Punten en lijnen, postbodes en handelsreizigers

Een mini-inleiding graaftheorie

Herman Geuvers

Radboud Universiteit Nijmegen

9 februari 2019
met dank aan Engelbert Hubbers

Onderwerpen

Graaftheorie

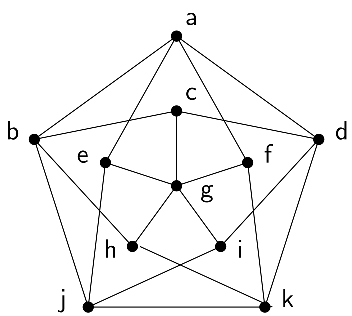
Euler en de postbode

Hamilton en de handelsreiziger

Theorie

Vraag
Wat is eigenlijk een graaf?

Antwoord
Nou, zoiets:

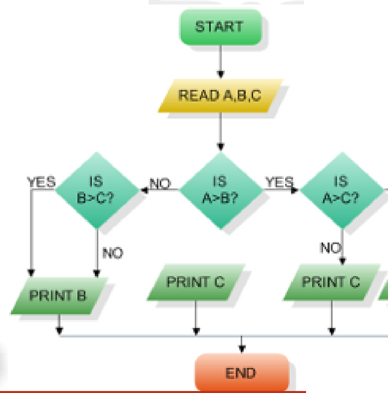


Punten die wel (bijv. a en b) of niet (bijv. c en k) via lijnen met elkaar zijn verbonden.

Theorie (2)

Vraag
Maar wat heb je eraan?

Antwoord
Abstracte representaties van concrete producten en problemen



Formeel

Definitie
Een graaf is een paar $\langle P, L \rangle$ waarbij

- P een eindige verzameling is (de punten) en
- L een eindige verzameling van uit twee elementen bestaande deelverzamelingen van P is (de lijnen).

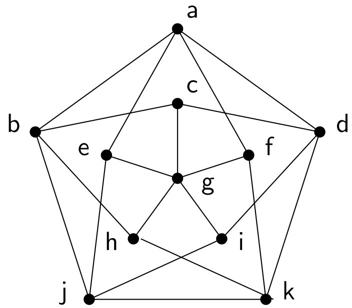
Opmerking
Lijnen noteren we als (a, b), maar lijnen hebben geen richting dus voor (a, b) had ik net zo goed (b, a) kunnen schrijven!

In het bijzonder:

- Lijnen hebben geen richting
- Er zijn geen lijnen van een punt naar zichzelf
- Er kunnen geen twee lijnen zijn tussen dezelfde punten
- Lijnen hebben geen "lengte" en punten hebben geen "gewicht".

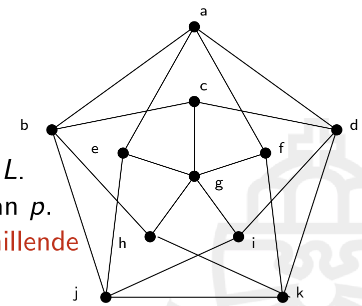
Formeel (2)

Voorbeeld
Grötzschgraaf $\langle P, L \rangle$:



$$
\begin{aligned}
P &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} \\
L &= \{(a, b), (a, d), (a, e), (a, f), \\
&\quad (b, c), (b, h), (b, j), \\
&\quad (c, d), (c, g), \\
&\quad (d, i), (d, k), \\
&\quad (e, g), (e, j), \\
&\quad (f, g), (f, k), \\
&\quad (g, h), (g, i), \\
&\quad (h, k), (i, j), (j, k)\}
\end{aligned}
$$

Terminologie



Definitie
Zij G de graaf $\langle P, L \rangle$ en $p, q \in P$.

- Een buur van p is een x met $(p, x) \in L$.
- De graad van p is het aantal buren van p.
- Een pad van p naar q is een rij verschillende lijnen $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ met $x_0 = p$ en $x_n = q$.
  (Korte notatie voor dit pad: $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$.)
- Een cykel is een pad van een punt naar zichzelf.
- De afstand van p tot q is het minimale aantal lijnen van een pad van p naar q. Notatie: $d(p, q)$.
- Met 'G is samenhangend' bedoelen we: tussen ieder tweetal punten bestaat een pad.
- Met 'G is planair' bedoelen we: je kunt G in het platte vlak zó tekenen dat de (gebogen) lijnen elkaar niet snijden.

De landgraaf

Voorbeeld
De EU-landgraaf is $\langle P, L \rangle$ waarbij

- P de verzameling landen in de EU is en
- L de relatie 'heeft een land-grens' is.

- Buren van Luxemburg: België, Duitsland en Frankrijk
- Graad van België: 4
- Afstand van Nederland naar Spanje: 3
- Samenhangend?

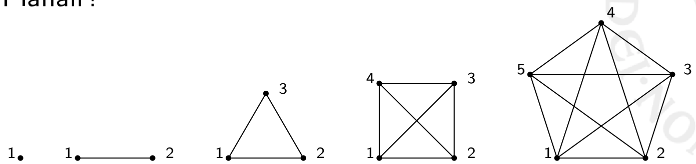
De volledige graaf K_n

Voorbeeld
De volledige graaf K_n is $\langle P, L\rangle$ waarbij

- $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ en
- $L = \{(p, q) \mid 1 \leq p < q \leq n\}$.

Voorbeeld

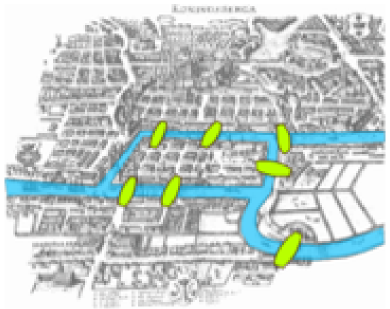
- Samenhangend? Ja, want tussen elk tweetal punten p en q bestaat een pad $p \to q$
- Planair?



K_1, K_2, K_3 en K_4 wel, K_n met $n \geq 5$ niet

Eulercykels

Voorbeeld (Königsberg, Preußen, 1735)
(Bron plaatjes: Wikipedia)



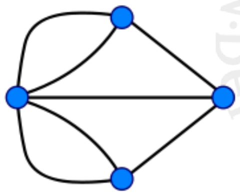
Vraag
Bestaat er een rondwandeling waarbij je elk van de zeven bruggen precies één keer aandoet en weer terugkomt bij je beginpunt?

Eulercykels (2)

Antwoord

- Het maakt niet uit hoe je over land loopt, dus de kaart kan vereenvoudigd worden.

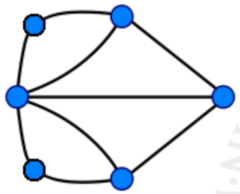
- Elk van de vier stukken land kunnen we als punt zien en elke brug als lijn en dan krijgen we deze graaf. . . toch?



Eulercykels (3)

Antwoord (vervolg)

- . . . Nee, wegens de dubbele lijnen tussen twee punten is dit geen graaf volgens onze definitie!
- Dus moeten we twee extra punten toevoegen. (Bedenk dat dat voor het bestaan van een rondwandeling niet uitmaakt!)



- Bij een rondwandeling moet je bij elk punt even vaak aankomen als vertrekken.
- Dus de graad van elk punt moet even zijn.
- Dus in Königsberg bestaat zo'n rondwandeling niet!

Eulercykels (4)

Definitie
Zij G de graaf $\langle P, L \rangle$.

- Een Eulerpad van G is een pad waarin iedere lijn uit L precies één keer voorkomt.
- Een Eulercykel van G is een cykel waarin iedere lijn uit L precies één keer voorkomt.

Stelling (Euler)
In een samenhangende graaf met minimaal twee punten geldt:

- *Er bestaat een Eulercykel precies dan wanneer ieder punt een even graad heeft.*
- *Er bestaat een Eulerpad precies dan wanneer er hoogstens twee punten van oneven graad zijn.*

Eulercykels (5)

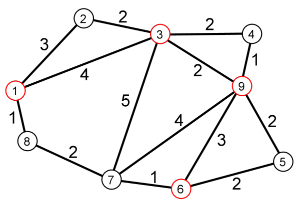
Opmerking

- Als er twee punten met oneven graad zijn dan moet een Eulerpad in één van die punten beginnen en in het andere eindigen.
- Als er één punt met oneven graad is, dan is de maan van groene kaas.

Postbodes

Het Chinese postbodeprobleem is als volgt:

- Een postbode moet brieven bezorgen;
- Hij moet vertrekken vanuit het postkantoor, alle straten doorlopen om weer in het postkantoor te eindigen.
- Doel is om de totaal afgelegde afstand minimaal te houden.



Met dank aan Chin tin tin,

https://commons.wikimedia.org/

- We willen het liefst een Eulercykel;
- Maar als die er niet is willen we ook een route, en de meest efficiënte!
- Dit probleem is van lage complexiteit (klasse P), dus goed algorithmisch oplosbaar.

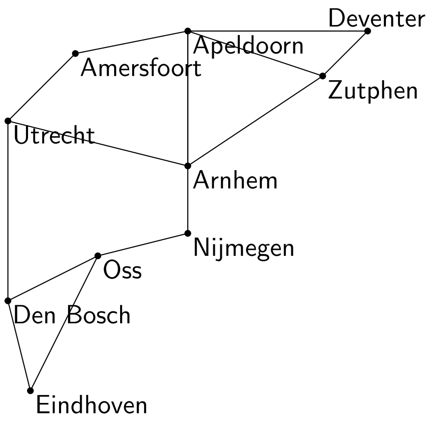
Hamiltoncykels

Definitie
Zij G de graaf $\langle P, L \rangle$.

- Een Hamiltonpad van G is een pad waarin ieder punt precies één keer voorkomt.
- Een Hamiltoncykel van G is een cykel waarin ieder punt precies één keer voorkomt. (Afgezien van het beginpunt natuurlijk dat per definitie van cykel gelijk is aan het eindpunt.)

Hamiltoncykels (2)

Voorbeeld (Deze regio)
Enkele steden en verbindingen:

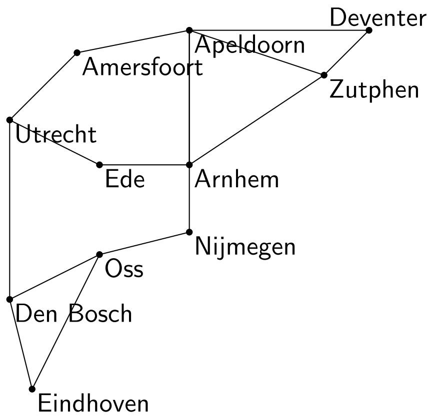


Vraag
Bestaat er een route die begint en eindigt in Nijmegen waarbij elke stad precies één keer wordt aangedaan?

Antwoord
Ja, Nijmegen → Arnhem → Zutphen → Deventer → Apeldoorn → Amersfoort → Utrecht → Den Bosch → Eindhoven → Oss → Nijmegen.

Hamiltoncykels (3)

Voorbeeld (Ede erbij)
Enkele steden en verbindingen:

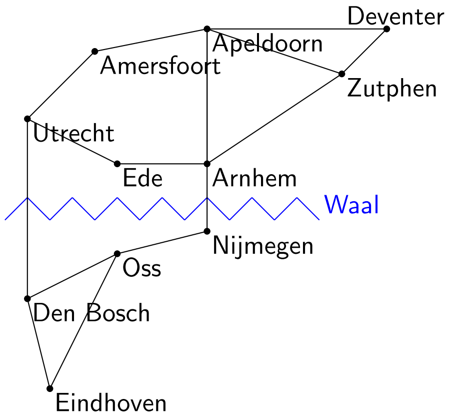


Vraag
Bestaat er een route die begint en eindigt in Nijmegen waarbij elke stad precies één keer wordt aangedaan?

Antwoord
Nee, want...

Hamiltoncykels (4)

Voorbeeld (Ede erbij)
Enkele steden en verbindingen:



Antwoord
- Als er een Hamiltoncykel is, moeten beide bruggen over de Waal er in zitten.
- Dus Den Bosch → Utrecht (of andersom) moet in de cykel.
- Ook Utrecht → Ede → Arnhem (of andersom) moet in de cykel.
- Maar ook Utrecht → Amersfoort → Apeldoorn (of andersom) moet in de cykel.
- Dus minimaal twee keer in Utrecht: geen Hamiltoncykel!

Hamiltoncykels (5)

Opmerking
- Helaas, er is geen stelling die bij een gegeven graaf op een algemene, makkelijke manier aangeeft of er wel of geen Hamiltoncykel is.
- Je moet dus bij elke graaf zelf een bewijs zoeken!
- Denk daarbij aan:
  - De twee lijnen die horen bij een punt met graad twee moeten in elke Hamiltoncykel zitten.
  - Probeer of je de graaf kunt verdelen in componenten via 'bruggen'.
- Het vinden van een Hamiltoncircuit is een NP-volledig probleem! (Karp, 1972)
  Dit is dus niet goed algorithmisch oplosbaar.

Handelsreiziger

Het handelsreizigersprobleem (TSP) is als volgt:

- Gegeven *n* steden,
- en de afstand in kilometers tussen ieder paar van deze steden.
- Vind de kortste weg die iedere stad precies één keer bezoekt en eindigt bij het begin.