

Berekenbaarheid 2008, tentamen

woensdag 11 juni, 10.30–12.30

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren en 1 punt is gratis. NB: Bij het ‘definiëren’ van een Turing machine moet je deze geven door middel van een *toestandsdiagram*.

1. Definieer een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die alle b 's uit zijn input verwijdert.

Dus bij input *aababba* moet de output *aaaa* zijn. Denk eraan dat de output op vakje één van de tape moet beginnen.

2. Definieer een non-deterministische Turing machine met twee tapes die de taal

$$\{u^n \mid u \in \{a, b\}^*, n \geq 2\}$$

herkent door eindtoestand. Hierin is u^n het woord u precies n maal achter elkaar geplakt. Dus bijvoorbeeld $(ab)^3 = ababab$.

3. Een Turing machine accepteert normaal gesproken zijn input niet als hij links van de tape afloopt. Definieer een *welwillende* Turing machine als een Turing machine die accepteert door stoppen, maar die óók zijn input accepteert als hij links van de tape afloopt.

Laat zien dat er voor iedere recursief opsombare taal L zo'n welwillende Turing machine bestaat die L accepteert.

4. Definieer een macro die de functie

$$f(a, b, c, x) = ax^2 + bx + c$$

uitrekent. Je mag voor het maken van deze macro gebruik maken van alle macro's op pagina 3.

5. Wat is een ‘universele Turing machine’?
6. Laat zien dat het onbeslisbaar is of er bij een gegeven Turing machine M inputs w_1 en w_2 te vinden zijn zodat M stopt met input w_1 en niet stopt met input w_2 . (Als M altijd stopt of juist nooit stopt, dan geldt deze eigenschap dus niet.)

7. Welke functie is

$$p_2^{(2)} \circ (p_1^{(2)} \circ (p_2^{(3)}, p_1^{(3)}), p_1^{(3)} \circ (p_3^{(3)}, p_1^{(3)}, p_1^{(3)}))$$

Verklaar je antwoord.

8. Welke functie is

$$g = \text{primrec}(c_0^{(1)}, s \circ p_3^{(3)})$$

Verklaar je antwoord.

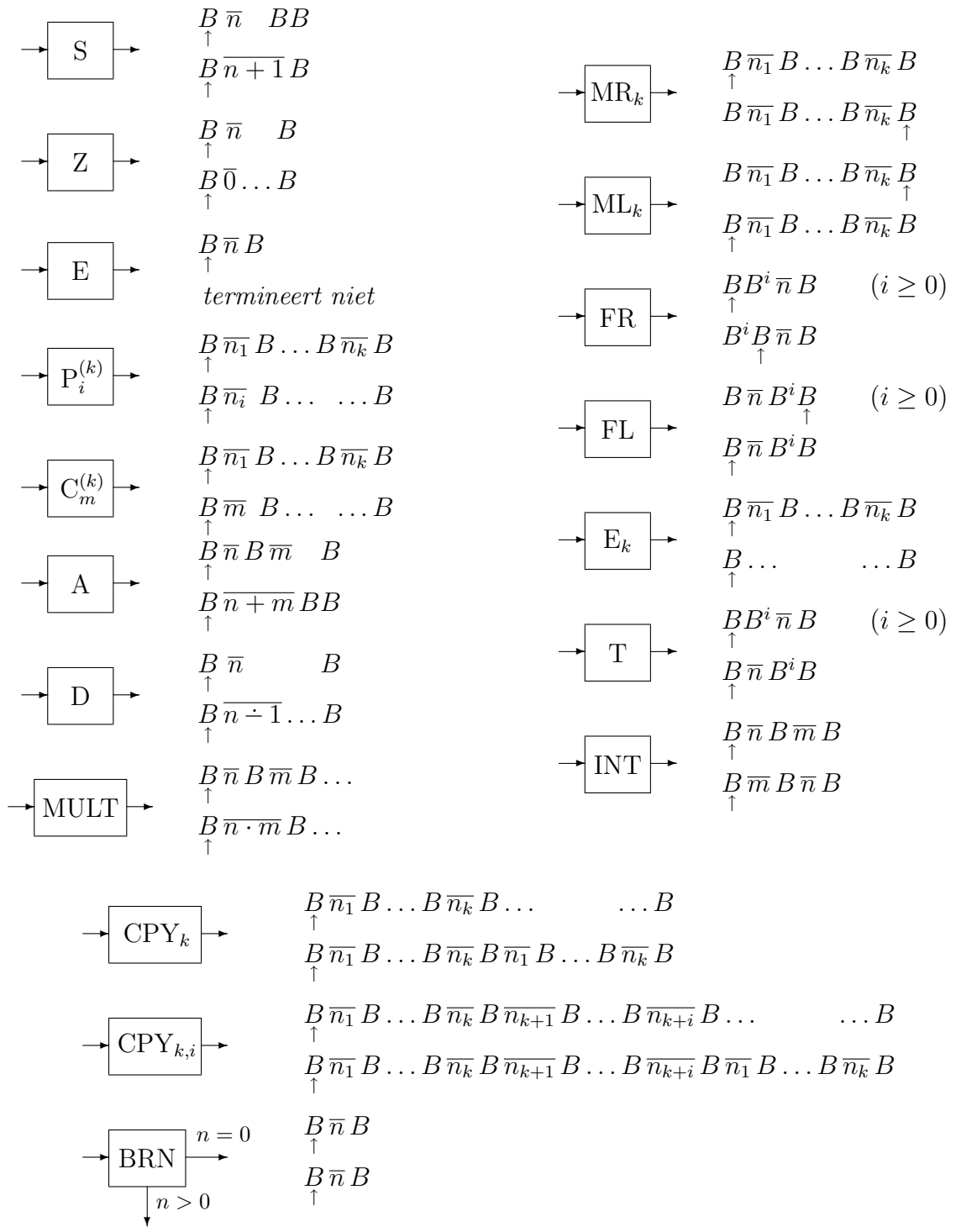
Geef verder de waarde van $g(4, 3)$.

9. We definiëren de functie h door

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ deelbaar is door een kwadraat groter dan één} \\ 0 & \text{als } x \text{ niet deelbaar is door een kwadraat groter dan één} \end{cases}$$

Er geldt dus $h(12) = 1$ (want 12 is deelbaar door 4) maar $h(42) = 0$ (want $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ en dat is niet deelbaar door een kwadraat groter dan één).

Laat zien dat h een primitief recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.



	$\text{id}(x)$	$= x$		
	$z(x)$	$= 0$		
	$s(x)$	$= x + 1$		
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= x_i$		
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= n$		
$\text{pred}(y)$	$= y - 1$		$\text{eq}(x, y)$	$=$ als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y)$	$= x + y$		$\text{ne}(x, y)$	$=$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y)$	$= x \cdot y$		$\text{max}(x, y)$	$=$ het maximum van x en y
$\text{sub}(x, y)$	$= x - y$		$\text{min}(x, y)$	$=$ het minimum van x en y
$\text{exp}(x, y)$	$= x^y$		$\text{quo}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{sg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0		$\text{rem}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders x
$\text{cosg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1		$\text{divides}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
$\text{lt}(x, y)$	$=$ als $x < y$ dan 1 anders 0		$\text{even}(x)$	$=$ als x even is dan 1 anders 0
$\text{gt}(x, y)$	$=$ als $x > y$ dan 1 anders 0		$\text{prime}(x)$	$=$ als x priem is dan 1 anders 0
$\text{le}(x, y)$	$=$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0		$\text{pn}(x)$	$=$ het x -de priemgetal
$\text{ge}(x, y)$	$=$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0			(dus $\text{pn}(0) = 2$, $\text{pn}(1) = 3$, etc.)