Redeneren met onzekerheid

Onderwerpen:

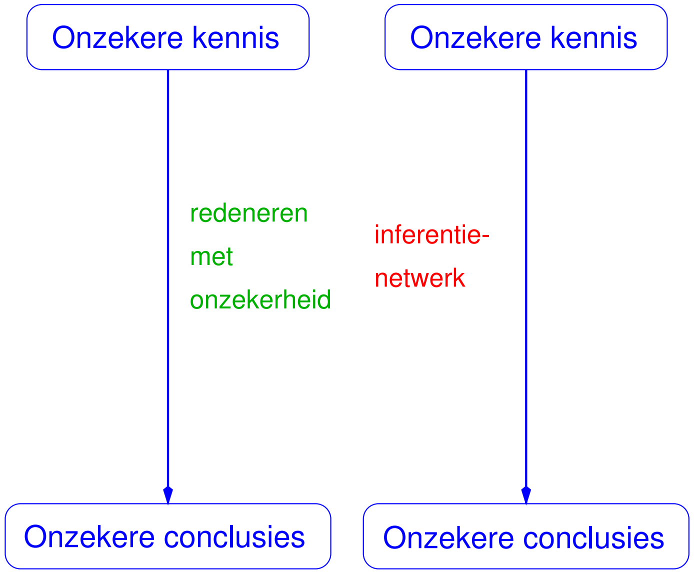
- waarom speelt onzekerheid een belangrijke rol?
- hoe leggen we onzekere kennis vast?
- ontwikkelingen:
  - jaren 1980 aanpak: representatie in regels (MYCIN, Prospector)
  - jaren 1990 tot heden aanpak: netwerkmodellen (Bayesian networks – Munin)
  - laatste ontwikkelingen: integratie van netwerkmodellen en logica (Markov logica) (weer terug bij af?)

Redeneren met onzekerheid

Onzekere kennis:

- Het gaat morgen misschien regenen
- Ik hoop het tentamen Intelligente Systemen te halen
- Ernstige hoofdpijn kan wijzen op de aanwezigheid van een hersentumor
- Beatrix is ongeveer 60 jaar oud
- De kans op een recessie is klein

Redeneren met onzekerheid



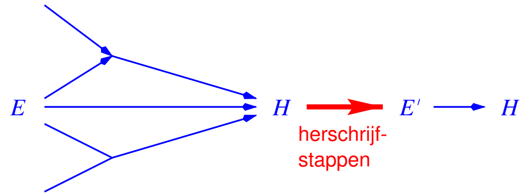
Manipulatie van onzekerheid in regels

Gegeven:

- Aanwijzingen E (‘Evidence’)
- Hypothese H
- Inferentienetwerk: graafrepresentatie van o.b.v. top-down inferentie geslaagde regels

Redeneren met onzekerheid:

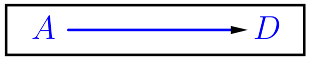
- Herschrijven van inferentienetwerk tot één pijl $E' \rightarrow H$
- Propagatie van onzekerheid



Constructie van inferentienetwerk

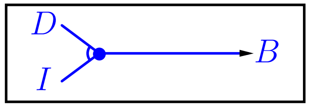
(1) Slagen van productieregel van de vorm:

if A **then** D **fi**



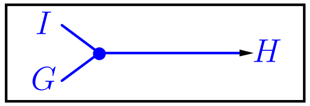
(2) Slagen van productieregel van de vorm:

if D **and** I **then** B **fi**



(3) Slagen van productieregel van de vorm:

if I **or** G **then** H **fi**



Voorbeeld inferentienetwerk

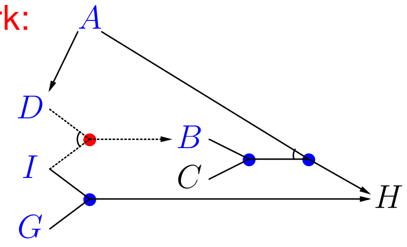
Gegeven:

- Verzameling productieregels:

$$\mathcal{R} = \{R_1 : \textbf{if } A \textbf{ and } (B \textbf{ or } C) \textbf{ then } H \textbf{ fi},$$
$$R_2 : \textbf{if } D \textbf{ and } I \textbf{ then } B \textbf{ fi},$$
$$R_3 : \textbf{if } I \textbf{ or } G \textbf{ then } H \textbf{ fi},$$
$$R_4 : \textbf{if } A \textbf{ then } D \textbf{ fi}\}$$

- Hypothese H (doel)
- Feitenverzameling: $F = \{A, C, \neg I, G\}$

Inferentienetwerk:



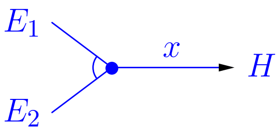
Representatie van onzekerheid

- E: aanwijzingen (evidence)
- H: hypothese

if E_1 **and** E_2 **then** H_x **fi**

Observatie van E_1 èn E_2 bevestigt hypothese H met zekerheid x

- Inferentienetwerk:



Manipulatie van onzekerheid in regels

Combinatiefuncties (herschrijfregels):

(1) Propagatie van onzekerheid in aanwijzingen: f_{prop}

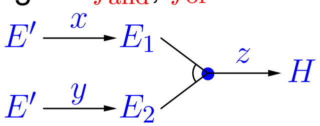
if E **then** H_y **fi** $\quad E' \xrightarrow{x} E \xrightarrow{y} H$

$$\Downarrow$$

$$E' \xrightarrow{f_{\text{prop}}(x,y)} H$$

(2) Samengestelde aanwijzingen: f_{and}, f_{or}

if E_1 **and** E_2 **then** H_z **fi**



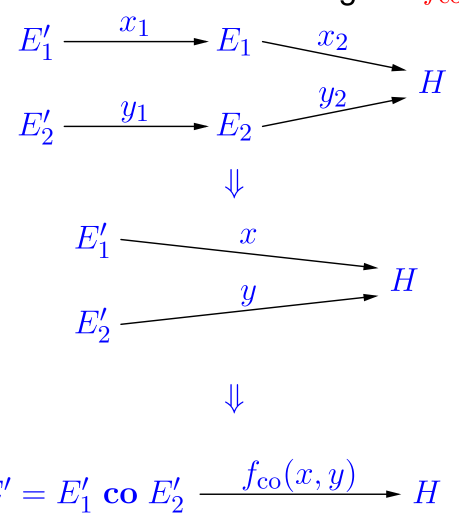
$$\Downarrow$$

$$E' \xrightarrow{f_{\text{and}}(x,y)} E_1 \textbf{ and } E_2 \dashrightarrow$$

Combinatiefuncties (vervolg)

(3) Combinatiefunctie voor co-concluderende regels: f_{co}

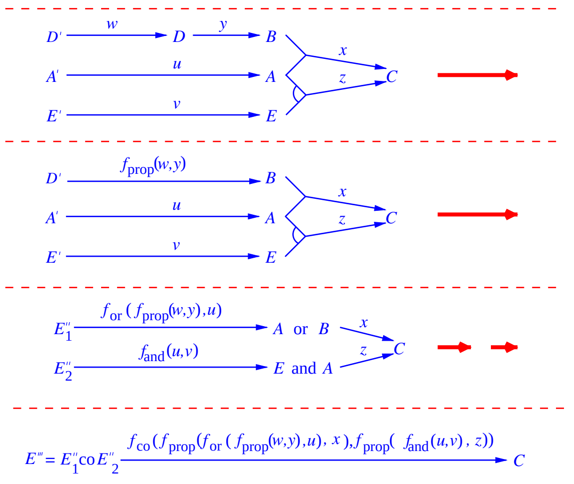
if E_1 **then** H_{x_2} **fi**
if E_2 **then** H_{y_2} **fi**



Voorbeeld

if A **or** B **then** C_x **fi**
if D **then** B_y **fi**
if E **and** A **then** C_z **fi**

$F = \{D_w, A_u, E_v\}$



Basisaanpak

- Kies een geschikte theorie
- Vind een invulling voor de combinatiefuncties f_{and}, f_{or}, f_{prop}, f_{co}
- Implementeer de combinatiefuncties als onderdeel van een inference engine

Voorbeelden:

- Certainty-factor model (Mycin)
- Subjectieve Bayesiaanse methode (Prospector)
- Ishizuka's regelgebaseerde vereenvoudiging van Dempster-Shafer theorie

Herhaling: kansrekening

- *Kansverdeling P:* voeg een getal uit het interval $[0, 1]$ toe aan *Boolse expressies*
- *Boolse algebra $\mathcal{B}$* (voor twee variabelen *rain* en *happy*):

  $\top$ (true),
  rain, $\neg$*rain*,
  happy, $\neg$*happy*,
  rain $\wedge$ *happy*,. . ., *rain* $\wedge$ *happy* $\wedge$ $\neg$*happy*, . . .,
  $\neg$*rain* $\wedge$ *happy*,. . ., *rain* $\vee$ *happy*,
  $\neg$*rain* $\vee$ *happy*,. . ., $\perp$ (false)

  zodanig dat:
  - $\perp \leq$ *rain*, *rain* $\leq$ (*rain* $\vee$ *happy*), . . . (in het algemeen $\perp \leq x$ voor elke Boolse expressie $x \in \mathcal{B}$);
  - $x \leq \top$ voor elke Boolse expressie $x \in \mathcal{B}$

Kansverdeling

- Een kansverdeling P is gedefinieerd als een functie $P : \mathcal{B} \to [0,1]$, zodanig dat:
  - $P(\bot) = 0$
  - $P(\top) = 1$
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$, als $A \wedge B = \bot$ met $A, B \in \mathcal{B}$
- Voorbeelden:
  - $P(\textit{rain} \vee \textit{happy}) = P(\textit{rain}) + P(\textit{happy})$, als $\textit{rain} \wedge \textit{happy} = \bot$ (waarom? omdat ik het zo definieer)
  - $P(\textit{rain} \wedge \textit{happy}) = P(\bot) = 0$
  - $P(\neg\textit{rain} \vee \textit{rain}) = P(\neg\textit{rain}) + P(\textit{rain}) = P(\top) = 1$
    $\Rightarrow P(\neg\textit{rain}) = 1 - P(\textit{rain})$
  - $0 \leq P(\textit{rain}) \leq 1$

Kansverdeling

- *Boolse algebra's (verzamelingen):*
  - $\top \Leftrightarrow \Omega$
  - $\bot \Leftrightarrow \varnothing$
  - $a \Leftrightarrow A$
  - $\neg a \Leftrightarrow \bar{A}$
  - $(a \vee b) \Leftrightarrow (A \cup B)$
  - $(a \wedge b) \Leftrightarrow (A \cap B)$
  - $a \leq (a \vee b) \Leftrightarrow A \subseteq (A \cup B)$

  met $\Leftrightarrow$ 1-1 afbeelding, e.g. $P(\overline{\text{Rain}}) = 1 - P(\text{Rain})$
- *Voorwaardelijke kansverdeling:* $P(\textit{happy} \mid \textit{rain})$, d.i. kans op *happy* aannemend dat *rain* is waar

Voorwaardelijke kans

(Voorbeeld: *griep* en *koorts*)

- $P(\textit{griep} \wedge \textit{koorts})$: kans op griep en koorts tegelijk
- $P(\textit{griep} \mid \textit{koorts})$: kans op griep als bekend is dat de persoon koorts heeft (voorwaardelijke kans)
- Definitie: $P(H \mid E) = P(H \wedge E)/P(E)$, dus:

$$P(\textit{griep} \mid \textit{koorts}) = \frac{P(\textit{griep} \wedge \textit{koorts})}{P(\textit{koorts})}$$

Pas $P(\textit{griep} \wedge \textit{koorts})$ aan, zodanig dat onzekerheid m.b.t. 'koorts' verwijderd wordt

Omkering van kansen

- Kansrekening en het omkeren van kansen:

$$\textit{griep} \xleftarrow{P(\textit{griep}|\textit{koorts})} \textit{koorts}$$

H (hypothese) — E (aanwijzingen)

$P(H|E)$ is vrijwel altijd niet gegeven

- Gegeven: $P(E|H)$: $P(\textit{koorts}|\textit{griep}) = 0.9$; $P(H)$: $P(\textit{griep}) = 0.05$; $P(E)$: $P(\textit{koorts}) = 0.09$

$$\textit{griep} \xrightarrow{P(\textit{koorts}|\textit{griep})} \textit{koorts}$$

$P(\textit{griep}) = 0.05$ — $P(\textit{koorts}) = 0.09$

- Regel van Bayes (kansomkeerder):
  $P(H \mid E) = P(E \mid H)P(H)/P(E)$

Regel van Bayes en marginalisatie

- Regel van Bayes – omkeren van kansen:
  $P(\textit{koorts} \mid \textit{griep}) = 0.9$
  $P(\textit{griep}) = 0.05$
  $P(\textit{koorts}) = 0.09$

  $P(\textit{griep} \mid \textit{koorts}) = \frac{P(\textit{koorts}|\textit{griep})P(\textit{griep})}{P(\textit{koorts})} = 0.9 \cdot 0.05/0.09 = 0.5$
- Marginalisatie en conditioneren:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \wedge H) + P(E \wedge \neg H) \\ &= P(E \mid H)P(H) + P(E \mid \neg H)P(\neg H) \end{aligned}$$

  want $P(E) = P(E \wedge \top) = P(E \wedge (H \vee \neg H)) = P((E \wedge H) \vee (E \wedge \neg H))$, en $(E \wedge H) \wedge (E \wedge \neg H) = \bot$

Samenvatting

- Besproken: algemene aanpak voor redeneren met onzekere kennis in regels
- Deze hebben hun beperkingen (welke?)
- Vandaar:
  - benutten van kansrekening
  - maar kansrekening heeft ook zijn beperkingen (welke?)
- Beste oplossing tot op heden: Bayesiaanse (probabilistische) netwerken

Regelgebaseerde onzekere kennis

Productieregel voor onzekere classificatie:

- *koorts* $\wedge$ *spierpijn* $\Rightarrow$ *griep*$_{\mathrm{CF}=0.8}$

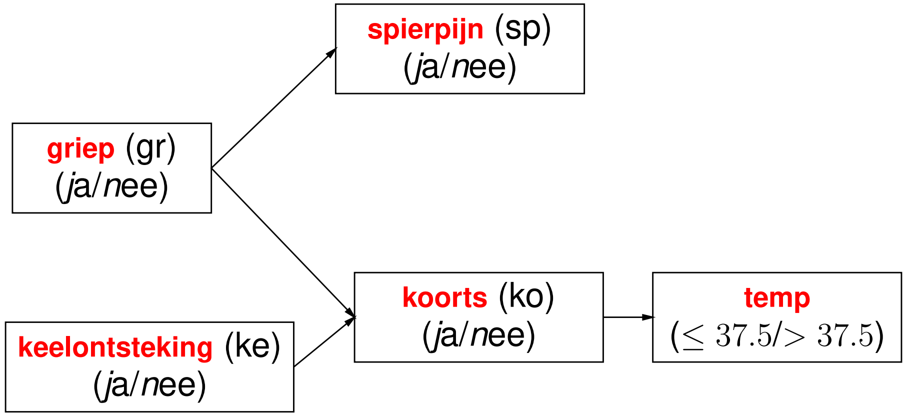
  (of **if** *koorts* **and** *spierpijn* **then** *griep*$_{\mathrm{CF}=0.8}$ **fi**)
- Onzekerheidscalculus (CF-model, subjectieve Bayesiaanse methode):
  - $\mathrm{CF}(\textit{koorts}, B) = 0.6$;
    $\mathrm{CF}(\textit{spierpijn}, B) = 1$
    (B is achtergrondkennis)
  - Combinatiefuncties:
    $\mathrm{CF}(\textit{griep}, \{\textit{koorts}, \textit{spierpijn}\} \cup B)$
    $= 0.8 \cdot \max\{0, \min\{\mathrm{CF}(\textit{koorts}, B), \mathrm{CF}(\textit{spierpijn}, B)\}\}$
    $= 0.8 \cdot \max\{0, \min\{0.6, 1\}\} = 0.48$

Maar $\cdots$

$$\textit{koorts} \wedge \textit{spierpijn} \Rightarrow \textit{griep}_{\mathrm{CF}=0.8}$$

- Hoe waarschijnlijk is het optreden van *koorts* of *spierpijn* bij *griep*?
- Hoe waarschijnlijk is het optreden van *koorts* of *spierpijn* bij *geen griep*?
- Hoe waarschijnlijk is *griep* als alleen *koorts*?
- Hoe waarschijnlijk is *geen griep* als alleen *koorts*?

Bayesiaanse netwerken



Kansspecificatie

- ***Zonder* onafhankelijkheden:**

  $P(\textit{temp}, \textit{ko}, \textit{sp}, \textit{gr}, \textit{ke}) =$
  $P(\textit{temp}|\textit{ko}, \textit{sp}, \textit{gr}, \textit{ke}) \times P(\textit{ko}|\textit{sp}, \textit{gr}, \textit{ke})$
  $\times P(\textit{sp}|\textit{gr}, \textit{ke}) \times P(\textit{gr}|\textit{ke}) \times P(\textit{ke})$

  Aantal kansen: 31 $(\times 2)$

- ***Met* onafhankelijkheden:**

  $P(\textit{temp}, \textit{ko}, \textit{sp}, \textit{gr}, \textit{ke}) =$
  $P(\textit{temp}|\textit{ko}) \times P(\textit{ko}|\textit{gr}, \textit{ke}) \times P(\textit{sp}|\textit{gr}) \times P(\textit{gr}) \times P(\textit{ke})$

  Aantal kansen: 10 $(\times 2)$

Algemeen: $\boxed{P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i|\pi(X_i))}$

$(\pi(X_i)$: directe voorgangers van knoop $X_i)$

Kansspecificatie 2

$$\boxed{P(\text{temp}, \text{ko}, \text{sp}, \text{gr}, \text{ke})}$$

$P(\text{sp} = y|\text{gr} = y) = 0.96$

$P(\text{sp} = y|\text{gr} = n) = 0.20$

$P(\text{gr} = y) = 0.1$

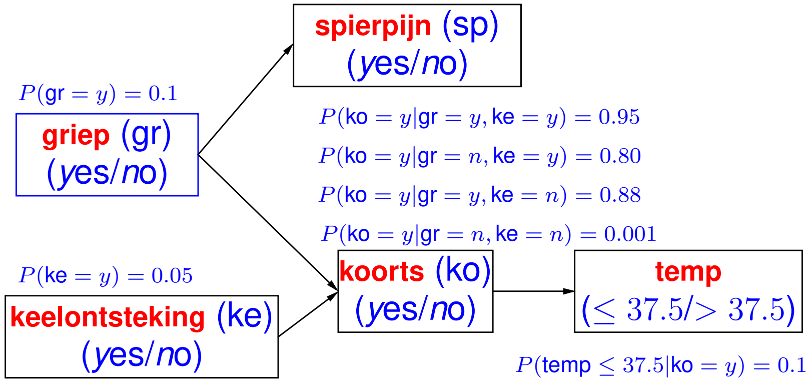
$P(\text{ko} = y|\text{gr} = y, \text{ke} = y) = 0.95$

$P(\text{ko} = y|\text{gr} = n, \text{ke} = y) = 0.80$

$P(\text{ko} = y|\text{gr} = y, \text{ke} = n) = 0.88$

$P(\text{ko} = y|\text{gr} = n, \text{ke} = n) = 0.001$

$P(\text{ke} = y) = 0.05$

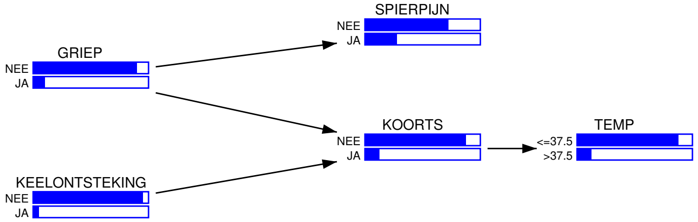


$P(\text{temp} \leq 37.5|\text{ko} = y) = 0.1$

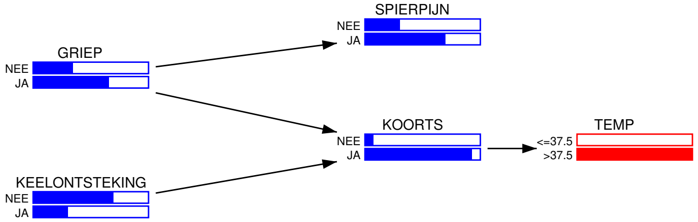
$P(\text{temp} \leq 37.5|\text{ko} = n) = 0.99$

Inferentie: propagatie van aanwijzingen

- Niets bekend:

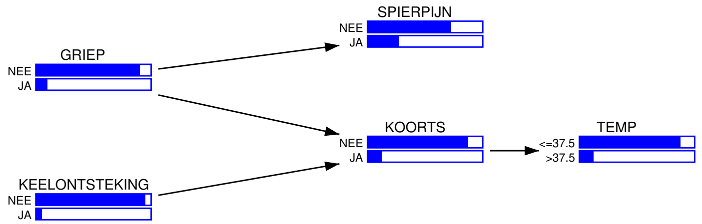


- Temperatuur > 37.5 graden Celcius:

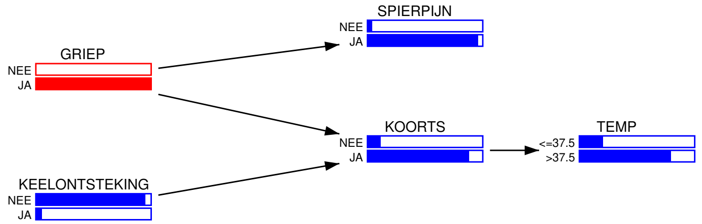


Inferentie: propagatie van aanwijzingen

- Niets bekend:



- Welke verschijnselen bij griep?



Non-Hodgkin-lymfoom van de maag

(met Dr. H. Boot en Dr. B. Taal, NKI) Maag-NHL: kwaadaardige ziekte, veroorzaakt door Helicobacter pylori

Medische vraagstellingen:

- Wat is de beste therapie?
  - bestraling (radiotherapie)?
  - chemotherapie?
  - eerst chemotherapie, daarna radiotherapie?
  - operatieve verwijdering maag?
  - antibiotische therapie?
- Prognose?
- Klinische verschijnselen?