. Een stand van orde 90 is dus bijvoorbeeld de stand (o+la)r-.(1*2345)6*.

TABEL 2.

Orde van de stand	Aantal verschillende standen van die orde	Percentage van het totale aantal verschillende standen
1	1	.00003 %
2	10.975	.3 %
3	79.298	2.1 %
4	70.560	1.9 %
5	2.304	.06 %
6	441.036	11.8 %
8	40.320	1.1 %
9	115.344	3.1 %
10	126.720	3.4 %
12	383.040	10.3 %
15	225.792	6.0 %
18	309.744	8.3 %
24	218.880	5.9 %
30	474.624	12.7 %
36	362.880	9.7 %
45	331.776	8.9 %
72	207.360	5.6 %
90	331.776	8.9 %
TOTAAL:	3.732.480	100.06 %

VI DIAMETER, PERMUTATIEKAARTEN EN DRAAIKAARTEN.

6.0 Inleiding.

Een van de interessantste dingen die je jezelf kunt afvragen met betrekking tot de pyramide is: wat is het minimum aantal keren draaien, waarbinnen hij altijd goed te krijgen is, ongeacht met welke stand je begint? Het is daarom zo'n interessante vraag, omdat hij bijna als vanzelf naar voren komt, terwijl hij toch moeilijk of niet te beantwoorden is.
Dat minimum aantal keren draaien is precies de diameter van de standengroep (St) van de pyramide met als voortbrengers de 8 elementen die korresponderen met het draaien met de 4 vlakken.
In paragraaf 6.1 zullen we slechts een afschatting geven van de diameter.

Een manier om de diameter precies te bepalen, zou de volgende kunnen zijn:

- geef de beginstand nummer 0
- bepaal de standen die je met één keer draaien vanuit stand 0 kunt bereiken, en geef die nummer 1
- bepaal alle standen die je met één keer draaien vanuit de standen met nummer 1 kunt bereiken, en geef diegene die je nog niet genummerd hebt, nummer 2
- ga zo door met nummeren tot er geen nieuwe standen meer bijkomen

Het hoogste nummer geeft dan de diameter van St aan. De grote moeilijkheid hierbij is de praktische uitvoerbaarheid. Er zijn 3.732.480 verschillende standen, zodat je dit werk nooit af zult krijgen. In paragraaf 6.2 en 6.3 gaan we daarom niet de hele St bekijken, maar 3 faktorgroepen. Daarvan bepalen we volgens bovengenoemde principe de diameter, gebruik makend van zogenaamde permutatie-kaarten (paragraaf 2) en draai-kaarten (paragraaf 3).

6.1 Afschatting van de diameter van St.

Voor een bovengrens van de diameter verwijzen we naar hoofdstuk 3, waarin de oplossingsmethode van de pyramide gegeven wordt. Daar wordt berekend dat, met die

oplossingsmethode, de pyramide altijd binnen 83 keer draaien in de beginstand terug te krijgen is.

Het bepalen van een ondergrens vergt nog wat rekenwerk: Het aantal verschillende elementen van St die we kunnen krijgen door hoogstens s keer te draaien, is nooit groter dan het aantal verschillende operaties van lengte kleiner dan, of gelijk aan s. (N.B. verschillende operaties leveren soms dezelfde stand.)

- Als s=0 is er slechts één operatie mogelijk: de identieke.
- Als s=1 hebben we de operaties Id en R, R', L, L', A, A', O en O'. Dat zijn er 1+8=9.
- Als s=2 komen er nog 8*6 operaties van lengte 2 bij. (Die 6 volgt uit het feit dat we niet 2 keer achterelkaar met hetzelfde vlak draaien.) Het totaal bij s=2 is dus 1+8+8*6=57.
- We kunnen zo doorgaan.

Er zijn 1+8+8*6+8*6macht2+......+8*6macht7=2.687.385 verschillende operaties als s=8. We hebben dus hoogstens 2.687.385 verschillende standen gehad. St heeft echter 3.732.480 elementen, dus er zijn nog elementen van St die we binnen 8 keer draaien niet kunnen bereiken. De diameter is dus minstens 9.

6.2 Permutatiekaarten.

In hoofdstuk 3 hebben we al uitvoerig de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes besproken. We zouden deze kaart uit kunnen breiden door toe te laten dat je niet alleen met het L-vlak en het R-vlak mag draaien, maar ook met de andere twee. We krijgen dan te maken met de Cayley graph van de A6 (het zesde ribbeblokje kan nu ook van plaats verwisselen!) met als voortbrengers (123), (132), (345), (354), (146), (164), (256) en (265). Het aantal verbindingslijnen zou dan 12 keer zoveel zijn (6 keer zoveel punten, en vanuit ieder punt vertrekken 8 in plaats van 4 lijnen) als dat op de kaart in hoofdstuk 3, met als gevolg dat je uit de kaart niets meer kunt aflezen. We hebben de hele permutatiekaart van ribbeblokjes dan ook niet getekend.

Wat we wel getekend hebben, is de volledige permutatiekaart van hoekblokjes (zie appendix B, kaart 2). Omdat we 4 hoekblokjes hebben, en omdat we alleen te maken hebben met even verwisselingen, is de bijbehorende groep gelijk aan de A4. Vandaar dat er 12 "kleine pyramidetjes" op de kaart getekend zijn, ieder korresponderend met een verwisseling van hoekblokjes. De gekleurde lijnen geven weer aan hoe je van de ene stand naar de andere kunt komen. Zwart komt overeen met het R-vlak, rood met het L-vlak, groen met het A-vlak en blauw met het O-vlak. Begint de lijn gestippeld bij een stand, dan moet je met het door de kleur aangegeven vlak linksom draaien om bij de volgende stand te komen; begint de lijn doorgetrokken dan moet je rechtsom draaien.

We hebben de standen gerangschikt in de vorm van een kubus, omdat de symmetrie van de kaart zo het duidelijkst naar voren komt.

De meest linkse stand is de identiteit. Deze vormt met de overige drie standen die niet als hoekpunt van de kubus fungeren, een groep: de zogenaamde viergroep van Klein: {Id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)}
De hoekpunten van de kubus representeren alle 3-cykels van de A4. Vanuit ieder element van de viergroep van Klein kun je door middel van één draaiing, bij ieder willekeurig hoekpunt van de kubus komen. We hebben deze verbindingslijnen niet allemaal getekend, omdat anders de tekening onoverzichtelijk wordt. Toch kunnen we vrij gemakkelijk aflezen waar deze verbindingslijnen moeten lopen.

Nemen we als voorbeeld de meest linkse stand: Id. We zien hier slechts 2 lijnen vertrekken, namelijk de 2 groene. De verbindingslijn van de 2 hoekpunten waar deze 2 lijnen uitkomen, is natuurlijk ook groen. Als we met zwart zouden vertrekken, zouden we ook bij 2 hoekpunten uitkomen, en die zouden verbonden zijn met een zwarte lijn. We hebben de standen zó gerangschikt, dat de verbindingslijnen van een tweetal hoekpunten waar we vanuit Id kunnen komen door met hetzelfde vlak linksom dan wel rechtsom te draaien, alle 4 evenwijdig lopen.

We kunnen dus uit de tekening aflezen dat, als we met het R-vlak draaien (dat is met zwart vanuit Id vertrekken), we uitkomen bij het rechter-boven-voor- of rechter-boven-achter-hoekpunt. Aan de verbindingslijn kunnen we dan ook zien in welk van de 2 we uitkomen als we met zwart-gestippeld vertrekken (namelijk het hoekpunt waar de verbindingslijn gestippeld begint.)

Op dezelfde manier kunnen we zien waar we terechtkomen als we vanuit de onderste stand ((12)(34)) of vanuit de rechterstand ((13)(24)) vertrekken.

De tweetallen punten waar we vanuit de bovenste stand ((14)(23)) kunnen komen door het draaien met één vlak, zijn

ook verbonden door lijnen. Deze vormen de 4 lichaamsdiagonalen van de kubus. Door te kijken hoe zo'n diagonaal in een hoekpunt begint (doorgetrokken of gestippeld), kunnen we ook hier bepalen hoe we vanuit (14)(23) daar terechtgekomen zijn, dus in welke richting we het bijbehorende vlak moesten draaien om vanuit de bovenste stand bij dat hoekpunt te komen.

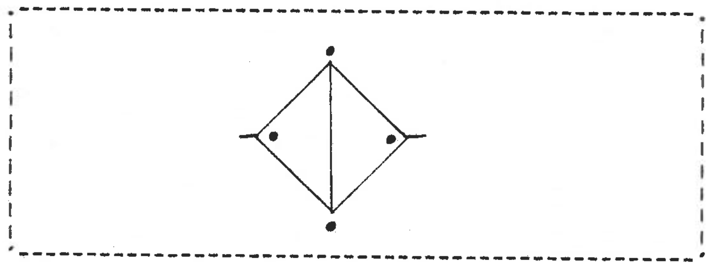
Op deze manier is deze kaart op te vatten als een vereenvoudigde Cayley graph van de A4 met als voortbrengers de 8 3-cykels van de A4. Het is gemakkelijk te zien dat de diameter van deze graph gelijk is aan 2, en dat er 3 antipoden zijn.

6.3 Draaikaarten.

We gaan nu iets soortgelijks doen bij het draaien van hoekblokjes en bij het draaien van ribbeblokjes.

6.3.1 Hoekblokjes.

We beginnen met de hoekblokjes. Hierbij wordt dus helemaal niet gelet op de ribbeblokjes en ook niet op eventuele verwisselingen van hoekblokjes. Als gedraaidheidsdefinitie kiezen we de volgende (zie figuur 1):



figuur 1.

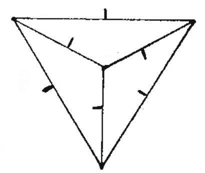
Als de hoekblokjes zodanig zitten, dat hun hoofdrichtingen samenvallen met die van deze figuur, dan zeggen we dat er niets gedraaid is.
In principe kunnen de hoekblokjes in elk hoekpunt op drie manieren gedraaid zitten, en we zouden dus 3macht4 verschillende standen kunnen krijgen. Omdat we echter niet één hoekblokje alleen kunnen draaien, blijven er 3macht3=27 standen over. Deze zijn getekend op kaart 3 in appendix B.

De standen zijn weer op dezelfde manier verbonden als bij de permutatiekaart van hoekblokjes, dat wil zeggen de kleuren zwart, rood, blauw en groen stellen respektievelijk de vlakken R, L, O en A voor. Gestippeld beginnen wil zeggen linksom draaien; doorgetrokken beginnen rechtsom.
Als een lijn van een stand naar dezelfde stand loopt, dan wil dat zeggen dat die stand invariant is onder de bij die lijn behorende draaiing.
De standen hebben we als volgt genummerd:
De beginstand heeft nummer 1, de standen die na één keer draaien te bereiken zijn hebben de nummers 2 tot en met 9, en de overigen de nummers 10 tot en met 27.

Hoewel we hier niet kunnen spreken van een Cayley graph, kunnen we de begrippen pad van een punt P naar een punt Q, **lengte** van een pad, **afstand** van een punt P tot een punt Q, **diameter** en **antipode,** zoals gedefinieerd in hoofdstuk 3, gewoon overnemen.
Onder punten verstaan we dan de standen en onder voortbrengers de verbindingslijnen ertussen.
Als de kaart eenmaal getekend is, is ook hier gemakkelijk te zien dat de diameter 2 is en dat er 18 antipoden zijn.

6.3.2 Ribbeblokjes.

Hetzelfde kunnen we doen bij het draaien van ribbeblokjes. Als gedraaidheidsdefinitie kiezen we (figuur 2):



figuur 2.

Omdat we niet één ribbeblokje alleen kunnen draaien, hebben we hier geen 2macht6 maar 2macht5=32 verschillende standen. Op kaart 4 in appendix B zijn ze getekend.

De verbindingslijnen geven weer aan met welke vlakken er gedraaid wordt, en een lijn van een stand naar zichzelf dat die stand invariant is onder die draaiing.

De beginstand hebben we nummer 1 gegeven, de met één keer draaien te bereiken standen de nummers 2 tot en met 9, de na twee keer draaien te bereiken standen, als ze nog geen nummer hadden, de nummers 10 tot en met 28, en de 4 antipoden de nummers 29 tot en met 32.

De diameter van deze draaikaart is 3 en er zijn 4 antipoden.

VII OPERATIES BIJ HET DRAAIEN MET 2 VLAKKEN.

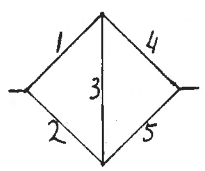
7.0 Inleiding.

In dit hoofdstuk gaan we een algorithme bepalen die operaties levert die alle ribbeblokjes vast laten, en die dus alleen maar werken op de hoekblokjes.
Vanwege het grote aantal mogelijkheden dat we krijgen als we met 4 vlakken draaien, beperken we ons hier tot het draaien met 2 vlakken.
In paragraaf 7.2 zullen we die algorithme bepalen. Met behulp van die algorithme is het mogelijk een programma te schrijven dat berekent hoe vaak we minimaal moeten draaien om de pyramide goed te krijgen, als we er vanuit gaan dat de ribbeblokjes al goed zitten en er slechts met het R-vlak en het L-vlak gedraaid mag worden. We beginnen in paragraaf 1 van dit hoofdstuk met wat voorbereidend werk.

7.1 Voorbereiding.

Er wordt slechts met het R-vlak en het L-vlak gedraaid. We zouden nu naar de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes kunnen kijken (zie hoofdstuk 3 en appendix B) en daaruit een algorithme afleiden die alle lussen om stand 1 genereert. Met behulp daarvan zouden we dan alle operaties kunnen vinden die de ribbeblokjes vast laten. Dit doen we echter niet: de kaart is tamelijk groot, en om die algorithme daar rechtstreeks uit af te leiden, wordt een moeilijke zaak. We stappen daarom over naar iets eenvoudigers.

Als we de ribbeblokjes nummeren zoals in hoofdstuk 3, dan ziet de beginstand er als volgt uit (zie figuur 1):



figuur 1

Omdat er met 2 vlakken gedraaid wordt, weten we precies of een ribbeblokje wel of niet gedraaid op een bepaalde plaats zit. We hoeven dus alleen nog maar te letten op verwisselingen. De verwisselingen die voor kunnen komen, zijn alle even verwisselingen. Dit houdt in dat, als we weten waar de blokjes 1, 2 en 3 zitten, we ook weten waar de blokjes 4 en 5 zitten. In het bijzonder weten we dat iedere operatie die de blokjes 1, 2 en 3 vast laat, dit ook doet met de blokjes 4 en 5.

7.1.1 Kontrole-methode.

Voordat we de algorithme in paragraaf 7.2 gaan bepalen, geven we hier een methode aan om te kontroleren of een operatie de ribbeblokjes op hun plaats laat, zonder daarbij gebruik te maken van permutatiekaarten.
Stel dat we al kunnen kontroleren of een operatie blokje 3 op zijn plaats laat. We kunnen dat dan ook meteen kontroleren voor de blokjes 1 en 2. Immers: operatie X laat blokje 1 vast dan en slechts dan als operatie LXL' blokje 3 vast laat. De operaties L' en L zorgen er namelijk voor dat blokje 3 op de plaats komt te zitten van respektievelijk blokje 1 en 2. Als je daarna X toepast, blijft blokje 3 op die plaats zitten. Het toepassen van L in het ene geval en L' in het andere, zorgen er dan weer voor dat blokje 3 op zijn beginplaats komt.

Wat we nu hebben is het volgende:
Zij X een operatie bestaande uit draaiingen met het R-vlak en het L-vlak, dan is de bewering:

"X laat alle ribbeblokjes op zijn plaats"

equivalent met de bewering

"X laat de ribbeblokjes 1, 2 en 3 op hun plaats"

en deze is weer equivalent met

"X, L'XL en LXL' laten ribbeblokje 3 op zijn plaats".

Wat we zoeken is dus een manier om te kontroleren of een operatie ribbeblokje 3 op zijn plaats laat.

Omdat LL'=L'L=Id, LL=L' en L'L'=L, kunnen we iedere operatie zó schrijven, dat er in de bijbehorende reeks draaiingen nooit 2 keer achter elkaar met het L-vlak gedraaid moet worden. Hetzelfde geldt natuurlijk voor het R-vlak, zodat een operatie waarbij alleen met het R-vlak en L-vlak gedraaid mag worden, altijd geschreven kan worden als een rijtje van afwisselend R's en L's met of zonder aksent.

Stel de operatie waar we naar willen kijken begint met R of R'. Blokje 3 komt dan op de plaatsen van respektievelijk blokje 4 of 5. Zolang blokje 3 op één van die twee plaatsen zit, gebeurt er niets mee als we met het L-vlak draaien, zodat we dan alleen maar hoeven te letten op draaiingen met het R-vlak.
Als nu blokje 3 vanuit plaats 4 of 5 weer op zijn plaats komt, zullen we zeggen dat we een R-lus om 3 gemaakt hebben. Op dezelfde manier kunnen we spreken van een L-lus om 3.
Het is duidelijk dat een operatie die blokje 3 vast laat, bestaat uit afwisselend R-lussen en L-lussen (eventueel ook één R-lus of één L-lus.) Om te kontroleren of een operatie blokje 3 vast laat, hoeven we dus alleen maar te kontroleren of deze bestaat uit L-lussen en R-lussen.

7.1.2 Een voorbeeld.

Een voorbeeld zal het voorgaande verduidelijken:
Stel we hebben de operatie X=RL'RLR'LR'LR'L' en we willen kijken of deze de ribbeblokjes vast laat. Het is dan voldoende te kontroleren of de operaties X, LXL' en L'XL blokje 3 op zijn plaats laten.
Omdat X met een R begint, gaan we eerst op zoek naar een R-lus. Op draaiingen met het L-vlak letten we dan even niet. Het is duidelijk, dat na 7 keer draaien blokje 3 voor het eerst weer op zijn plaats terug is (achtereenvolgens 2 keer een R-draaiing en 2 keer een R' draaiing). Daarna moet een L-lus komen, en dat is hier ook inderdaad het geval (achtereenvolgens 1 keer L en 1 keer L'). De struktuur van X kunnen we als volgt aangeven(1):

R.R.R'.R'|L.L'

De struktuur van LXL' is dan:

L.L'|R.R'|L.L.L

X laat dus ook blokje 2 vast.
Tenslotte de struktuur van L'XL:

L'.L'.L.L|R'.R'

en we zien dat blokje 1 niet op zijn plaats blijft bij het toepassen van X, omdat R'.R' geen R-lus is.

----

(1) De vertikale streepjes in de operaties geven aan waar de overgang van de ene lus naar de andere plaatsvindt; de puntjes stellen in een R-lus een draaiing met het L-vlak voor en in een L-lus een draaiing met het R-vlak.

We weten nu dat de blokjes 2 en 3 op hun plaats blijven bij het toepassen van X en blokje 1 niet. Zoals hierboven al is opgemerkt, ligt de permutatie vast als we weten wat er met 3 van de 5 blokjes gebeurt. Als we in dit geval nog weten waar blokje 1 terecht komt, dan weten we precies welke permutatie bij X hoort.
Met behulp van het bovenstaande is dat vrij gemakkelijk te bepalen:
De plaats waar blokje 1 terechtkomt, na het toepassen van X, is dezelfde als waar blokje 3 terechtkomt na het toepassen van L'X (eerst blokje 3 op de plaats van blokje 1 brengen door middel van het toepassen van L'; dan X toepassen.)
Uit de struktuur van L'XL volgt dat blokje 3 na het toepassen van L'XL op plaats 4 zit. Immers de lus die nog niet af is, zou een R-lus moeten worden, en we hebben daar twee keer R' toegepast. Als we de operatie L'X=L'XLL' toepassen, dan weten we dus dat blokje 3 op plaats 4 zit (L'XL toepassen brengt blokje 3 op plaats 4; daarna L' toepassen laat blokje 3 daar zitten.) We zien dus op een vrij eenvoudige manier dat blokje 1 op plaats 4 zit.
De permutatie die hoort bij X levert nu geen problemen meer op:

- blokje 3 blijft op zijn plaats
- blokje 2 blijft op zijn plaats
- blokje 1 gaat naar plaats 4

De 2 mogelijkheden die we nu nog hebben voor de permutatie zijn (14) en (145), waarvan (14) afvalt, omdat die oneven is.
Bij iedere willekeurige operatie X kunnen we op deze manier de bijbehorende permutatie vinden.

7.2 Algorithme voor ribbeblokjes-invariante operaties.

Als we de resultaten van de vorige paragraaf op een rijtje zetten, dan zien we dat een operatie X dan en slechts dan de ribbeblokjes invariant laat als geldt, dat zowel X als LXL' als L'XL ribbeblokje 3 op zijn plaats laat. Ook hebben we gezien, dat iedere operatie die ribbeblokje 3 op zijn plaats laat, is opgebouwd uit afwisselend R-lussen en L-lussen.
De algorithme die we gaan bepalen bestaat uit 3 stappen:

1) We bepalen een formule voor R-lussen en L-lussen.

2) Voor iedere lengte van een operatie bepalen we op welke manier(en) we deze lengte kunnen krijgen, ervan uitgaande dat zo'n operatie moet bestaan uit R-lussen en L-lussen.

3) Bij de op deze manier gevonden operaties X wordt gekontroleerd of er is voldaan aan de voorwaarde, dat ook LXL' en L'XL blokje 3 op zijn plaats laat (i.e. is opgebouwd uit R-lussen en L-lussen).

Wat het derde punt betreft, kunnen we verwijzen naar paragraaf 7.1, waarin een manier is aangegeven om te kontroleren of een operatie blokje 3 vast laat.

Het bepalen van de formules voor R-lussen en L-lussen doen we met behulp van figuur 1 uit paragraaf 7.1. Vanwege symmetrie-overwegingen is het voldoende te kijken naar L-lussen, waarbij we, weer vanwege de symmetrie in de tekening, ons kunnen beperken tot L-lussen die met de draaiing L beginnen.
Als we L toegepast hebben zit ribbeblokje 3 op plaats 2. We hebben nu twee mogelijkheden:

1) Blokje 3 gaat een aantal keren (eventueel ook 0 keer) heen en weer tussen plaats 1 en 2, en gaat tenslotte via plaats 2 terug naar plaats 3.

2) Blokje 3 gaat een aantal keren heen en weer tussen plaats 1 en 2, en gaat tenslotte via plaats 1 terug naar plaats 3.

De bijbehorende strukturen van de L-lussen zijn dan als volgt:

- L.[L.L'.]machtnL'

- L.L.[L'.L.]machtnL

waarbij op de plaats van de punten R of R' ingevuld kan worden, en waarbij n een niet-negatief geheel getal is(2).

Natuurlijk krijgen we ook L-lussen als we overal L door L' en L' door L vervangen:

- L'.[L'.L.]machtnL

- L'.L'.[L.L'.]machtnL'

Alle mogelijke R-lussen, tenslotte, krijgen we als we L door R en L' door R' vervangen:

----

(2) Ook hier bedoelen we met "machtn": tot de macht n. Datgene wat tussen haakjes staat moeten we dus n keer toepassen.

- R.[R.R'.]machtnR'

- R.R.[R'.R.]machtnR

- R'.[R'.R.]machtnR

- R'.R'.[R.R'.]machtnR'

We zien dat we bij ieder oneven getal $k \neq 1$ lussen kunnen maken van lengte k.

Het werk dat we bij het tweede punt moeten verrichten komt er op neer, dat we voor ieder natuurlijk getal n moeten bepalen hoeveel en welke rijtjes oneven getallen groter of gelijk aan 3 er zijn, zodat de som van die getallen gelijk is aan n.

Kort samengevat:
Als n een natuurlijk getal is, dan bepalen we alle operaties van lengte n, die de ribbeblokjes vast laten, als volgt:

- Bepaal alle rijtjes bestaande uit oneven getallen ongelijk aan 1, waarvoor geldt dat de som van die getallen gelijk is aan n

- Bepaal bij ieder rijtje alle mogelijke operaties X die bestaan uit een afwisselende reeks R-lussen en L-lussen met lengtes die overeenkomen met de getallen in dat rijtje

- Kontroleer of LXL' en L'XL ook bestaan uit een afwisselende reeks R-lussen en L-lussen

Als dat zo is dan is X een operatie, die alle ribbeblokjes op hun plaats laat.

VIII DE SUPERGROEP VAN DE PYRAMIDE.

8.0 Inleiding.

Tot nu toe hebben we bij het draaien aan de vlakken van de pyramide alleen gelet op verwisselingen en draaiingen van de ribbeblokjes en de hoekblokjes. We hebben niet gelet op draaiingen en verwisselingen van de centra. Omdat we als referentiekader de positie van de centra genomen hebben, komen verwisselingen van centra niet voor. Draaiingen van centra echter wel. We kunnen deze zichtbaar maken door het aanbrengen van een merktekentje op ieder centrum. De groep waarmee we dan te maken krijgen noemen we de supergroep van de pyramide, en we geven haar aan met Ps.

Om de struktuur van deze groep te bepalen, gaan we gebruik maken van het begrip duaal:
Als je bij een kubus van ieder van de 6 vlakken het midden neemt, en de 6 punten die je dan krijgt, beschouwt als hoekpunten van een nieuwe figuur, dan zie je dat dat een regelmatig achtvlak is; als je bij dit achtvlak hetzelfde doet, krijg je weer een kubus.
We zeggen dat het regelmatig achtvlak en het regelmatig zesvlak (de kubus) elkaars duale zijn.
Zo zijn ook het regelmatig twintigvlak en het regelmatig twaalfvlak elkaars duale.
Als je bij de pyramide de middens van de zijde verbindt, krijg je weer een pyramide: De pyramide is zelf-duaal. Van dit feit maken we in de komende paragrafen gebruik.

In paragraaf 1 van dit hoofdstuk beginnen we met het invoeren van het begrip **duale van een operatie**, in paragraaf 8.2 gaan we aan de hand van een voorbeeld na hoe je zo'n duale kunt berekenen, en in paragraaf 8.3 tenslotte, wordt met behulp van dit voorbeeld de struktuur van de Ps bepaald.

8.1 De duale van een operatie.

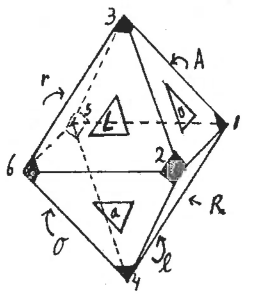
Wat gebeurt er nu eigenlijk precies als je met een vlak van de pyramide draait?
Laten we aannemen dat we met het L-vlak gedraaid hebben.
Je kunt dan zeggen dat de 3 hoekblokjes en de 3 ribbeblokjes die aan centrum L grenzen, rechtsom doorgeschoven zijn én dat het centrum L 120 graden rechtsom gedraaid is.
Zo hebben we er tot nu toe tegenaan gekeken: de centra blijven altijd op hun plaats en geven de oriëntatie van de pyramide aan; de hoekblokjes en de ribbeblokjes kunnen

verwisselen.

Wat we ook hadden kunnen doen, is zeggen dat de hoekblokjes altijd op hun plaats blijven en de oriëntatie van de pyramide aangeven, en dat de centra en de ribbeblokjes kunnen verwisselen. Als we dat doen, moeten we vaststellen dat er helemaal geen hoekblokjes doorgeschoven zijn! We zeggen nú dat het tegenover vlak L liggende hoekblokje, hoekblokje L, 120 graden rechtsom gedraaid is, en dat de 3 aangrenzende centra en de 3 aangrenzende ribbeblokjes rechtsom doorgeschoven zijn.
In feite zeggen we beide keren hetzelfde:

- één blokje (centrum L in het eerst geval; hoekblokje 1 in het tweede geval) is 120 graden rechtsom gedraaid
- de 3 aangrenzende ribbeblokjes zijn rechtsom doorgeschoven
- 3 andere aangrenzende blokjes (hoekblokjes in het eerste geval; centra in het tweede geval) zijn ook rechtsom doorgeschoven

Het blijkt dat de hoekblokjes en de centra een equivalente rol spelen in het hele verhaal. Dit is een direkt gevolg van het zelf-duaal zijn van de pyramide: vlakken kun je beschouwen als hoekpunten; hoekpunten als vlakken.
In figuur 1 kun je zien dat je zó tegen de pyramide kunt aankijken, dat het onderscheid tussen hoekblokjes en centra volledig verdwijnt:



figuur 1.
de 6 hoekpunten van het regelmatige achtvlak stellen de ribbeblokjes voor; 4 van de 8 centra van de vlakken komen overeen met de hoekblokjes en de andere 4 met de centra van de pyramide.

Draaien met een vlak van de pyramide (bijvoorbeeld vlak L) korrespondeert dan in het achtvlak met het draaien van centrum L, het rechtsom doorverwisselen van de 3 aangrenzende ribbeblokjes, en het rechtsom doorverwisselen van de centra van de 3 aangrenzende vlakken.
Dit is precies hetzelfde als zeggen, dat je het tegenover centrum L liggende centrum, centrum 1, draait, de 3 aan centrum 1 grenzende ribbeblokjes en de 3 aan centrum 1 grenzende centra doorverwisselt.

Stel nu dat we een operatie X hebben. Deze bestaat uit een reeks draaiingen van vlakken van de pyrmide, en we hebben die aangegeven door een reeks letters, die korresponderen met de centra waaromheen gedraaid wordt.
We kunnen deze reeks ook opvatten als een reeks draaiingen rondom de hoekblokjes die door die letters aangeduid worden. Hierdoor krijgen we weer een operatie (draaien rondom een hoekblokje, is draaien met het tegenoverliggende vlak) en deze twee operaties zullen we elkaars duale noemen.

Het is duidelijk dat 2 operaties die elkaars duale zijn, hetzelfde soort effekt hebben op de pyramide. Dat wil zeggen als een operatie bijvoorbeeld 3 hoekblokjes verwisselt en 2 ribbeblokjes draait, dan verwisselt zijn duale 3 centra en draait 3 ribbeblokjes. We werken echter steeds met een pyramide waarin de centra de oriëntatie bepalen, zodat er in het tweede geval geen 3 centra verwisselen. Er zullen dan wat ribbeblokjes verwisselen en draaien, zodat het lijkt of

er 3 centra verwisselt zijn (namelijk als je de hoekblokjes als vast beschouwt.)

8.2 Berekening van de duale.

We bekijken de operatie (LR'LR)macht2. Op de 2-vlakspermutatiekaart van ribbeblokjes zien we dat dit een lus om Id is. Omdat we slechts draaien met 2 vlakken, kunnen er ook geen ribbeblokjes gedraaid zijn. Deze operatie laat dus alle ribbeblokjes vast. Met behulp van de 2-vlakspermutatiekaart van hoekblokjes is gemakkelijk na te gaan dat, wat verwisselingen betreft, deze operatie overeenkomt met (ola). Kijken we nu ook nog naar de draaikaart van hoekblokjes, dan zien we dat we bij stand 26 (--++) uitkomen. Het effekt van de operatie (LR'LR)macht2 is dus (o-1+a-)r+. Het effekt van (LR'LR)macht6 is dan {(o-1+a-)r+}macht3=o-1-a-
Merk verder op dat er geen enkel centrum gedraaid is na deze operatie. Het enige wat (LR'LR)macht6 doet, is dus de hoekblokjes o, 1 en a linksom draaien. De duale van (LR'LR)macht6 zal dan alleen de centra O, L en A linksom draaien.

We gaan deze duale berekenen met behulp van de permutatiekaart van hoekblokjes. Eerst moeten we rechtsom rond hoekblokje 1 draaien. Omdat we vertrekken vanuit Id, zit hoekblokje 1 tegenover centrum L, en een draaiing rechtsom rond hoekblokje 1 komt dus overeen met L. Daarna moeten we linksom rond hoekblokje r draaien, dat inmiddels tegenover centrum O zit. De tweede draaiing is dus O'. Voeren we O' uit, dan zit hoekblokje 1 op de plaats waar hoekblokje a oorspronkelijk zat. Een draaiing rechtsom rond hoekblokje 1 komt dus overeen met een draaiing met vlak A. We kunnen zo doorgaan. De operatie die we dan krijgen is: (LO'AROA'LRAL'OR)macht2.
Ter kontrole kunnen we deze reeks nalopen op de diverse kaarten, en dan zal blijken dat het steeds weer een lus om Id is. Ook zien we dat centrum R ongedraaid is (6 keer rechtsom), en dat de overige centra linksom gedraaid zitten (ieder centrum 4 keer rechtsom en 2 keer linksom), zoals te verwachten was.

8.3 De struktuur van Ps.

Uit de vorige paragraaf blijkt, dat we het drietal centra O, L en A allen linksom kunnen draaien, zonder dat er iets met de hoekblokjes en ribbeblokjes gebeurd is. Uit symmetrie-overwegingen volgt dan dat we een willekeurig drietal linksom of rechtsom kunnen draaien.

Als we eerst een drietal centra rechtsom draaien en daarna een ander drietal linksom, dan geeft dat als resultaat dat er 2 centra gedraaid zijn: één centrum rechtsom en het andere linksom. Omdat het niet mogelijk is één hoekblokje alleen te draaien, is het ook niet mogelijk één centrum alleen te draaien, vanwege de dualiteit van hoekblokjes en centra.

We weten al dat St isomorf is met

$$A6*A4*C2^{5} *C3^{3}.$$

Omdat we bij de supergroep van de pyramide niet één centrum alleen kunnen draaien, maar wel ieder willekeurig tweetal, is het aantal elementen van Ps 27 keer het aantal elementen van St, en Ps is isomorf met

$$A6*A4*C2^{5} *C3^{6}.$$

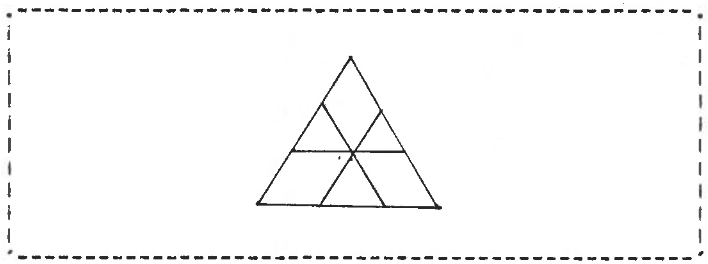
A. APPENDIX

PRAKTISCHE UITVOERING VAN GEDRAAIDHEIDSDEFINITIES.

Voor een gedraaidheidsdefinitie moet je elk blokje een hoofdrichting geven. Dat zou je praktisch uit kunnen voeren door bij elk blokje een stickertje op een van de kanten te plakken. De kant met het stickertje erop is dan de hoofdrichting.
Ook moest je onthouden hoe de hoofdrichtingen in de beginstand zitten. Dat doen we door de hoofdrichtingen in de beginstand op de pyramide zelf aan te geven.

We gaan als volgt te werk: We halen een centrum van de pyramide af. Er wordt dan een schroefje zichtbaar, waarmee het centrum vastzat aan het skelet. Dit schroefje draait niet mee met het vlak en blijft dus altijd in dezelfde positie ten opzichte van dat skelet. We maken nu een nieuw centrum (eventueel met behulp van het oude) en bevestigen dit aan het schroefje. Het moet wel zódanig gemaakt worden dat dit nieuwe centrum boven het draaivlak uitsteekt, omdat je anders niet meer kunt draaien.

Het centrum verdeel je in 6 gebieden (er grenzen 6 blokjes aan). Dit kan bijvoorbeeld als volgt gedaan worden (figuur 1):

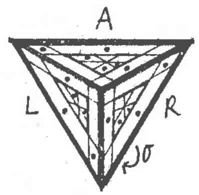


figuur 1.

Ieder centrum verdelen we op deze manier in 6 gebieden. Als nu van een aangrenzend blokje de hoofdrichting aan het centrum grenst, plak je ook een sticker op het bijbehorend gebied van het centrum.

We kunnen nu eenvoudig zien of een blokje gedraaid zit, en zo ja, hoe het dan gedraaid zit (dit laatste in het geval van hoekblokjes): Ieder blokje grenst aan precies één gebied van een centrum, waar een stickertje op zit. Grenst nu het stickertje van het blokje aan dat gebied, dan is het blokje ongedraaid. In het andere geval zit het blokje gedraaid, en als het een hoekblokje is, kijk je of dat stickertje linksom dan wel rechtsom gedraaid zit ten opzicht van dat centrumstickertje.

We geven een konkreet voorbeeld:
Stel dat je pyramide er uit ziet als in figuur 2:



figuur 2.

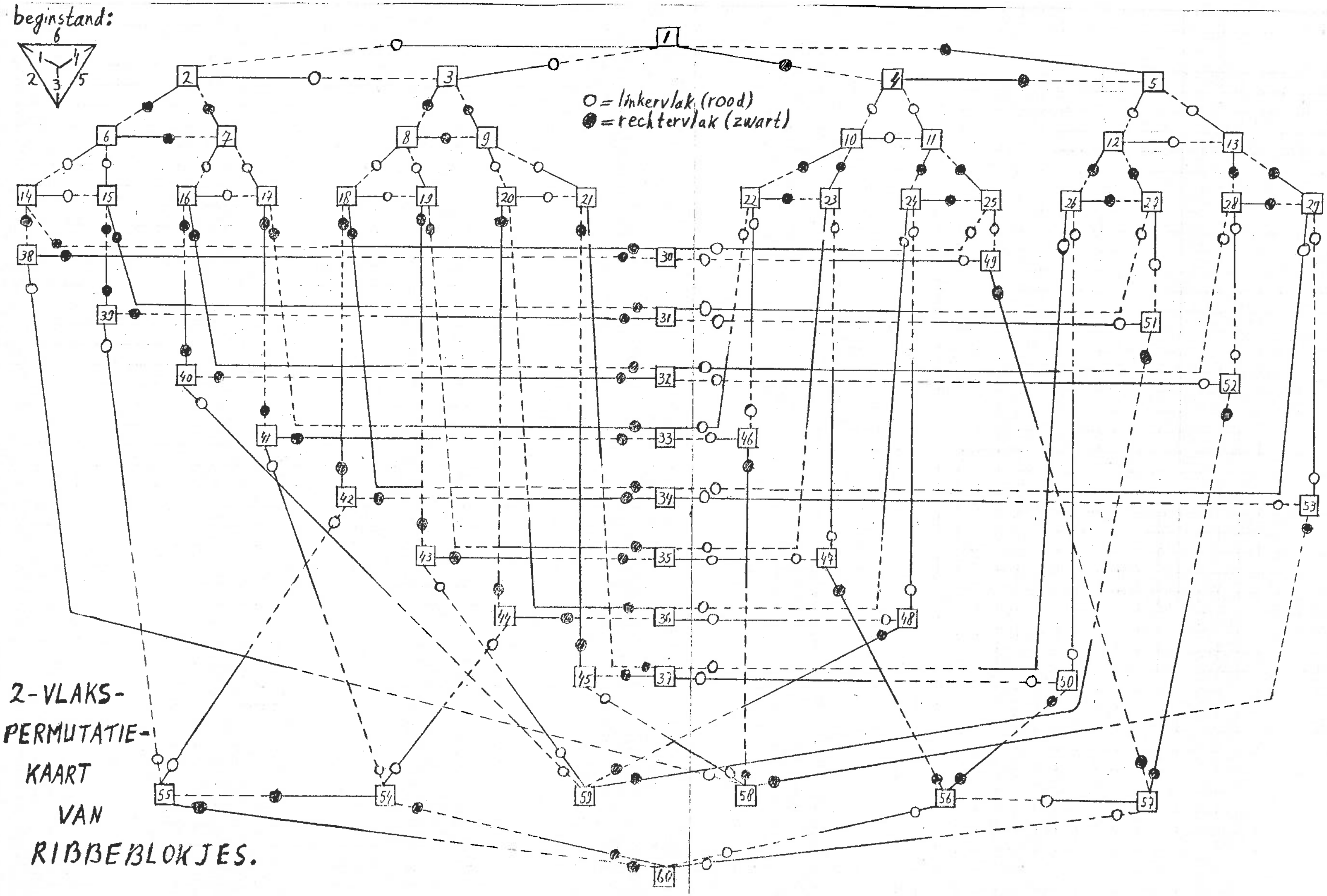
Uit deze tekening kun je van elk blokje afleiden of het gedraaid zit en op welke manier.
Het blokje op plaats RO bijvoorbeeld heeft zijn hoofdrichting grenzend aan een gebied van het centrum R waar een punt (sticker) op zit en is dus **niet** gedraaid. Het blokje op plaats ROL heeft zijn hoofdrichting **niet** grenzend aan een gebied van een centrum, waar een punt op zit, en zit dus **wel** gedraaid.
Om te zien of het linksom of rechtsom gedraaid zit kijken we van buitenaf naar de pyramide, en we zien dat op centrum R wel een punt zit en dat het blokje ROL dus linksom gedraaid zit.

Voor de volledigheid:

- het hoekblokje op plaats ROL zit linksom gedraaid
- het hoekblokje op plaats LOA zit niet gedraaid
- het hoekblokje op plaats AOR zit rechtsom gedraaid
- het hoekblokje op plaats RLA zit niet gedraaid

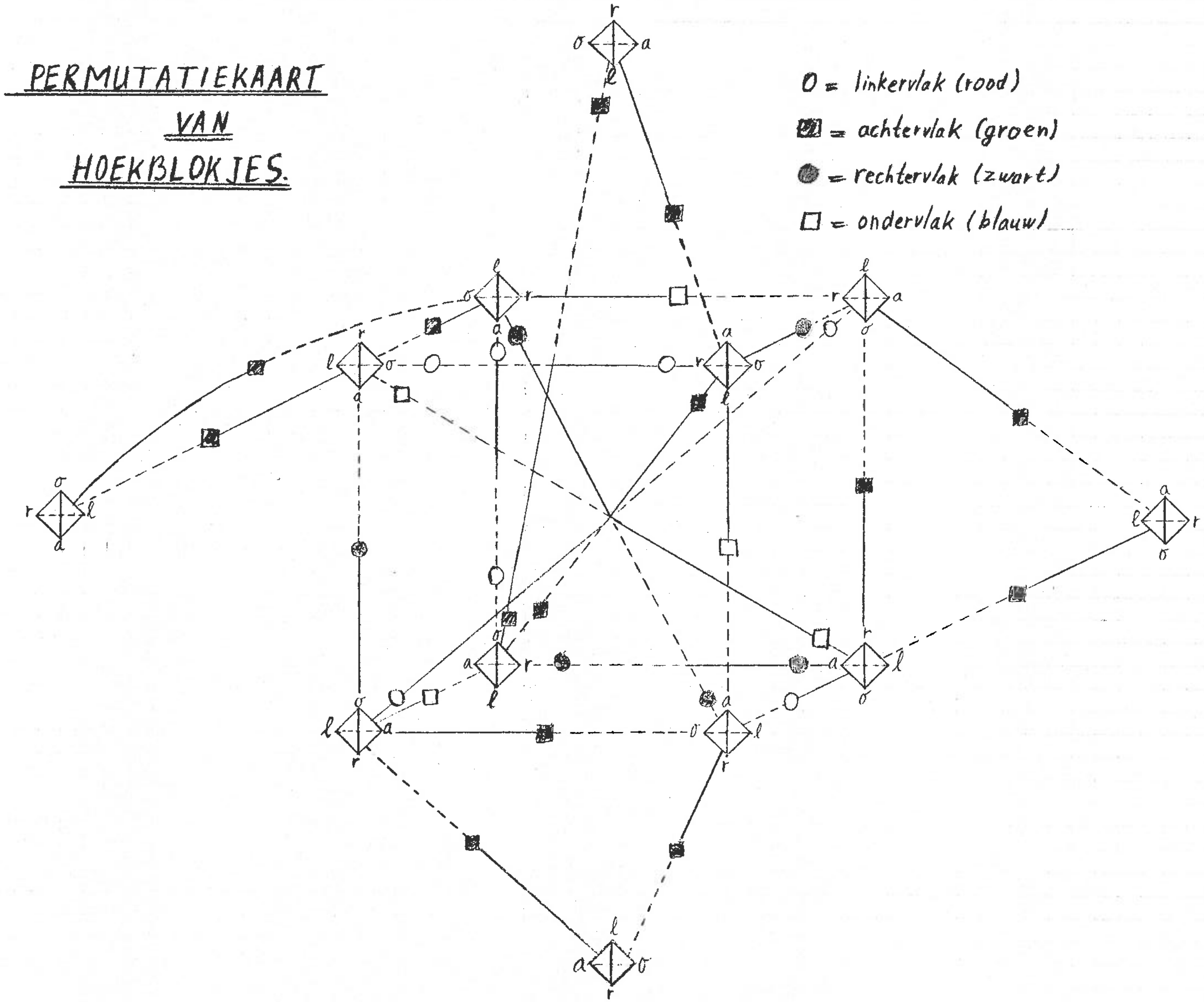
- het ribbeblokje op plaats RO is ongedraaid
- het ribbeblokje op plaats RL is gedraaid
- het ribbeblokje op plaats LO is gedraaid
- het ribbeblokje op plaats AL is ongedraaid
- het ribbeblokje op plaats AO is gedraaid
- het ribbeblokje op plaats AR is ongedraaid

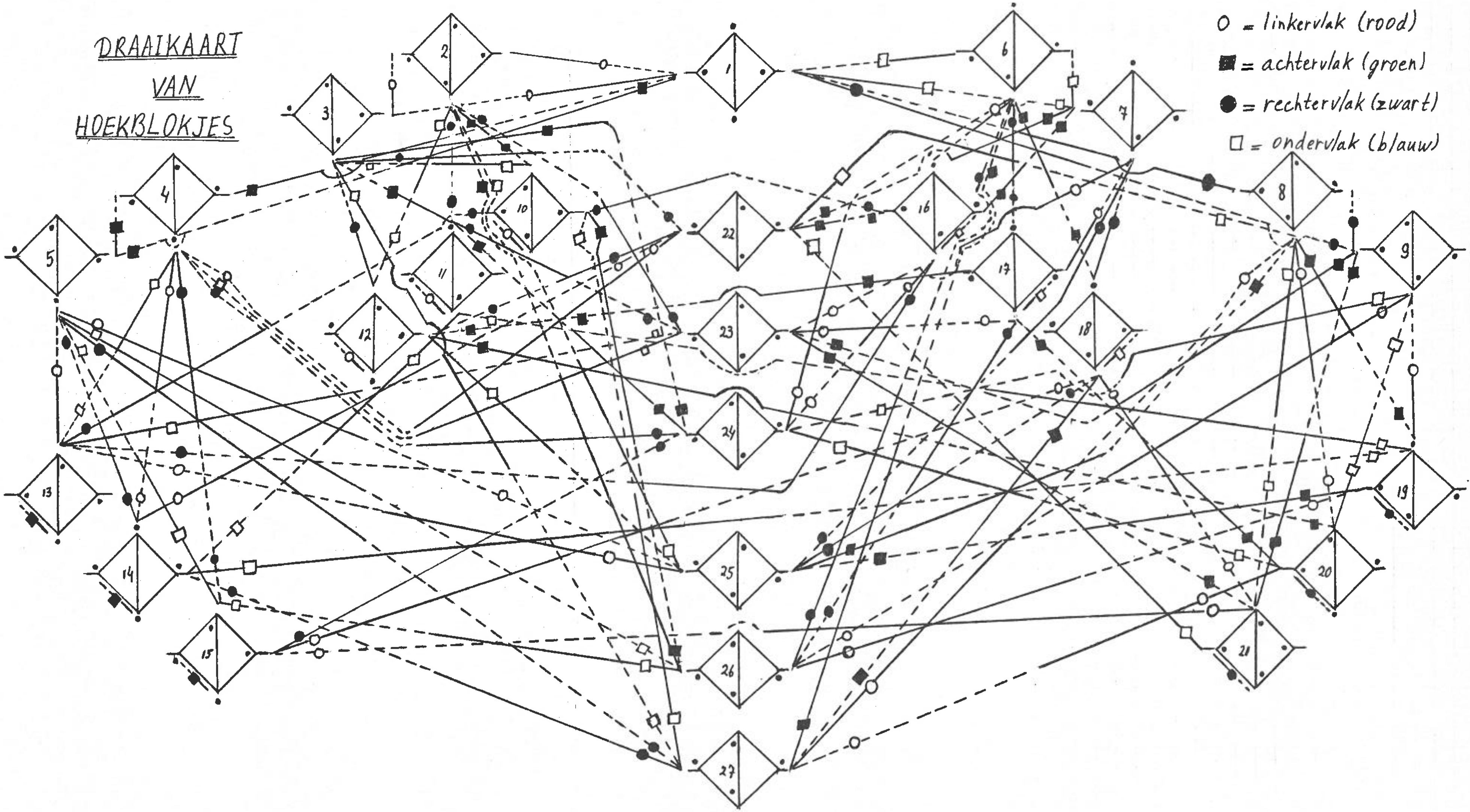
De hierboven getekende stand is trouwens niet door draaien vanuit de beginstand te bereiken. Dit komt omdat er een oneven aantal ribbeblokjes gedraaid zijn.



2-VLAKS-PERMUTATIE-KAART VAN RIBBEBLOKJES.

PERMUTATIEKAART VAN HOEKBLOKJES.

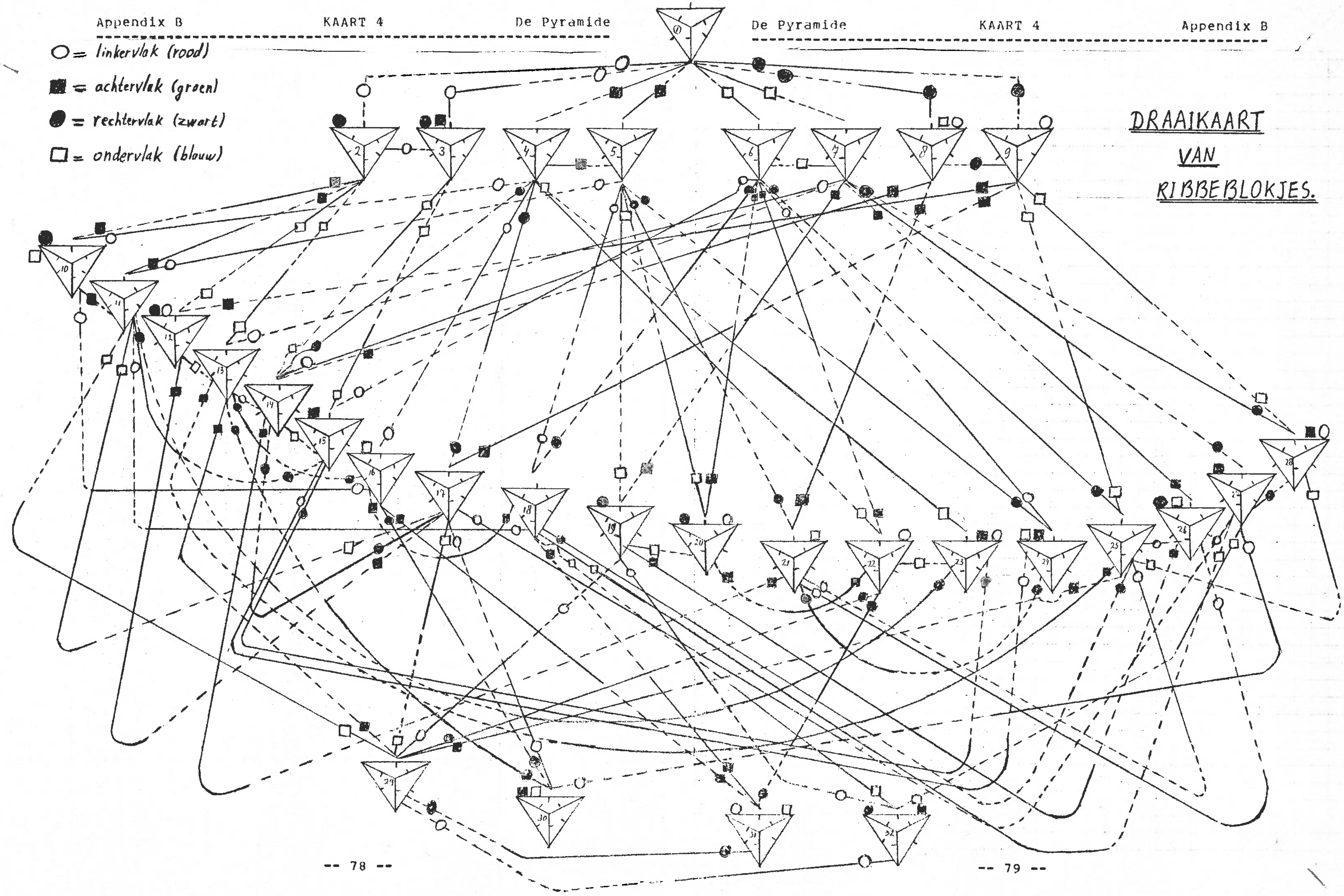



DRAAIKAART
VAN
HOEKBLOKJES
O = linkervlak (rood)
■ = achtervlak (groen)
● = rechtervlak (zwart)
□ = ondervlak (blauw)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

De Pyramide KAART 4 Appendix B

DRAAIKAART VAN RIBBEBLOKJES.

○ = linkervlak (rood)
■ = achtervlak (groen)
● = rechtervlak (zwart)
□ = ondervlak (blauw)



INHOUDSOPGAVE.