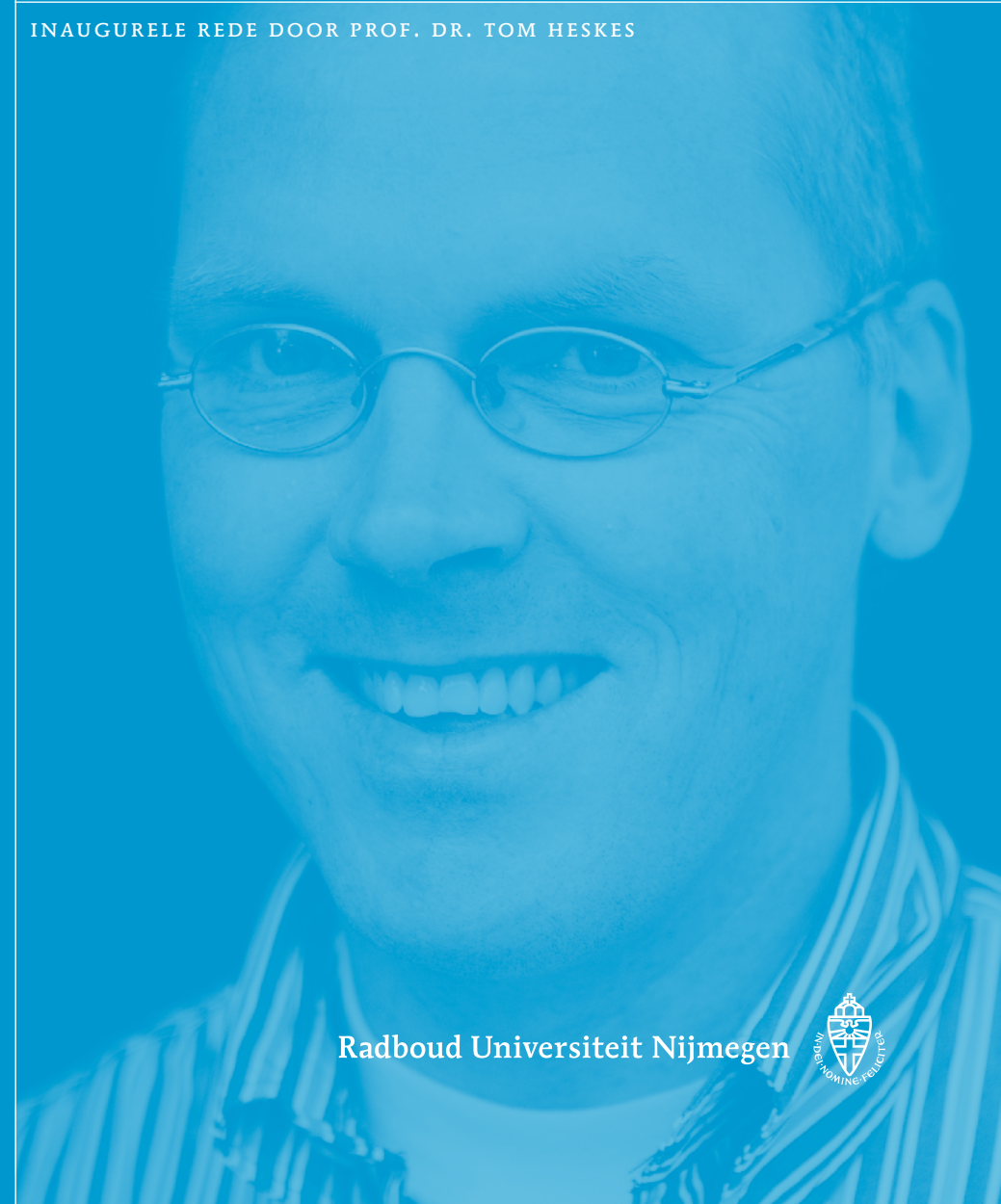


Computers met hersenen

INAUGURELE REDE DOOR PROF. DR. TOM HESKES



Radboud Universiteit Nijmegen



INAUGURELE REDE

PROF. DR. TOM HESKES



Hoe neem je de beste beslissingen als je kennis beperkt is? In theorie moet je dan gebruikmaken van kansberekening, meer specifiek de regel van Bayes. In de praktijk is de Bayesiaanse beslistheorie onmogelijk exact door te rekenen. Onderzoekers op het gebied van de kunstmatige intelligentie steken daarom veel

energie in het ontwikkelen van goede benaderingen. Tom Heskes is een van hen. De lerende systemen die hij bouwt, worden ingezet voor het personaliseren van gehoorapparaten, het analyseren van hersensignalen voor brain-computer-interfaces en het zoeken naar patronen in biologische data.

Ook gebruikt Heskes zijn modellen voor het begrijpen van ons brein. Er is steeds meer evidentie dat ook ons brein dicht tegen een Bayesiaanse machine aan zit. Niet zozeer bij het bewust, expliciet redeneren met onzekerheid, als wel bij het onbewust, impliciet verwerken van informatie. Met dank aan Bayes worden niet alleen onze computers steeds slimmer, maar begrijpen we ook steeds beter waarom we zelf zo slim zijn, en soms ook niet...

Prof. dr. T.M. (Tom) Heskes (Nijmegen, 1966) is hoogleraar Kunstmatige intelligentie, in het bijzonder machinaal leren. De leeropdracht is gevestigd binnen het Institute for Computing and Information Sciences (ICIS). In 2006 ontving hij een Vici-subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek om in vijf jaar tijd een eigen onderzoeksgroep op te bouwen.

COMPUTERS MET HERSELEN

Computers met hersenen

Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar Kunstmatige intelligentie, in het bijzonder machinaal leren aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit Nijmegen op donderdag 8 oktober 2009

door prof. dr. T.M. (Tom) Heskes

Vormgeving en opmaak: Nies en Partners bno, Nijmegen
 Fotografie omslag: Dick van Aalst
 Drukwerk: Drukkerij Roos en Roos, Arnhem

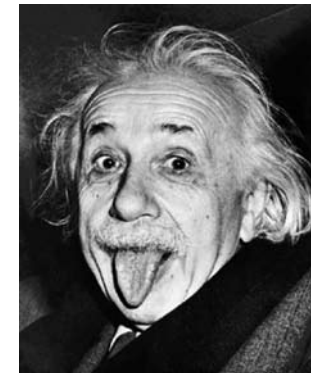
ISBN 978-90-9024715-1

© Prof. dr. T.M. Heskes, Nijmegen, 2009

Niets uit deze uitgave mag worden vermenigvuldigd en/of openbaar worden gemaakt middels druk, fotokopie, microfilm, geluidsband of op welke andere wijze dan ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de copyrighthouder.

Mijnheer de rector magnificus, geachte leden van het college van bestuur, zeer gewaardeerde toehoorders,

Ik zal het u maar meteen eerlijk bekennen. Ik vind computers nog altijd behoorlijk dom. Waarschijnlijk bent u dit wel met mij eens: u heeft uw computer vast ooit voor iets ergers uitgemaakt. Maar, en nou komt het, ik vind ons mensen ook niet zo heel erg slim. We moeten dan ook niet proberen mensen in detail na te gaan bootsen als we computers slimmer willen maken. In de loop van mijn verhaal zal ik dit toelichten. Voorlopig hoop ik maar dat u zich niet al te zeer beledigd voelt. Vooral ook omdat u zich in zeer goed gezelschap bevindt (figuur 1).



Figuur 1: Zelfs de slimste wetenschappers kunnen dom uit de hoek komen.

REDENEREN MET ONZEKERHEID

Het onderzoeksgebied waar ik het met u over wil hebben om mijn punt te maken, is 'redeneren met onzekerheid'. Onzekerheid speelt een rol bij zo'n beetje elke keuze die we maken. Deze onzekerheid kan een gevolg zijn van ruis door onnauwkeurige sensoren of voortkomen uit een gebrek aan informatie, bijvoorbeeld over wat er in de toekomst gaat gebeuren. Redeneren met onzekerheid kan bewust plaatsvinden, bijvoorbeeld wanneer je de kans inschat dat het gaat regenen om te bepalen of je wel of geen paraplu meeneemt bij het uitlaten van de hond (figuur 2), maar het kan ook volledig onbewust gebeuren, bijvoorbeeld wanneer je een tennisbal probeert te raken die op je afkomt.

Hoe moet je dat nu doen, redeneren met onzekerheid? Er zijn talrijke, vooral wiskundige, argumenten die erop wijzen dat de zogenaamde Bayesiaanse beslistheorie de enige coherente, consistente en rationele manier is om te redeneren met onzekerheid¹. Alle andere theorieën die zijn bedacht, zoals de *fuzzy logic* en de *certainty factor analysis*, hebben voor specifieke doeleinden hun waarde, maar leiden ooit ergens tot tegenspraak. Wellicht het sterkste argument voor de Bayesiaanse theorie is het zogenaamde *Dutch book*-argument². Een *Dutch book* is een loterij waarbij de posities zodanig zijn ingenomen dat de *bookmaker*, ongeacht de uitkomst van het lot, altijd winst maakt. De *Dutch book*-stelling laat zien dat, wanneer je de Bayesiaanse theorie niet



Figuur 2: Neem je nu wel of geen paraplu mee bij het uitlaten van je hond?

aanhangt, er altijd zo'n *Dutch book* te bedenken valt: een loterij die je volgens je eigen niet-Bayesiaanse normen en waarden zou moeten accepteren, maar die je toch gegarandeerd verlies oplevert. En dat willen we natuurlijk niet.

De kern van de Bayesiaanse theorie is het gebruik van kansen om onzekerheid te kwantificeren en meer specifiek de regel van Bayes om deze kansen te combineren³. Thomas Bayes was een Engelse dominee die leefde in de achttiende eeuw. De regel die aan hem wordt toegeschreven, wordt gebruikt om kansen aan te passen in het licht van nieuwe informatie. Een voorbeeld. Ik raad u aan hier goed op te letten, want straks volgt de overhoring. Stel dat u in eerste instantie, wij zeggen dan duur a priori, de kans dat het buiten regent inschat op 20 procent. Vervolgens krijgt u extra informatie: u ziet iemand binnenkomen met een paraplu. Aan de hand van deze informatie wilt u de inschatting van de kans op regen aanpassen tot een, wat wij dan noemen, a posteriori, achteraf kans. Laten we verder aannemen dat u de kans dat een binnenkomend iemand een paraplu bij zich heeft, inschat op 70 procent als het regent en op 10 procent als het niet regent⁴. Dit legt het kansmodel vast: het beschrijft de kans op een observatie, paraplu, gegeven de toestand van de variabele, wel of geen regen, waar we in geïnteresseerd zijn. De regel van Bayes vertelt ons nu dat de a posteriori waarschijnlijkheid, de achteraf kans, evenredig is met de a priori waarschijnlijkheid, de vooraf kans, maal de aannemelijkheid of *likelihood* volgens het kansmodel. Als we alles uitrekenen en ervoor zorgen dat de uitkomst weer netjes een kans is, krijgen we de formule

$$P(\text{regen} | \text{paraplu}) = \frac{P(\text{regen}) \times P(\text{paraplu} | \text{regen})}{P(\text{regen}) \times P(\text{paraplu} | \text{regen}) + P(\text{niet regen}) \times P(\text{paraplu} | \text{niet regen})}$$

$$= \frac{0.2 \times 0.7}{0.2 \times 0.7 + 0.8 \times 0.1} \approx 64\%$$

Vertaald in het Nederlands staat hier: de kans op regen gegeven paraplu is gelijk aan de a priori kans op regen maal de kans op paraplu gegeven regen en dat gedeeld door de wat vreemde term in de noemer die ervoor zorgt dat de linkerkant weer een kans is. Als we de getallen invullen, komen we op een a posteriori kans van zo'n 64 procent. De nieuwe informatie, er komt iemand binnen met een paraplu, heeft de kans op regen doen stijgen van 20 procent naar 64 procent. Als er nu nog een tweede persoon binnenkomt met een paraplu, dan kunnen we hetzelfde spelletje spelen en stijgt de kans op regen verder naar zo'n 92 procent.

MACHINAAL LEREN

Het gebruik van kansen en kanstheorie wordt gezien als een belangrijk, zo mogelijk hét belangrijkste element, van de moderne kunstmatige intelligentie. De wiskundige achtergrond wordt gedeeld met andere, langer bestaande, vakgebieden, waaronder de wiskun-

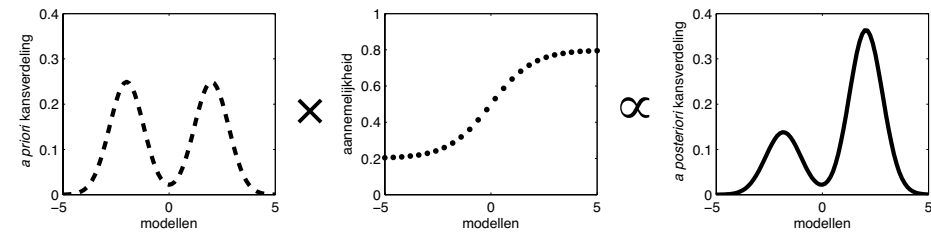
dige statistiek en de econometrie, en heeft geleid tot een sterke mate van samenwerking en kruisbestuiving. Mijn eigen onderzoek betreft met name de *machine learning*, in lelijk Nederlands: machinaal leren, het bouwen van computersystemen die kunnen leren uit data. Veel technieken binnen de *machine learning* spelen leentje-buur bij die uit de wiskundige statistiek⁵.

Een aardig voorbeeld van een lerend systeem is het voorspellingssysteem voor de losse verkoop van *De Telegraaf* dat wij zo'n tien jaar geleden voor deze krant mochten ontwikkelen. Hoeveel kranten kun je verkopen in Zandvoort als het mooi weer wordt? Of in Rotterdam als Ajax van Feyenoord heeft gewonnen? Of in Volendam, als Jan en Yolante uit elkaar gaan (figuur 3)? Je kunt aan een menselijke expert vragen een voorspelling te geven voor alle ruim tienduizend verkooppunten. Maar je kunt ook proberen een automatisch systeem te maken dat leert door op een 'slimme' manier statistiek te bedrijven op gegevens uit het verleden. Een test liet zien dat het lerende computersysteem het beduidend beter deed dan de verkoopmanagers die op het oog probeerden de verkoop te schatten⁶.

Een Bayesiaanse aanpak lijkt en is in zekere zin ook ideaal voor lerende systemen. In plaats van te spreken over één uniek optimaal model, nemen we een kansverdeling over modellen aan (figuur 4). Vervolgens komt nieuwe informatie binnen, zoals in de vorm van de meest recente verkoopgegevens in het voorbeeld van *De Telegraaf*. Met behulp van de regel van Bayes kunnen we dan de kansverdeling over modellen aanpassen.



Figuur 3: De voorpagina van *De Telegraaf* op 20 mei 2009.



Figuur 4: Bayesiaans leren. De a posteriori kansverdeling over modellen (rechts) is evenredig met het product van de a priori kansverdeling (links) en de aannemelijkheid (midden).

Deze regel zorgt ervoor dat de modellen die het best overeenkomen met de geobserveerde gegevens, waar de *likelihood* of aannemelijkheid (middelste grafiek in figuur 4) hoog voor is, waarschijnlijker worden en dat de modellen die minder goed overeenkomen met de geobserveerde gegevens juist minder waarschijnlijk worden⁷. Iets soortgelijks gebeurde ook in het eerder uitgewerkte voorbeeld: de observatie dat er iemand binnenkwam met een paraplu, was waarschijnlijker onder de aanname dat het wel regende dan onder de aanname dat het niet regende. Hierdoor ging de kans op regen omhoog en (dus) de kans op niet-regen omlaag.

GELIMITEERDE RATIONALITEIT EN OPTIMALITEIT

Dat is dan makkelijk, hoor ik u denken, het enige wat je dan hoeft te doen is een computerprogrammaatje schrijven dat de regel van Bayes uitvoert en klaar is Kees. Maar helaas: het uitrekenen en bijhouden van deze kansverdeling is onbegonnen werk voor vrijwel alle interessante problemen. Zelfs de allersnelste computers haken af en, nog erger, zullen altijd af blijven haken. Het exact doorrekenen van de regel van Bayes vraagt rekentijd die de pan uitrijst, in meer technische termen is deze rekentijd exponentieel in de dimensie van het probleem⁸.

Deze zogenaamde *intractability* of onhandelbaarheid is niet specifiek voor het leren van systemen uit data met behulp van Bayesiaanse kansrekening, maar vind je terug bij allerlei problemen binnen de kunstmatige intelligentie en meer in het algemeen binnen de informatica. Rationeel gedrag is mooi, maar in de praktijk niet haalbaar, want onmogelijk door te rekenen. Een van de grondleggers van de kunstmatige intelligentie, Herbert Simon, bedacht het begrip *bounded rationality*, gelimiteerde of beperkte rationaliteit⁹: bij het streven naar rationaliteit moet ook rekening worden gehouden met allerlei beperkingen van het apparaat, de mens of computer, dat of die de berekeningen uit moet voeren. *Bounded rationality* is een concept dat van grote invloed is geweest, niet alleen binnen de kunstmatige intelligentie, maar zeker ook binnen de economie. Geïnspireerd hierop is de term *bounded optimality*¹⁰, gelimiteerde optimaliteit, bedacht. Je zou kunnen zeggen dat een systeem pas werkelijk intelligent of ‘slim’ is als het *bounded optimal* is, dat wil zeggen, optimale keuzes maakt, waarbij alle beperkende eigenschappen met betrekking tot bijvoorbeeld rekentijd en geheugencapaciteit in ogenschouw worden genomen.

Mijn streven op lange termijn is samen te vatten als het ontwikkelen van *bounded optimal*, gelimiteerd optimale lerende systemen: systemen die in eindige tijd en met eindig geheugen optimaal kunnen leren uit data en daarbij gebruikmaken van alle beschikbare kennis. Er zijn dan twee wegen om te gaan: we kunnen het exact doorrekenen van de regel van Bayes vervangen door berekenbare benaderingen, of we kunnen Bayes bij voorbaat uit het raam gooien en lerende systemen bouwen met behulp van andere probeersels. Vooralsnog zet ik in mijn eigen onderzoek in op de eerste optie: kijken hoever we kunnen komen met het goed benaderen van de Bayesiaanse berekeningen.

DE LINK MET DE NATUURKUNDE

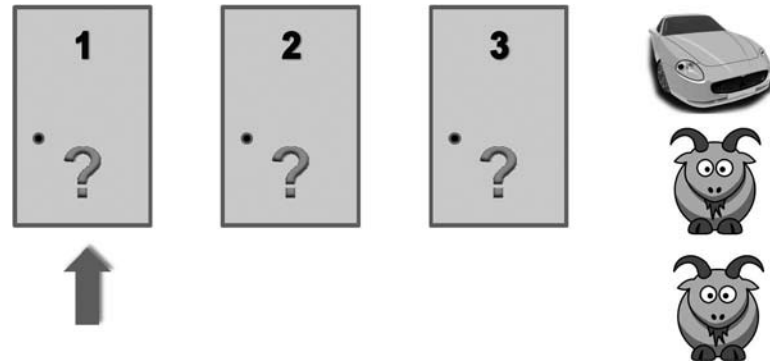
Binnen ons vakgebied kennen we dan twee klassen van benaderingsmethoden: de stochastische, toevalsmethoden en de deterministische, niet-toevalsmethoden. Veel van de toevalsmethoden, zoals de Markov Chain Monte Carlo-methoden voor de kenners, zijn ontwikkeld binnen de statistische fysica en zijn heden ten dage erg populair binnen de wiskundige statistiek¹¹. Kort door de bocht gooi je met een dobbelsteen en de kansverdeling die je krijgt als je maar vaak genoeg met die dobbelsteen hebt gegooid, is identiek aan de ‘echte’ kansverdeling. De crux zit ‘m hierbij in het vaak genoeg: je weet niet wat vaak genoeg is en dat is dan ook precies de reden dat het werkt.

De deterministische, niet-toevalsmethoden zijn minder populair in de wereld van de wiskundige statistiek. Ze worden soms zelfs een beetje vies gevonden omdat je meestal niet kunt voorkomen dat je systematische fouten maakt en niet altijd kunt laten zien dat er een of andere limiet is waarin je wel het exacte antwoord vindt. Binnen de kunstmatige intelligentie gaat het er echter vooral om dat het systeem dat je ontwikkeld hebt, in de praktijk werkt en niet zozeer dat het in een of andere irrelevante limiet foutloos is. Ook veel van de deterministische methoden vinden hun oorsprong in de statistische fysica, niet geheel toevallig het vakgebied waarin ik afgestudeerd ben. Even snel voor de fysici onder ons: veel interessante problemen, zoals het uitrekenen van marginale kansen, kunnen worden omgeschreven tot een optimalisatieprobleem en meer specifiek een soort van maximum entropie-probleem: het maximaliseren van een entropie onder randvoorwaarden. De entropie is, net als in de statistische fysica, niet exact door te rekenen, maar wel goed benaderbaar. Als we die entropie benaderen, houden we een optimalisatieprobleem over, dat nog steeds behoorlijk smerig is, maar wel binnen redelijke tijd opgelost kan worden. Dit is het basisidee achter wat door anderen het HAK-algoritme is genoemd, naar de initialen van de auteurs Heskens, Albers en Kappen¹².

Om nog even bij de natuurkunde te blijven, Einstein zei ooit:¹³ “God dobbelt niet”, om aan te geven dat hij niets zag in een interpretatie van de kwantummechanica in termen van kansen, en spendeerde een groot deel van zijn leven aan het bedenken van een alternatief. Ik ben geneigd te zeggen: “*Bounded optimal*, gelimiteerd optimale systemen dubbelen niet”: gegeven dezelfde beperking qua rekentijd en geheugen ben je met de beste deterministische benadering altijd beter af dan met de beste toevalsmethode. Recente praktische vergelijkingen tussen toevalsmethoden en deterministische, niet-toevalsmethoden wijzen steeds in deze richting¹⁴.

GEVOEL VOOR KANSEN

Zijn wij mensen *bounded optimal*, optimaal binnen onze beperkingen? Laten we eerst eens kijken hoe goed mensen zijn in het toepassen van de regel van Bayes. Hier volgt de overhoring. Stel, u bent arts en krijgt een patiënt die mogelijk malaria heeft opgelopen. Op grond van wat u van deze patiënt weet en uw jarenlange ervaring, schat u de kans op malaria in op 1 op de 100, dus 1 procent. Voor de zekerheid vraagt u een test aan, de



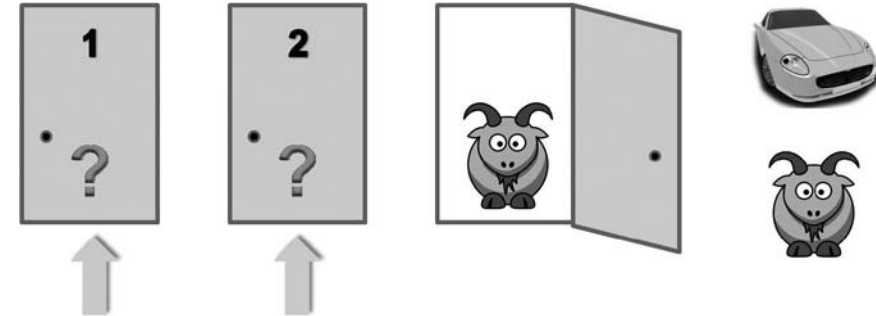
Figuur 5: Het driedeurenprobleem (1). Achter welke deur bevindt zich de auto? Stel dat uw eerste gok deur 1 is.

zogenaamde QBC-techniek, met een sensitiviteit¹⁵ van 90 procent en een specificiteit van 95 procent. Een sensitiviteit van 90 procent betekent dat van de 100 patiënten met malaria, de test er zo'n 90 als zodanig zal identificeren. Een specificiteit van 95 procent geeft aan dat de test voor 95 op de 100 niet-malariapatiënten inderdaad een negatieve uitslag geeft. Je kunt dus zeggen dat de test in meer dan 90 procent van de gevallen het juiste antwoord geeft. De test komt positief terug. Hoe groot schat u nu de kans in dat de patiënt inderdaad malaria heeft? U mag kiezen uit drie opties:

- ongeveer 90 procent
- ongeveer 50 procent
- ongeveer 15 procent

Het juiste antwoord is c, ongeveer 15 procent. Dit komt omdat, volgens de a priori inschatting, niet-malaria 99 keer waarschijnlijker is dan wel-malaria, 99 procent versus 1 procent, terwijl volgens de test wel-malaria maar 18 keer waarschijnlijker is dan niet-malaria, 90 procent versus $100 - 95 = 5$ procent, en 90 gedeeld door 5 is 18. De regel van Bayes vertelt ons dat we de a priori waarschijnlijkheid en de aannemelijkheid even zwaar moeten laten wegen en dus moeten we concluderen dat niet-malaria nog steeds ruim 5 keer waarschijnlijker is dan wel-malaria. Dit leidt dan tot de ongeveer 15 procent kans op malaria. Ik zal u en ook de hooggeleerde mensen achter mij maar niet vragen of u het goed had. David Eddy, bedenker van de term evidence-based medicine, heeft een zeer vergelijkbare casus ooit voorgelegd aan 150 Amerikaanse artsen. Maar liefst 80 procent van hen ging de mist in¹⁶.

Een ander prachtig voorbeeld is het zogenaamde driedeurenprobleem¹⁷. Stel u doet mee aan een spelshow en krijgt de keus tussen drie deuren. Achter een van de deuren staat een auto, achter de andere twee staan geiten. De auto en geiten zijn voor aanvang van de show willekeurig achter de deuren neergezet. Nadat u een deur heeft gekozen,

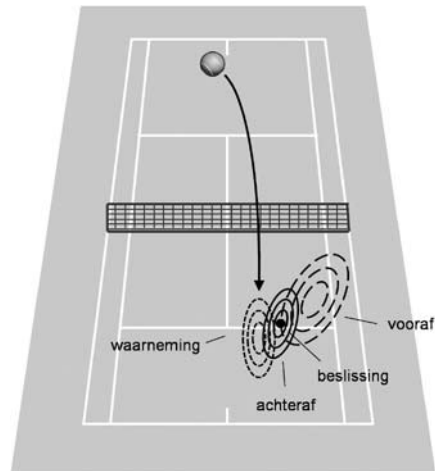


Figuur 6: Het driedeurenprobleem (2). De quizmaster opent deur 3. Kunt u nu beter switchen of niet?

laten we voor het gemak zeggen dat u deur 1 kiest (figuur 5), blijft de deur vooralsnog dicht. De quizmaster, in de Amerikaanse versie Monty Hall, in de Nederlandse Willem Ruis, die weet wat zich achter elke deur bevindt, moet nu een van de twee overgebleven deuren openen, en achter de deur die hij openmaakt moet een geit staan. Als achter beide deuren een geit staat, maakt hij een willekeurige keuze. Stel hij opent deur 3, met erachter een geit. Vervolgens vraagt hij u of u wilt vasthouden aan uw eerste keus of wilt switchen naar de andere overgebleven deur (figuur 6). Is het nu beter te switchen naar deur 2, vast te houden aan deur 1, of maakt het allemaal geen fluitenkruid uit?

Met behulp van de regel van Bayes is het vrij eenvoudig het juiste antwoord te vinden: het is beter te switchen, je verhoogt daarmee je kans van een derde naar twee derde. Dit juiste antwoord druist sterk in tegen de intuïtie van de meesten onder ons: één onderzoek liet zien dat van de 228 proefpersonen, maar 13 procent ervoor koos om te switchen¹⁸. Er zijn anekdotes over briljante wiskundigen die weigerden te geloven dat switchen inderdaad beter is en pas overtuigd konden worden met een computerprogrammaatje dat het spel nabootste¹⁹. Er zijn immers toch nog steeds twee deuren en de auto kan zich toch net zo goed achter de ene deur bevinden als achter de andere deur? Nee, niet meer 'net zo goed': door het openen van de deur met de geit, deur 3, of misschien beter door het niet openen van deur 2, heeft de quizmaster de speler extra informatie gegeven die deur nummer 2 toch echt waarschijnlijker maakt dan deur nummer 1. Ik ga hier geen poging wagen om u verder te overtuigen, want de ervaring heeft geleerd dat mensen hier alleen maar agressiever van dreigen te worden.

De twee genoemde voorbeelden staan niet op zich. Nobelprijswinnaar Kahneman en zijn collega Tversky hebben in allerlei psychologische experimenten overtuigend laten zien dat mensen bij het expliciet maken van keuzes systematisch en ernstig afwijken van de Bayesiaanse theorie²⁰. We zijn dramatisch slecht in het maken van de juiste keuzes wanneer er kansen in het spel zijn. Hoe zou dat komen? Een mogelijke verklaring is dat de representatie die wij mensen gebruiken niet rijk genoeg is: we kunnen vaak wel



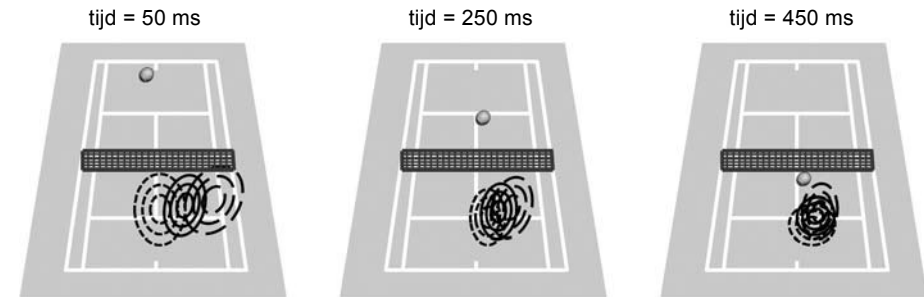
Figuur 7: Bij Bayesiaans tennissen combineren tennisspelers wat ze anticiperen met wat ze waarnemen tot een a posteriori schatting.

Om in te schatten waar de bal gaat stuiten, combineren tennisspelers idealiter wat ze van eerder weten, zeg maar wat ze anticiperen²² (de vooraf kans, weergegeven door middel van de grof gestreepte hoogtelijnen in figuur 7) met wat ze waarnemen (de aannemelijkheid, fijner gestippeld). Dit leidt dan, door de regel van Bayes, tot de achteraf kans (de doorgetrokken hoogtelijnen). Deze achteraf kans vertaalt zich in een optimale inschatting (het punt in het midden van de doorgetrokken lijnen). Het is wat lastig een goed doortimmerd experiment op te zetten om te testen of dit bij tennis ook echt zo gebeurt, maar de laatste jaren zijn wel verschillende andere eenvoudiger taken geanalyseerd, zoals het integreren van zintuiglijke informatie bij beweging, het inschatten van kracht, tijd, snelheid en het interpreteren van visuele beelden. Deze studies laten stuk voor stuk zien dat mensen op een intuïtieve manier a priori kennis combineren met nieuwe evidentie op een manier die voorspeld wordt door de regel van Bayes.

In het tennisvoorbeeld gingen we ervan uit dat er slechts op één tijdstip een schatting wordt gemaakt. Dit is niet realistisch: we blijven naar de bal kijken en passen constant onze inschatting van de balbaan aan. Het zogenaamde Kalman-filter, een dynamisch Bayesiaans netwerk, formaliseert hoe zo'n proces zou kunnen werken. Het filter gebruikt kennis over de dynamica om zijn toestandschatting op een vorig tijdstip om te rekenen naar een toestandschatting op een toekomstig tijdstip. In ons tennisvoorbeeld werkt dit dan als volgt (figuur 8). Bij de eerste waarneming wordt, net als in figuur 7, de vooraf kans (de grof gestippelde lijnen) gecombineerd met nieuwe zintuiglijke informatie (de aannemelijkheid, fijner gestippeld) tot een aangepaste schatting (de achteraf

aangeven of optie A beter of waarschijnlijker is dan optie B, maar niet hoeveel beter of hoeveel waarschijnlijker. Het laatste is wel nodig om kansen goed te kunnen combineren. Maar dan blijft de vraag waarom ons geen rijkere representatie ter beschikking staat, vooral omdat deze er voor veel andere taken wel lijkt te zijn.

BAYESIAANSE COGNITIEWETENSCHAP
Het frappante is namelijk dat in het impliciet, onbewust maken van keuzes mensen vaak beduidend dichter tegen rationaliteit aan zitten dan bij het expliciet, bewust beredeneerd maken van keuzes. Ik kan het niet laten een tennisvoorbeeld aan te halen dat recentelijk in een overzichtartikel in Science werd uitgewerkt²¹.



Figuur 8: De a posteriori verdeling op een vorig tijdstip (doorgetrokken hoogtelijnen) vertaalt zich naar een a priori verdeling op een volgend tijdstip (grof gestreept), welke vervolgens wordt gecombineerd met een nieuwe waarneming (fijner gestreept) tot een nieuwe a posteriori verdeling, enzovoort.

kans, de doorgetrokken hoogtelijnen). De grap is nu dat deze achteraf kans zich vertaalt naar een vooraf kans voor een volgend tijdstip. Deze wordt dan weer gecombineerd met een nieuwe waarneming, waarna de procedure zich steeds weer herhaalt. Deze strategie voorspelt dat onze inschatting waar de bal terechtkomt steeds wordt aangepast en steeds nauwkeuriger wordt. Ook hier geldt dat recente studies, bijvoorbeeld met betrekking tot het schatten van de positie van je hand in het donker of het balanceren van een staaf, suggereren dat mensen een Bayesiaanse strategie volgen die sterk lijkt op wat het Kalman-filter zou voorspellen.

Het brein lijkt verrassend dicht tegen een Bayesiaanse machine aan te zitten, tenminste, daar waar het gaat om voor de mens wezenlijke taken als het aansturen van bewegingen en het doen van waarnemingen. Maar ook voor het brein geldt dat het exact doorrekenen van de regel van Bayes ondoenlijk is. Een populaire hypothese binnen de cognitiewetenschappen is dan ook dat het brein benaderende Bayesiaanse kansrekening uitvoert²³.

COMPUTERS EN HERSENEN

Er blijven nog genoeg taken over waarvoor geldt dat de mens het beduidend beter doet dan de beste computer. Maar de computer is met een flinke inhaalslag bezig. Een mooi voorbeeld zijn de zogenaamde CAPTCHA's (zie figuur 9 voor een voorbeeld), die gebruikmaken van het gegeven dat mensen erg goed zijn in het herkennen van objecten²⁴.



Figuur 9: Voorbeeld van een inmiddels gekraakte CAPTCHA.

CAPTCHA staat voor 'completely automated public Turing test to tell computers and humans apart'. U bent ze vast wel eens tegengekomen: ze worden gebruikt bij persoonlijke registratie op een website om er zeker van te zijn dat er een mens en niet een geautomatiseerde bot informatie opvraagt of doorgeeft.

Het idee is dat de mens de vervormde tekens wel kan interpreteren, maar een computer niet. Na de introductie in het begin van deze eeuw is een wedloop ontstaan, vergelijkbaar met de wedloop rond spamfiltering, met partijen die proberen de CAPTCHA's te kraken en anderen die proberen betere CAPTCHA's te maken²⁵. De computers lijken aan de winnende hand te zijn: het wordt steeds lastiger om CAPTCHA's te maken die mensen wel fatsoenlijk op kunnen lossen, maar computers niet.

Vooralsnog zijn er nog genoeg taken over waar mensen beter in zijn dan computers: het herkennen van spraak, het begrijpen van mijn verhaal, het bewijzen van wiskundige stellingen, het oversteken van een drukke straat, het spelen van Go. Waarom zou het brein wel kunnen wat ons met computers nog niet is gelukt? Komt het door de hardware, dat wil zeggen, heeft een computer in vergelijking met het brein nog onvoldoende reken capaciteit, of door de software: snappen we nog niet goed genoeg hoe het brein het voor elkaar krijgt?

De hardware van het brein is inderdaad wezenlijk anders dan de hardware van een computer: waar de computer het moet doen met een beperkt aantal supersnelle en nauwkeurige processoren, heeft het brein extreem veel onnauwkeurige processors, de neuronen, die parallel kunnen worden ingezet voor het verwerken van informatie. We kunnen dit op een standaard computer een heel eind nabootsen, maar komen meestal lang niet in de buurt van de reken capaciteit van het brein. Toch zit daar volgens mij niet het probleem. In het prestigieuze Blue Brain-project benaderen supercomputers de reken capaciteit van een functionele eenheid in de hersenen. Verder beweert de leider van dit project, dat het technisch gezien mogelijk is binnen tien jaar een volledig kunstmatig brein te bouwen, mits hier voldoende geld in wordt gestoken²⁶. Collega-wetenschappers zijn sceptisch, niet eens zozeer omdat ze betwijfelen of computers dan krachtig genoeg zouden kunnen zijn, maar meer omdat er vooralsnog onvoldoende ideeën en resultaten zijn die erop duiden dat dit kunstmatige brein dan werkelijk iets zinnigs zal doen dat lijkt op intelligent gedrag. Hoe moeten we al deze neuronen koppelen op zo'n manier dat het meer is dan één grote grijze massa? Welke algoritmen gaan ervoor zorgen dat er complexe, niet-triviale eigenschappen ontstaan? Op welk detail-niveau moeten we neuronen en hun interacties modelleren om iets van intelligent gedrag voor elkaar te krijgen? Kortom, de bottom-up aanpak, van neuronen naar slimmere computers, heeft nog een lange weg te gaan.

Daarbij, meer in het algemeen, moeten we ons afvragen of het zin heeft het brein in detail na te bootsen als we een computer soortgelijke taken uit willen laten voeren. Juist door het verschil in hardware hoeft een strategie die voor een mens *bounded optimal* is, dat voor een computer niet te zijn, en andersom. De beste schaakcomputers winnen van de beste menselijke schakers, maar gebruiken een wezenlijk andere strategie. Computers hebben binnen een decennium 'geleerd' een aantal CAPTCHA's minimaal zo goed op te lossen als mensen, maar dit komt niet doordat we nu zoveel beter snappen hoe ons brein CAPTCHA's oplost.

Binnen het vakgebied van de neurale netwerken, lerende modellen geïnspireerd op de werking van het brein, is er in de loop der jaren dan ook een duidelijk schisma ontstaan. Waar hetzelfde neurale netwerk zo'n twintig jaar geleden makkelijk werd gepresenteerd als zowel een model voor informatieverwerking in het brein als ook een oplossing voor een praktisch probleem, kom je deze combinatie nu nog zeer zelden tegen. Dit lijkt teleurstellend, maar is in feite een teken dat het vakgebied volwassen is geworden. Historisch bepaald komen onderzoekers met verschillende achtergronden, de hersenonderzoekers en de informatici, elkaar nog steeds tegen op dezelfde congressen en publiceren ze in dezelfde tijdschriften, maar het is sterk de vraag wat hier nog de meerwaarde van is en hoe lang dit nog standhoudt. Voor zover mij bekend zijn er ook geen congressen en tijdschriften voor zowel vogelaars als vliegtuigbouwers²⁷.

TOEPASSINGEN

Het moge duidelijk zijn dat ik het meest heil zie in een top-down aanpak, waarbij onze kennis over de werking van het brein inspiratie kan geven voor de richting waarin we goede oplossingen kunnen vinden, maar niet veel meer dan dat. Deze top-down aanpak is de basis voor ons meer theoretische onderzoek naar betere modellen en methoden voor lerende systemen. Dit leidt dan tot diepe inzichten en moeilijke formules waar ik uren over zou kunnen vertellen, maar wellicht is het aardiger nog wat tijd te besteden aan twee praktische toepassingen die we met onze aanpak proberen te realiseren. Beide toepassingen hebben een cognitief aspect met de mens in de loop: het doel is te achterhalen wat de mens bezielt en dit te vertalen naar acties en keuzes. In beide gevallen geldt ook dat de mens zelf geen partij is voor de computer: geef een mens dezelfde ruwe data als de computer – de voorkeuren van de gebruiker bij de gehoorapparaten, de ruwe EEG- of MEG-data in het geval van de *brain computer interfaces* – en hij of zij zal er verdraaid weinig van weten te bakken.

De eerste toepassing betreft het personaliseren van gehoorapparaten. Gehoorapparaten hebben zo'n tweehonderd instelbare parameters en een van de redenen dat ze regelmatig in de la verdwijnen, is dat de audicien of audioloog er onvoldoende in geslaagd is deze parameters in te stellen naar de specifieke eigenschappen en voorkeuren van de gebruiker²⁸. Binnen het stw-project HearClip ontwerpen we een verbeterde procedure, in samenwerking met het gehoorapparatenbedrijf GN ReSound, onderzoekers van de TU Eindhoven en audiologen van het AMC Amsterdam. De geuzennaam HearClip is een knipoog naar Clippy (zie ook het logo in figuur 10), de irritante paperclip in eerdere versies van Microsoft Office die te pas en te onpas opdook. Clippy was gebaseerd op een sterk Bayesiaans



Figuur 10: Het HearClip logo.

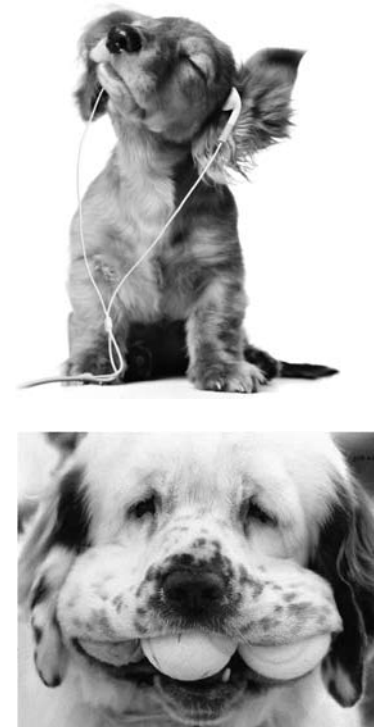
georiënteerd prototype, Lumiere²⁹. Maar juist door de Bayesiaanse principes te vervangen door harde als-dan-regels – als dit, dan dat – ging Clippy zelf de mist in. De procedure waar wij op inzetten, gaat dat niet doen en werkt als volgt. Een gebruiker krijgt twee keer hetzelfde geluidsfragment te horen, maar dan met twee verschillende instellingen van het gehoorapparaat. Hem/haar wordt gevraagd welke instelling beter is. We zouden graag vragen hoeveel beter, maar, zoals eerder gezegd, daar zijn wij mensen niet zo goed in. Op grond van de experimenten en de antwoorden van de gebruiker leren we een model, of beter gezegd een kansverdeling over modellen, die de voorkeuren van de gebruiker representeren. De Bayesiaanse aanpak heeft in theorie hier verschillende voordelen. Gegeven de kansverdeling over modellen kunnen we de optimale instelling van het gehoorapparaat berekenen, maar ook onze onzekerheid over de juistheid van deze instelling kwantificeren. Ook kunnen we uitrekenen welk nieuw experiment, een combinatie van geluidsfragment met twee verschillende instellingen van het gehoorapparaat, naar verwachting de meeste informatie zal verschaffen en deze combinatie dan aan gaan bieden in plaats van zo maar een willekeurig experiment. Verder kunnen we, met behulp van Bayesiaanse hiërarchische modellen, gebruikmaken van de overeenkomsten tussen verschillende gebruikers waardoor we nog minder experimenten nodig hebben om een goede instelling te vinden. Op bestaande audiologische datasets hebben we laten zien dat deze ideeën werken en inderdaad tot verbetering leiden³⁰. De uitdaging is nu hetzelfde te laten zien in een online en steeds realistischer setting.

Een tweede srw-project betreft *brain computer interfacing*, in samenwerking met onderzoekers van het Donders Centre for Cognitive Neuroimaging. *Brain computer interfacing* is een populair onderwerp, zeker in Nijmegen met het grote BrainGain-project waar ons eigen srw-project op vooruitliep³¹. Door de signalen aan de buitenkant van het brein te analyseren, proberen we te achterhalen wat er binnen in het brein gebeurt en wat de intentie is van de persoon in kwestie. Dit is het eenvoudigst uit te leggen aan de hand van een voorbeeld. Als ik de vingers van mijn linkerhand beweeg, verandert de hersenactiviteit in het rechtergedeelte van mijn motorcortex, en andersom: als ik de vingers van mijn rechterhand beweeg, verandert de hersenactiviteit in het linkergedeelte van mijn motorcortex. Deze veranderingen zijn met behulp van zogenaamde EEG- of MEG-metingen waar te nemen. Het stoere is nu dat deze veranderingen niet alleen optreden als ik de vingers inderdaad beweeg, maar ook als ik me inbeeld dat ik ze beweeg. Zuiver en alleen door het sturen van mijn aandacht, kan ik onderscheid maken tussen links en rechts. Dit signaal kan worden opgepikt en worden omgezet in een actie, bijvoorbeeld de verplaatsing van een cursor op een scherm of de aansturing van een robotarm. De heilige graal binnen dit onderzoeksgebied is een *brain computer interface* als communicatiekanaal voor patiënten die lijden aan een progressieve spierziekte als ALS. In het laatste stadium van hun ziekte kunnen deze patiënten hun spieren niet meer gebruiken, maar nog wel hun aandacht richten. Lerende technieken worden

gebruikt om de hersenactiviteit zo goed mogelijk te interpreteren. Vanuit *machine learning*-perspectief zijn dit zeer uitdagende problemen: het is vaak zoeken naar een speld in een hooiberg. Onze insteek hier is kennis over het brein, bijvoorbeeld over hoe hersenactiviteit zich vertaalt naar EEG-, MEG- of fMRI-metingen, waar mogelijk mee te nemen in onze modellen. We specificeren deze kennis in termen van een a priori kansverdeling die we met behulp van Bayesiaanse methoden omwerken tot een a posteriori kansverdeling, gegeven alle experimentele data. Ons streven is verbeterde technieken te ontwikkelen die niet alleen leiden tot betere *brain computer interfaces*, maar ook meer in het algemeen tot een verbeterde analyse en interpretatie van *neuroimaging*-signalen³².

LERENDE VAN MEERDERE TAKEN

Bij veel toepassingen is er niet sprake van slechts één taak, maar van een aantal parallelle taken: het voorspellen voor meerdere verkooppunten van *De Telegraaf*, het optimaliseren van de gehoorapparaten voor verschillende gebruikers, het analyseren van EEG, gemeten voor meerdere proefpersonen. Met behulp van zogenaamde *multi-task learning*-technieken, zijn we erin geslaagd de prestaties van lerende systemen te verbeteren, door de verschillende taken als het ware ‘van elkaar te laten leren’³³. Dit is op zich redelijk goed te doen, omdat de verschillende parallelle taken zeer sterk op elkaar lijken. De tijd is rijp voor de volgende stap: het ontwikkelen van multi-task learning-technieken voor taken die een stuk minder sterk op elkaar lijken. Want juist hierin lijken mensen bijzonder sterk: we ontwikkelen bijvoorbeeld iets dat we balgevoel noemen, wat dat dan ook is, als we een bepaalde balsport leren, of iets als muzikaliteit als we een muziekinstrument leren spelen. Dit geeft ons een flinke voorsprong bij het aanleren van een nieuwe sport of een nieuw instrument³⁴. Lerende computersystemen daarentegen bouwen we vrijwel altijd van de grond af aan op. Wanneer we erin slagen methoden te ontwikkelen om verschillende leertaken succesvol aan elkaar te koppelen, zal het aantal problemen dat de mens beter oplost dan de computer ongetwijfeld snel verder afnemen.



Figuur 11: Muzikaliteit en balgevoel.

DANKWOORD

Toepassingsgericht onderzoek in andere disciplines, zoals de hersenwetenschappen en de bio-informatica, waar ik helaas niet aan toegekomen ben, staat of valt met de bereidheid van wetenschappers uit deze disciplines om werkelijk samen te werken. Ik heb het zeer getroffen met inspirerende collega's als Ole Jensen, Niels Cornelisse, Bert de Vries en vele anderen.

Door externe fondsen is mijn onderzoeksgroep de laatste jaren flink gegroeid. Ik wil nwo en stw bedanken, niet alleen voor de financiële steun voor mijn onderzoek, maar ook voor het constructieve meedenken en meewerken aan praktische oplossingen. Ook de ondersteuning dichterbij huis, onder andere door FEZ en P&O van onze eigen faculteit, stel ik zeer op prijs.

Ik dank het college van bestuur en het bestuur van de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica voor het in mij gestelde vertrouwen, met daarbij direct de kanttekening dat ik maar weinig voorstel zonder mijn naaste collega's, de promovendi, postdocs en overige wetenschappelijke stafleden die vaak het echte werk doen. Adriana, Ali, Botond, Elena, Evgeni, Fabio, Janos, Marcel, Pavol, Perry, Saiden, Tom, het is een groot genoegen en een grote eer met jullie te mogen werken. Hetzelfde geldt met terugwerkende kracht voor de onderzoekers die aan de basis hebben gestaan van het feestje dat ik vandaag vier, waaronder Alexander, Bart, Onno, Piërre, Rasa en Wim. Ik ben veel dank verschuldigd aan mijn leermeesters Stan Gielen en Bert Kappen, die mij wegwijs hebben gemaakt in de wetenschappelijke wereld. Speciaal wil ik ook Tjeerd Dijkstra noemen, mijn beste vriend onder de wetenschappers en beste wetenschapper onder mijn vrienden.

Nu vijf jaar geleden stapte ik over van snn, voorheen de Stichting Neurale Netwerken, naar icis, het onderzoeksinstituut voor Computing and Information Sciences. Mijn collega's van icis wil ik hartelijk bedanken voor de plezierige sfeer en hun tolerantie voor mijn soort informatica en mijn persoon, waarin ze wat mij betreft behoorlijk doorgeslagen zijn. De vorige onderzoeksdirecteur, Bart Jacobs, bewonder ik zeer voor zijn doortastendheid en de manier waarop hij icis op de kaart heeft gezet. Bernadette, Simone, Nicole, Dan: ik kan me geen betere ondersteuning wensen.

Beste studenten informatica, informatiekunde en kunstmatige intelligentie. Mijn beweging van natuurkunde richting informatica had zeker ook als doel dichterbij jullie te komen, omdat ik ervan overtuigd was en ben dat ik jullie inmiddels meer te vertellen heb dan de studenten natuurkunde. Ik hoop van harte dat jullie hier hetzelfde over denken.

Beste collega-onderzoekers en docenten kunstmatige intelligentie/cognitiewetenschappen van het Donders Instituut. Ik vind het geweldig dat we vanuit de informatica mede invulling mogen geven aan de opleiding kunstmatige intelligentie. Onze kijk op het vakgebied is vast niet altijd dezelfde, maar ondanks dat of wellicht juist mede daardoor ben ik ervan overtuigd dat we een prachtige opleiding neerzetten.

Ook buiten het werk heb ik over geluk en steun niets te klagen. Alle clichés zijn van toepassing: fantastische ouders, die me van jongs af aan gesteund hebben en dit in hun derde jeugd nog steeds doen; overige familieleden waarover ik een vergelijkbaar verhaal af zou kunnen steken; goede tennis-, muziek- en andere vrienden voor de plezierige ontspanning.

Lieve Floor, ik kan grappen maken over hoeveel beter vrouwen zijn, en vooral jij bent, in het uitvoeren van parallelle taken en over hoe groot de kans dan is, volgens de regel van Bayes, dat ik hier zou hebben gestaan zonder jou. Ik kan de mensen in de zaal uitleggen hoe goed jij bent in jouw vak en dat ik soms zou willen dat ik in mijn vak half zo goed was, met name dit onderdeel daarvan. Het is allemaal waar, maar uiteindelijk is er maar weinig echt belangrijk en het betekent veel voor me juist dat met jou te mogen delen.

Tot slot, mijn lieve dochters, Renske en Lise. Het is geweldig jullie steeds groter en slimmer te zien worden en vol overtuiging de meest wetenschappelijk onverantwoorde teksten te horen zingen³⁵:

“Is het een vliegtuig,
is het een vogel,
nee dat is het niet,
het is Mega Mindy die je aan de hemel ziet.”

Ik zal de laatste zijn die daar iets aan wil veranderen.
Ik heb dan ook gezegd.

NOTEN

- 1 Argumenten voor een Bayesiaanse aanpak zijn te vinden in zo'n beetje elk tekstboek met 'Bayesian' in de titel. E.T. Jaynes in *Probability Theory: The Logic of Science* (Cambridge University Press, 2003) en C.P. Robert in *The Bayesian Choice: a Decision-Theoretic Motivation* (Springer, 1994) gaan zeer ver in het verdedigen van de Bayesiaanse filosofie.
- 2 De oorsprong van de term 'Dutch book' blijkt moeilijk te achterhalen. Mogelijke verklaringen zijn te vinden op <http://people.few.eur.nl/wakker/miscella/dutchbk.htm> (update van 1 maart 2009) en <http://people.virginia.edu/~pwh2a/dutch%20book%20origins.doc> (update van 6 oktober 2008).
- 3 Wat nu voor de regel van Bayes doorgaat, wordt geïmpliceerd door Thomas Bayes in zijn '*An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*' (herdruk in *Philosophical Transactions* 53:370-418, 1973) maar niet expliciet als formule opgeschreven.
- 4 Merk op dat deze kansen, de kans op paraplu gegeven regen en de kans op paraplu gegeven niet-regen, niet op hoeven te tellen tot 100 procent. Dit in tegenstelling tot de kans op paraplu gegeven regen en de kans op niet-paraplu gegeven regen, die wel op moeten tellen tot 100 procent.
- 5 Een van de standaard tekstboeken in ons vakgebied, *Elements of Statistical Learning* (Springer, 2001 en 2009), is geschreven door de statistici T. Hastie, R. Tibshirani en J. Friedman. Hét tekstboek geschreven vanuit een Bayesiaanse filosofie, *Pattern Recognition and Machine Learning* (C.M. Bishop, Springer, 2006), is mogelijk-erwijns nog meer wiskundig georiënteerd.
- 6 Verkoopmanagers leken vooral ook te 'emotioneel' te reageren op schommelingen in de meest recente verkoopcijfers, waar de statistische modellen aangaven dat de verkoop beter te voorspellen was door te middelen over een langere verkoopperiode. Het door ons gebouwde systeem staat beschreven in T. Heskes, J.J. Spanjers, B. Bakker en W. Wiegerinck, '*Optimising newspaper sales using neural-Bayesian technology*', *Neural Computing and Applications*, 12:212-219, 2003.
- 7 Meer specifiek: we krijgen de *a posteriori* kansverdeling (rechtergrafiek in figuur 4) door de *a priori* kansverdeling (linkergrafiek) en de aannemelijkheid (middelste grafiek) puntsgewijs met elkaar te vermenigvuldigen en het resultaat te delen door de oppervlakte onder de curve om ervoor te zorgen dat de rechtergrafiek weer een kansverdeling voorstelt.
- 8 Het technische probleem zit in de normering bij de regel van Bayes. Het uitrekenen van het product in de teller is meestal goed te doen. Maar om er dan weer een kans uit te krijgen, moet ook de normering in de noemer berekend worden en hiervoor moeten in principe alle mogelijke combinaties van toestanden doorgerekend worden. Dit vergt hoogdimensionale sommatie (voor discrete variabelen) of integratie (voor continue variabelen). Zonder verdere structuur is de benodigde tijd hiervoor exponentieel in het aantal variabelen.
- 9 Bijvoorbeeld: H.A. Simon, *Models of Bounded Rationality*, vols. 1, 2, MIT Press, Cambridge, MA, 1982. Het idee dat mensen niet optimaliseren, maar aan 'satisficing' doen, beschrijft Simon voor het eerst in '*A behavioral model of rational choice*' (*Quarterly Journal of Economics*, 69: 99-118, 1955).
- 10 E.J. Horvitz, '*Reasoning about beliefs and actions under computational resource constraints*', in: *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, 3:301-324, Elsevier, New York, 1989 en S. Russell, '*Rationality and intelligence*', *Artificial Intelligence*, 94 :57-77, 1997.
- 11 Zie bijvoorbeeld W.R. Gilks, S. Richardson en D.J. Spiegelhalter, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall/CRC, 1996.

- 12 Het door ons bedachte algoritme, beschreven in T. Heskes, K. Albers en B. Kappen, 'Approximate inference and constrained optimization', in: *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, 19:313-320, Morgan Kaufmann Publishers, 2003, kwam als duidelijke winnaar naar voren in een onafhankelijke vergelijking (A. Pelizzola, 'Cluster variation method in statistical physics and probabilistic graphical models', *Journal of Physics A*, 38: 309-339, 2005).
- 13 Dit citaat is gebaseerd op Einstein's opmerking "I, at any rate, am convinced that He does not throw dice" in een van zijn brieven aan Max Born (4 December 1926); *The Born-Einstein Letters* (vertaald door Irene Born, Walker and Company, New York, 1971).
- 14 Typische voorbeelden hiervan zijn M. Kuss, C.E. Rasmussen, 'Assessing approximate inference for binary Gaussian process classification', *Journal of Machine Learning Research*, 6: 1679-1704, 2005, als ook het recente H. Rue, S. Martino, N. Chopin, 'Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations', *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 71:319-392, 2009, dat wij van commentaar hebben mogen voorzien. Eigen werk op dit gebied betreft o.a. O. Zoeter en T. Heskes, 'Deterministic approximate inference techniques for conditionally Gaussian state space models', *Statistics and Computing*, 16:279-292, 2006.
- 15 De genoemde sensitiviteit en specificiteit zijn losjes gebaseerd op X. Wang, S. Zhu, Q. Liu, A. Hu, Z. Zan, Q. Yu en Q. Yin, 'Field evaluation of the QBC technique for rapid diagnosis of vivax malaria', *Bulletin of the World Health Organization*, 74:599-603, 1996.
- 16 De casus waarop mijn voorbeeld is gebaseerd, gaat over borstkanker en wordt beschreven door D. Eddy in 'Probabilistic reasoning in clinical medicine: problems and opportunities', in: *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*, pp. 249-267, Cambridge University Press, 1982. Later onderzoek heeft laten zien dat de manier waarop kansinformatie wordt gepresenteerd veel uit kan maken (zie bijvoorbeeld G. Gigerenzer en A. Edwards, 'Simple tools for understanding risks: from innumeracy to insight', *British Medical Journal*, 327:741-744, 2003), maar dat dit de problemen die artsen hebben met (Bayesiaanse) kansrekening nog niet oplost (zie bijvoorbeeld A. Ghosh, K. Ghosh en P. Erwin, 'Do medical students and physicians understand probability?', *QJM* 97:53-55, 2004).
- 17 De beschrijving die ik geef, komt overeen met de wiskundige interpretatie die mensen in het algemeen veronderstellen bij een lossere formulering van het driedeurenprobleem (S. Krauss en X.T. Wang, 'The psychology of the Monty Hall problem: Discovering psychological mechanisms for solving a tenacious brain teaser', *Journal of Experimental Psychology: General*, 132: 3-22, 2003).
- 18 D. Granberg en T.A. Brown, 'The Monty Hall dilemma', *Personality and Social Psychology Bulletin*, 21:711-729, 2005.
- 19 De ophef die over het driedeurenprobleem ontstond, staat zeer uitgebreid gedocumenteerd in allerlei artikelen en commentaren die eenvoudig te vinden zijn op het internet. Zie ook het recente boek van J. Rosenhouse, *The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser*, Oxford University Press, 2009.
- 20 Bijvoorbeeld: A. Tversky en D. Kahneman, 'Judgment under uncertainty: Heuristics and biases', *Science*, 185:1124-1131, 1974.
- 21 Zie K. Körding, 'Decision theory: what "should" the nervous system do?', *Science*, 318:606-610, 2007 en ook de referenties daarin die verwijzen naar verschillende concrete studies die duiden op een Bayesiaanse aanpak van ons brein.

- 22 In hun recente artikel 'Inside the brain of an elite athlete: the neural processes that support high achievement in sports' (*Nature Reviews Neuroscience* 10:585-596, 2009) linken K. Yarrow, P. Brown en J.W. Krakauer neurale en cognitieve processen die geacht worden van belang te zijn voor topsportprestaties met bestaande computationele en fysiologische theorieën. Eén van hun hypothesen is dat vooral ook het anticiperend vermogen van een topsporter beduidend sterker ontwikkeld is dan dat van een amateur.
- 23 Een dergelijke hypothese is terug te vinden in verschillende boeken, met name verzamelingen van verhalen van verschillende auteurs, die de laatste tien jaar zijn verschenen met sexy titels als *Perception as Bayesian Inference*, *The Bayesian Brain*, *The Probabilistic Mind* en *Bayesian Rationality*.
- 24 Bijvoorbeeld: L. von Ahn, M. Blum en J. Langford, 'Telling humans and computers apart automatically – How lazy cryptographers do AI', *Communications of the ACM*, 47:57-60, 2004.
- 25 Bijvoorbeeld: J. Yan en A. Salah El Ahmad, 'A low-cost attack on a Microsoft CAPTCHA', in: *Proceedings of the 15th ACM Conference on Computer and Communications Security*, pp. 543-554, 2008 en referenties hierin.
- 26 Zie bijvoorbeeld een artikel op BBC News van Jason Palmer op <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/8012496.stm> (22 april 2009). Kritiek van collega-wetenschappers staat ook beschreven in een artikel in *The Wall Street Journal* van Gautam Naik, te vinden op <http://online.wsj.com/article/SB124751881557234725.html> (14 juli 2009).
- 27 Enige nuancering is hier op zijn plaats: er zijn zeker congressen en artikelen op het gebied van de aerodynamica, waar onderzoekers vooral voor het bouwen van kleine vliegtuigen (micro air vehicles) zich laten inspireren door de manier waarop insecten vliegen. Zie bijvoorbeeld C.P. Ellington, 'The novel aerodynamics of insect flight: applications to micro-air vehicles', *Journal of Experimental Biology*, 202:3439-3448, 1999.
- 28 S. Kochkin, 'MarkeTrak V: Why my hearing aids are in the drawer: The consumers' perspective', *The Hearing Journal* 53:34-42, 2000.
- 29 Zie E. Horvitz, J. Breese, D. Heckerman, D. Hovel en K. Rommelse, 'The Lumiere project: Bayesian user modeling for inferring the goals and needs of software users', in: *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, 14:256-265, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 1998.
- 30 A. Birlutiu, P. Groot en T. Heskes, 'Multi-task preference learning with Gaussian processes', *Proceedings of ESANN*, 17:123-128, 2009 en A. Birlutiu en T. Heskes, 'Optimal experimental design in a hierarchical setting for probabilistic choice models', *Proceedings of the NIPS workshop on Cost-Sensitive Learning*, 2008.
- 31 Zie bijvoorbeeld het recente overzichtsartikel M.A.J. van Gerven, J. Farquhar, S. Schaefer, R. Vlek, J. Geuze, A. Nijholt, N. Ramsey, P. Haselager, L. Vuurpijl, S. Gielen en P. Desain, 'The brain-computer interface cycle', *Journal of Neural Engineering*, 6:1-10, 2009.
- 32 Een voorbeeld hiervan is M.A.J. van Gerven, C. Hesse, O. Jensen en T. Heskes, 'Interpreting single trial data using groupwise regularization', *Neuroimage*, 46:665-676, 2009.
- 33 B. Bakker en T. Heskes, 'Task clustering and gating for Bayesian multitask learning', *Journal of Machine Learning Research*, 4:83-99, 2003.
- 34 Bijvoorbeeld: R.D. Seidler, 'Multiple motor learning experiences enhance motor adaptability', *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16:65-73, 2004.
- 35 Uit het lied getiteld *Mega Mindy tijd*, tekst van G. Verhulst en H. Bourbon (2007).

