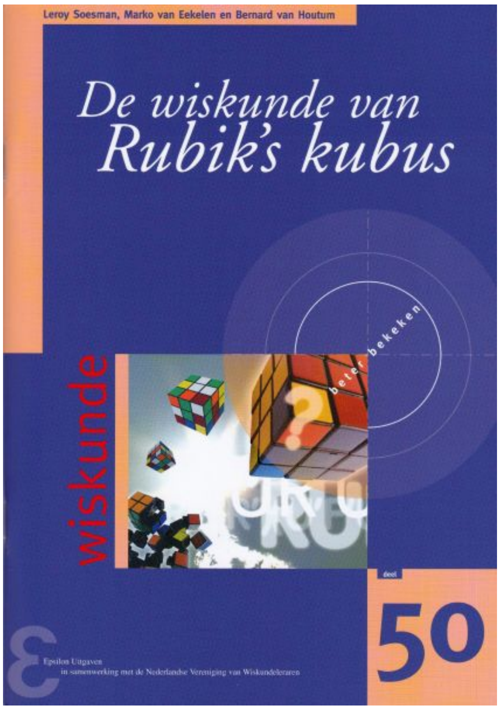
Errata:

Opgave 80**: [[R,U2],D’]** ipv **[[R,U2],D]**

Opgave 87. Dit is een herhaling van opgave 79-82. Deze kan geschrapt worden.



Uitwerkingen van geselecteerde opgaven.

Opgave 1. Niet alle mogelijke posities zijn door middel van draaien te bereiken. Het is bijvoorbeeld onmogelijk om door middel van draaien een enkel blokje te oriënteren. Dit zien we verder in hoofdstuk 12.

Opgave 3. Het **F**-vlak groen na $\boldsymbol{y}$ en oranje naar tweemaal $\boldsymbol{x}$.

Opgave 4. Net als bijvoorbeeld $R9$ of $R6$ reduceert $\boldsymbol{R3}$ tot $\boldsymbol{R}'$.

Opgave 10. Dit is gelijk aan $\boldsymbol{RU2R}'$ omdat in $(\boldsymbol{RUR}')(\boldsymbol{RUR}')$ geldt dat $\boldsymbol{RU}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R})\boldsymbol{UR}' = \boldsymbol{RUUR}' = \boldsymbol{RU2R}'$.

Opgave 13. Bij het oplossen van het kruis kun je grote delen van de kubus onopgelost laten. Bij latere lagen moeten steeds grotere delen van de kubus onaangetast blijven, wat het aantal bruikbare permutaties drastisch reduceert.

Opgave 14. Zie de sectie “wat we leren van **RUR’U**’” vanaf pagina 23.

Opgave 15. De correcte oplossing is $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$, dit zijn respectievelijk de oplossingen van opgaven 16, 17, 18 en 19.

Opgave 20. Als de twee onderste lagen van de kubus zijn opgelost, dan zijn er 4 hoeken en 4 randjes over. Deze kunnen we terugplaatsen op $4! \cdot 3^4 \cdot 4! \cdot 2^4 = 62208$ manieren.

Opgave 21. Dit antwoord is viermaal te groot. Dit komt omdat elke positie in 4 oriëntaties kan voorkomen. Door middel van **U** draaien kun je deze in elkaar overvoeren.

Opgave 30. fld en lfd zijn dezelfde locatie. De volgorde van de letters zegt iets over de oriëntatie van een blokje na het (herhaald) uitvoeren van een permutatie.

Opgave 32. Deze permutaties zijn gelijk.

Opgave 33. Uit opgave 32 zien we dat er 4 manieren zijn om een vier-cykel op te schrijven, 8 manieren om een 8-cykel te beschrijven en n manieren om een n-cykel te beschrijven.

Opgave 34. Nee, dit zijn verschillende permutaties.

Opgave 35. $\boldsymbol{R} = (fr\ ur\ br\ dr)(fur\ ubr\ bdr\ dfr)$ en $\boldsymbol{R}' = (fr\ dr\ br\ ur)(fur\ dfr\ bdr\ ubr)$.

Opgave 36. Dit is permutatie 3 op pagina 18.

Opgave 37. Dit is **B.**

Opgave 38. $\boldsymbol{RUR'U'} = (fur\ frd)(ubr\ ulb)(fr\ ur\ ub)$

Opgave 39. De drager van $\boldsymbol{RUR'U'}$ is per opgave 39 gelijk aan $\{fur, frd, ubr, ulb, fr, ur, ub\}$

Opgave 41. De hoeken komen terug op hun eigen locatie maar georiënteerd. De drager blijft dus gelijk.

Opgave 42. Nu zijn alle randen terug op hun eigen locatie. De drager reduceert naar $\{fur, frd, ubr, ulb\}$.

Opgave 44. We zullen zien dat $(\boldsymbol{RUR'U'})6 = n$.

Opgave 45. We maken aannemelijk dat de cykel-lengtes van de randblokjes optellen tot maximaal 12 en die van de hoekblokjes tot maximaal 8 (we bewijzen dit dus niet).

Ten eerste beargumenteren we dat een locatie in hoogstens 1 cykel kan voorkomen. Stel namelijk dat de locatie x voorkomt in twee verschillende cykels. We onderscheiden twee gevallen. Dit komt voor als:

$\sigma = (\dots ax)\ (xb\ \dots)$

Bijvoorbeeld: (12)(23) stuurt 1 naar 2 en 2 naar 3, en stuurt 3naar 2. Ten slotte wordt 2 naar 1 gestuurd. Dus (12)(23)=(132).

En zo geldt ook: (1234)(456)=(123564) en (123456)(6789)=(123457896).

Dan is dit te herleiden tot $(\dots ab \dots x)$ en is x eigenlijk onderdeel van een enkele cykel.

Indien

$\sigma = (\dots xa \dots)\ (\dots xb \dots)$.

Dan zien we dat $\sigma(x) = a$ en $\sigma(x) = b$. Dit betekent dat x bij toepassing van σ naar twee verschillende locaties wordt gepermuteerd. Dit is niet mogelijk op de kubus, tenzij $a = b$, dus zit x in een enkele cykel.

Andersom geldt dat indien $(\dots ax \dots)\ (\dots bx \dots)$ en x het beeld is van twee verschillende locaties, dat $a = b$. Twee blokjes kunnen immers doormiddel van draaien niet naar dezelfde locatie worden gepermuteerd.

Om dezelfde redenen zien we direct in dat x niet tweemaal in dezelfde cykel kan voorkomen.

Omdat een locatie hooguit eenmaal in een enkele cykel kan voorkomen geldt dat er een maximum zit aan de cykel-lengten van de rand- en hoekblokjes. Een randblokje kan langs maximaal 12 locaties worden gepermuteerd, en een hoekblokje langs maximaal 8 locaties. Dit is wat we moesten onderbouwen.

Opgave 47. Eerst $\boldsymbol{F}$ uitvoeren zorgt ervoor dat er alleen blokjes in de bovenlaag worden gepermuteerd, want $flu, fu\ en\ fur$ komen nu op de locaties van $fur, fr, en\ frb$.

Opgave 49. $\boldsymbol{RU} = (fur)^{+}(frd\ ufl\ ulb\ ubr\ bdr)^{+}(fr\ uf\ ul\ ub\ ur\ br\ dr)^{+}$

Opgave 50. De orde zou 35 moeten, maar na 35 keer uitvoeren zijn er nog blokken georiënteerd. Dus het klopt niet.

Opgave 51. We zien dat bijvoorbeeld fur wordt georiënteerd door $\boldsymbol{RU}$. Hierdoor moeten we de permutatie in totaal 105 keer uitvoeren voordat we weer terug zijn waar we begonnen.

Opgave 52. 1260. Houdt er rekening mee dat de grootst gemene delers van het aantal locaties in de cykels 1 moet zijn om een zo hoog mogelijke orde te krijgen. Dit geeft cykel lengtes van bijvoorbeeld 5 hoeken, 2 hoeken en 7 randen, etc. Gebruik dit om tot een maximale orde te komen.

Opgave 59. $drager\ \boldsymbol{RUR}'\ is\ \{fur, flu, lbu, dfr, fu, lu, bu, fr\}$. Dit is ook de drager van **RU'R'**

Opgave 67. Beschouw bijvoorbeeld de Sune en anti-Sune, op pagina 16.

Opgave 69. $\boldsymbol{L'U'LU'L'U2L}$

Opgave 70. Dit is een rotatie over de Z-as van 90°.

Opgave 74. $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D}] = \boldsymbol{LDL'U'}$. Met drager {flu, fl, fdl, dl, dbl,db, drb}**.**

Opgave 75. De elementen die worden gepermuteerd door $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D}]$ zijn precies die elementen die worden gepermuteerd naar de doorsnede van de dragers van **L** en **D**. Dus de elementen die worden gepermuteerd naar de locaties die voorkomen in zowel **L** als **D**. Ga dit na op jouw kubus.

Opgave 76. $[[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U}], \boldsymbol{L}'] = [(\boldsymbol{RUR'U'}), \boldsymbol{L}'\ ] = (\boldsymbol{RUR'U'})\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{URU'R'})\boldsymbol{L}$**.** Deze permutatie permuteert 3 hoeken. Dus de orde is 3. Lijkt op de bowtie uit de OLL.

Opgave 77. Deze permutatie permuteert drie hoeken in het R-vlak. Door rotatie over 90º kunnen we deze permutatie aanpassen zodat deze alleen maar blokjes in het bovenvlak permuteert.

Opgave 78. Zie pagina 43.

Opgave 79. $\{fur, ur, ubr, flu, ul, ulb, fr, fld\}$, met

$[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U2}] = (fur, ubr, ufl, bul, dfr)(fr, ur, ul)$. Ga na dat de orde van deze permutatie 15 is.

Opgave 80. $[[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U2}], \boldsymbol{D}'] = [(\boldsymbol{RU2R'U2}), \boldsymbol{D}'] =\ (\boldsymbol{RU2R'}\color{red}{\boldsymbol{U2}}\color{black})\boldsymbol{D}'\ (\color{red}{\boldsymbol{U2}}\color{black}\boldsymbol{RU2R'})\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{RU2R'})\boldsymbol{D}'\ (\boldsymbol{RU2R'})\boldsymbol{D} = (frd\ rbd\ ulb)$. Met drager $\{frd, rbd, ulb\}$.

Opgave 81*. Conjugatie met L levert dat alleen in de D-laag blokjes worden gepermuteerd. En wel zo dat deze het witte vlak volledig wit blijft. Dus $\boldsymbol{L}[[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U2}], \boldsymbol{D}']\boldsymbol{L}'$

Opgave 82**. We kunnen nu de boel omdraaien zodat we in plaats van in de bovenste laag juist in de onderste laag permuteren. Dit levert: $\boldsymbol{R}[[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D2}], \boldsymbol{U}']\boldsymbol{R}' = (flu\ lbu\ bru)$. Zoals in opgave 80 kunnen we dit enigszins reduceren tot $\boldsymbol{R}[[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D2}], \boldsymbol{U}']\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{LD2L'})\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{LD2L'})\boldsymbol{UR}'$. Deze permutatie kunnen we eventueel spiegelen zodat we deze twee kanten uit hebben.

Opgave 83. Deze inverse levert direct een oplossing voor de bowtie en is $[\boldsymbol{L}', [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U}]]$**.**

Opgave 93. We laten zien dat $(Z\ , +)$ een groep is.

Gesloten: de som van twee gehele getallen is altijd weer een geheel getal. Dus de groep is gesloten onder optelling.

Neutraal element: Voor elke $a \in\ Z$ geldt dat $a + 0 = 0 + a = a$. Dus 0 is het neutrale element onder optelling.

Inverse element: Voor elke $a \in Z$ geldt dat er een element $-a \in Z$ bestaat, zodat $a + -a = 0$. Dus elk element heeft een inverse.

Associatief: Uit de associatieve eigenschap van de optelling volgt dat deze ook associatief is voor de gehele getallen.

Uit bovenstaande volgt dat (Z,+) inderdaad een groep is QED.

Opgave 94. We moeten aantonen dat $-(-a) = a$, hierbij is $-a$ de inverse van a onder optelling en is 0 het neutrale element. We zien: $-(-a) \stackrel{2}{=} -(-a) + 0 \stackrel{3}{=} -(-a) + (-a) + a \stackrel{3}{=} 0 + a \stackrel{2}{=} a. QED.$ Hierbij is boven de =-tekens aangegeven welke groepsaxioma's zijn gebruikt.

Opgave 95. Per definitie geldt er $((A * B) * (A * B)' = n$. Dus we zien: $A * B * (A * B)' = n = A * A' = A * n * A' = A * (B * B') * A' = A * B * B' * A'$. We zien $A * B * (A * B)' = A * B * B' * A'$. Door links samen te stellen met $(A * B)'$ verkrijgen we $(A * B)' = B' * A'$ QED.

Opgave 96. Stel dat er twee neutrale elementen n en n' zijn binnen G. Dan geldt er dat: $n = n * n' = n'$. QED.

Opgave 97*.

a.) $G = (\{-1,1\},\cdot)$Dit is een groep. We zien uit de tabel dat deze groep gesloten is, en een neutraal element 1 bevat. Elk element is zijn eigen inverse en associativiteit volgt uit de tabel.

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

b.) $G = (\{-1,1\}, +)$. Dit is geen groep, aangezien $-1 + 1 = 0 \notin G$

c.) $G = (\boldsymbol{Z}, ?)$, met: $? = A + B - 1$ voor willekeurige $A, B \in G$. De groep is duidelijk gesloten omdat de som van twee gehele getallen altijd weer een geheel getal is. We zien dat het neutrale element 1 is (ga na). Hieruit volgt dat de inverse A' gegeven is door $A?A' = A'?A = 1$, dus $A' = 2 - A$. Voor alle $A \in \boldsymbol{Z}$, is een dergelijke inverse gedefinieerd. Ten slotte zien we dat: $(A?B)?C = (A + B - 1)?C = A + B - 1 + C - 1 = A + (B + C - 1) - 1 = A?(B + C - 1) = A?(B?C)$. Dus de bewerking is ook nog associatief. Hiermee is G een groep.

d.) $G = (R, \blacksquare)$, met $A \blacksquare B = (A - 1)(B - 1)$. De reële getallen zijn gesloten onder vermendigvuldiging en optellen, dus ook onder $\blacksquare$. We vinden uit de gelijkheid $A \blacksquare n = n \blacksquare A = A$ dat $n = \frac{2A-1}{A-1}$. En daarmee dat er een invers element A' moet bestaan wat gelijk is aan $A' = \frac{A\text{^}2}{(A-1)\text{^}2}$. Associativiteit volgt uit de associativiteit van vermenigvuldiging: (A$\blacksquare B) \blacksquare C = (A - 1)(B - 1) \blacksquare C = (A - 1)(B - 1)(C - 1) = (A - 1)(B \blacksquare C) = A \blacksquare (B \blacksquare C)$. Hiermee is G een groep.

Opgave 98. We lezen uit de tabel af dat de groep gesloten is en dat 0 het neutrale element is. Doordat 0 in elke kolom en rij eenmaal voorkomt zien we dat elk element een unieke inverse heeft. Associativiteit kun je voor elke instantie nagaan in de tabel.

Opgave 99. We kunnen uit de tabel hieronder zien dat deze één-op-één is met de tabel uit opgave 97a. Hiermee is $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{R2}\}$ een groep.

$\circ$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{R2}$
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{R2}$
$\boldsymbol{R2}$	$\boldsymbol{R2}$	$\boldsymbol{n}$

Opgave 100**. Stel G is een groep met bewerking $*$ en neutraal element n_G. Voor de ondergroep $H \subseteq G$, met neutraal element n_H geldt dat er een n_H^{-1} bestaat in G, zodat $n_H * n_H^{-1} = n_G$. Nu volgt er: $n_H = n_G * n_H = n_H * n_H^{-1} * n_H = n_H * n_H^{-1} = n_G$. QED.

Opgave 101. Elk element in de G is van de vorm $g^k\ met\ 1 \leq k \leq m \in N$. Nu zien we dat geldt: $\left(g^k\right)^m = (g^m)^k = n^k = n$. QED.

Opgave 103**. Stel G is de groep voortgebracht door g, met m de kleinste macht waarvoor geldt dat $g^m = n$. Omdat G gesloten is moet deze in ieder geval de m verschillende machten van g bevatten. Stel nu dat G meer dan m elementen bevat. Dan is er ten minste één $x \notin \{n, g, g^2, g^3, \dots, g^{m-1}\}$. Dat wil zeggen dat er een $k > m$ is zodat $g^k = x$. Er moet gelden $k = ym + r$, voor zekere $y, r \in N$ met $r < m$. Oftewel, we kunnen k reduceren met m totdat het niet meer gaat. Nu volgt: $g^k = g^{ym+r} = n * g^r = g^r \in \{n, g, g^2, g^3, \dots, g^{m-1}\}$.

Opgave 106*. We moeten laten zien dat r en s de groep S_3 voortbrengen. We zien in ieder geval dat $s^2 = r^3 = n$. En dat de elementen n, s, r, r^2 bevat zijn in de groep. Schrijf $s = (12), r = (123)$. We zien dat $s \circ r = (123)(12) = (23)$, en $s \circ r^2 = (132)(12) = (13)$. De groep voortgebracht door r, s bevat dus drie rotaties en drie spiegelingen. De groep is S_3.

Opgave 107. Zie vorige opgave.

Opgave 108. De groep bevat 4 spiegelingen en 4 rotaties. Twee spiegelingen over de diagonalen en twee spiegelingen midden door overstaand parallelle assen. Een groepstabel laat eenvoudig de groepsstructuur zien.

Opgave 109. De groep wordt voortgebracht door -1.

Opgave 112**. Voor twee elementen $g_1, g_2 \in G$ moet gelden $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$. We zien:

$$(g_1 * g_2)^2 = n_G$$

$$g_1 * g_2 * g_1 * g_2 = n_G$$

$$g_1 * g_2 * g_1 * g_2 * (g_2 * g_1) = g_2 * g_1$$

$$g_1 * g_2 * (g_1 * (g_2 * g_2) * g_1) = g_2 * g_1$$

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

Opgave 123. Schrijf $r = (123)$ en $s = (12)$. Nu geldt $rs = (123)(12)$. We zien $1 \mapsto 2 \mapsto 1$. En $2 \mapsto 3$. En ten slotte: $3 \mapsto 1 \mapsto 2$. Dus $rs(1) = 1, rs(2) = 3$ en $rs(3) = 2$, dus $rs = (23)$.

Opgave 126**. We gaan na wat $\boldsymbol{B'AB}$ doet met de elementen die het permuteert.

Stel $x = \boldsymbol{B}(i)$ met $i \in \{a, b, \dots, m\}$. Dan geldt $\boldsymbol{B'AB}(x) = \boldsymbol{BA}(i) = \boldsymbol{B}(i+1)$. Voor alle $i \in \{a, b, \dots, m-1\}$. Als $x = \boldsymbol{B}(m)$ dan geldt $\boldsymbol{B'AB}(x) = \boldsymbol{BA}(m) = \boldsymbol{B}(a)$.

We zien dat $\boldsymbol{B'AB}$ alle elementen in $\{a, b, \dots, m\}$ netjes doorschuift. Stel $x = \boldsymbol{B}(s)$, met $s \notin\in \{a, b, \dots, m\}$. Dan geldt $\boldsymbol{B'AB}(x) = \boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B'}(s)) = \boldsymbol{BB'}(s) = s$. Met andere woorden. $\boldsymbol{B'AB'}$ laat alle elementen op hun plek die niet in $\{a, b, \dots, m\}$ zitten. We kunnen daarom concluderen dat $\boldsymbol{B'AB} = (\ \boldsymbol{B}(a)\boldsymbol{B}(b) \dots\ \boldsymbol{B}(m))$. QED

Opgave 127. Dit resultaat volgt direct uit de vorige opgave. **B'AB** en **A** permuteren dezelfde elementen en laten anderen beiden op hun plaats.

Opgave 128*. Schrijf $\boldsymbol{A} = (a_1 a_2 \dots a_m)$ en $\boldsymbol{B} = (b_1 b_2 \dots b_m)$. Definieer nu een permutatie $\boldsymbol{P}$ zo danig dat $\boldsymbol{P}(a_i) = b_i$, voor alle $i \in \{1,2, \dots m\}$. Nu geldt volgens opgave 126 dat:

$\boldsymbol{P'AP} = \big(\boldsymbol{P}(a_1)\boldsymbol{P}(a_2) \dots \boldsymbol{P}(a_m)\big) = (b_1 b_2 \dots b\_m) = \boldsymbol{B}.$ QED**.**

Opgave 130. $\boldsymbol{B'AB} = (243)(12)(34)(234) = (13)(24).$

Opgave 131. Dit zijn de andere spiegelingen (13) en (23), volgens opgave 126 tm 128.

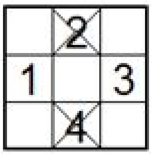
Opgave 134. Stel $(G,*)$ is abels, met twee elementen a, b. Er geldt eenvoudig: $b' * a * b = b' * b * a = n * a = a$. QED.

Uitwerking opgave 135:

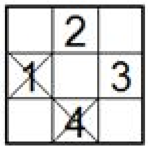
Alle 4 de blokjes omdraaien:

O1 y2 O1

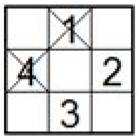
De blokjes 2 en 4 omdraaien:



wordt door het uitvoeren van **O1:**



Vervolgens de kubus rechtsom draaien (y-draai):

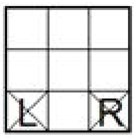


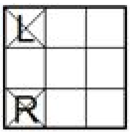
en als laatste weer **O1** uitvoeren.

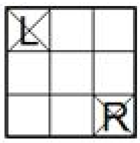
Uitwerking opgave 136:

- Als we O2 twee keer toepassen dan krijgen we dat het rechter hoekblokje naar links gedraaid is en het linker hoekblokje naar rechts.
  Dat algoritme hebben we “Chameleon” (A6) genoemd.
  (Eigenlijk moeten we de kubus eerst een kwartslag naar links draaien en aan het eind weer naar rechts: A6 = y’ O2 O2 y)

- De “Bowtie” (A7) krijgen we door O2 twee keer uit te voeren, waarbij we daar tussenin even de kubus een kwartslag naar rechts draaien (y draai):

  Eerst O2: 

 dan y: 

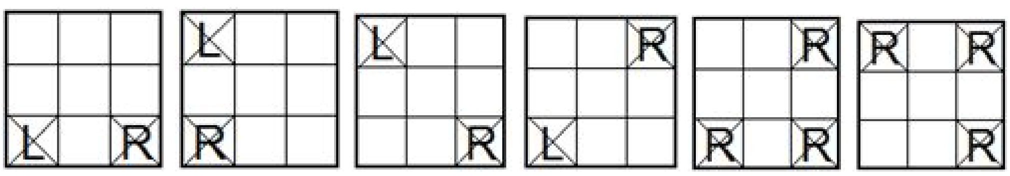
 en tenslotte O2: 

  Dus A7 = O2 y O2

- De “Car” (A3) krijgen we door O2 twee keer uit te voeren met daar tussenin even de kubus een halve slag draaien. (A3 = O2 y2 O2)

- De “Blinker” (A4) komt overeen met:
  y’ O2 y’ A6 en dus y’ O2 y’ y’ O2 O2 y en dat is y’ O2 y2 O2 O2 y.

- De “Sune” (A1) krijgen we als we naar de volgende reeks kijken:



  met het bijbehorende algoritme: O2 y O2 y’ O2 y’.

Bedenk hierbij dat als een hoekblokje 2 keer naar links gedraaid wordt, dat hetzelfde is als wanneer het blokje 1 keer naar rechts gedraaid wordt.

- De “Antisune” (A2) gaat op soortgelijke manier: O2 y2 O2 y’ O2 y

Uitwerking opgave 138:

Als alle hoekblokjes maximaal verkeerd zitten (allemaal waarde 2) dan is de totale waarde van de hoekblokjes 8*2=16; als ze allemaal goed zitten dan is de waarde gelijk aan 0.
De mogelijke uitkomsten lopen dus van 0 tot en met 16.

Totale waarde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Waarde modulo 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

Uitwerking opgave 139:

De getallen die gelijk zijn aan 0 modulo 3 zijn alle veelvouden van 3; de getallen die gelijk zijn aan 0 modulo 7 zijn alle veelvouden van 7. Dus de getallen van 0 tot en met 100 die zowel gelijk zijn aan 0 modulo 3 als aan 0 modulo 7, zijn de getallen 0, 21, 42, 63 en 84.
Merk op dat dat allemaal veelvouden zijn van 3*7.

Uitwerking opgave 140:

De getallen die gelijk zijn aan 1 modulo 3 zijn de getallen die bij delen door 3 een rest van 1 geven:
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49.
De getallen 2 modulo 7 zijn alle veelvouden van 7 plus 2:
2, 9, 16, 23, 30, 37, 44
De getallen die dus zowel gelijk zijn aan 1 modulo 3 als aan 2 modulo 7 zijn dus de getallen:
16 en 37

Uitwerking opgave 141:
Het rijtje is h4 h3 h2 h1 en het aantal verkeerde tweetallen is 3 + 2 + 1 = 6

Uitwerking opgave 142:
7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28

Uitwerking opgave 143:
$(n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2}(n^2-n)$