Formeel Denken 2006
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica

1. (a)

$$S \leftrightarrow \neg T$$

of

$$S \to \neg T$$

zijn allebei verdedigbaar (of formules die daar equivalent aan zijn.) (Maar je kunt het *niet* vertalen met iets wat equivalent is aan

$$\neg T \to S$$

want als je zegt dat je *alleen* blijft slapen als je niet met de trein gaat, dan kun je niet blijven slapen en toch met de trein gaan. Maar $v(S) = 1$ en $v(T) = 1$ is een model waarin $\neg T \to S$ waar is, dus is dat geen goede vertaling.)

(b) Vier aan elkaar equivalente formules die allemaal een goede vertaling zijn, zijn:

$$A \leftrightarrow \neg T$$

$$(A \vee T) \wedge \neg(A \wedge T)$$

$$(A \wedge \neg T) \vee (\neg A \wedge T)$$

$$(A \to \neg T) \wedge (T \to \neg A)$$

(Maar

$$A \vee T$$

is te simpel, want er staat *anders*, en de '$\vee$' is de *inclusieve* 'of', waarbij allebei de kanten simultaan waar mogen zijn.)

2. (a) 'Als we uit eten gaan en we gaan naar de bioscoop, dan blijf ik bij je slapen.'

(b) 'We gaan uit eten, of we gaan naar de bioscoop en ik blijf bij je slapen, of allebei.'

(Zonder de 'of allebei' is te weinig. Als je in het Nederlands zegt 'we gaan uit eten, of we gaan naar de bioscoop en ik blijf bij je slapen' dan bedoel je beslist niet dat je ook overweegt om het allemaal te doen. Maar dat is wel een model van de formule $E \vee (B \wedge S)$.)

3.

$$(a \to ((a \vee (b \wedge b)) \to (a \vee b)))$$

(Merk op dat de rechter pijl wint van de linkse. En als je de grammatica uit de syllabus bestudeert dan zul je zien dat de buitenste haakjes om de hele formule ook moeten.)

4.

a	b	c	$a \to b$	$b \to c$	$(a \to b) \land (b \to c)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

5. Nee, deze equivalentie klopt niet. Een tegenvoorbeeld is het model v met:

$$\begin{aligned} v(a) &= 0 \\ v(b) &= 1 \end{aligned}$$

In dit model hebben we dat $v(\neg(a \land b)) = 1$ maar $v(\neg a \land \neg b) = 0$. Dus in dat model is de linker formule wel waar maar de rechter niet.

Als bij deze opgave alleen een correcte waarheidstabel is gegeven, is dat geen volledig antwoord. Er moet altijd uitleg zijn gegeven wat die waarheidstabel met het begrip 'logisch equivalent' te maken heeft.

6. Ja, dit logische gevolg geldt wel. In de gemeenschappelijke waarheidstabel van $\neg a \land (a \lor b)$ en b

a	b	$\neg a$	$a \lor b$	$\neg a \land (a \lor b)$	b
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1

staat in de kolom van b altijd een 1 waar in de kolom van $\neg a \land (a \lor b)$ ook een 1 staat. Dat betekent dat b waar is in elk model waarin $\neg a \land (a \lor b)$ waar is, en dus dat

$$\neg a \land (a \lor b) \models b$$

Ook bij deze opgave is alleen een correcte waarheidstabel geen volledig antwoord. Er moet altijd uitleg zijn gegeven wat die waarheidstabel met het begrip 'logisch gevolg' te maken heeft.